Практичне заняття № 7

Задачі на знаходження власних значень і власних елементів диференціальних операторів та розвинення функцій в ряди Фур'є

Нехай H — сепарабельний дійсний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|$.

Прикладом простору H є простір Лебега $L_2(\Omega)$, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_\Omega |v(x)|^2\,dx<\infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega v(x)w(x)\,dx, \quad v,w\in L_2(\Omega),$$

де Ω — область в просторі $\mathbb{R}^n,\ n\in\mathbb{N}$. Зокрема, якщо $n=1$ і $\Omega=(0,l)$, де $l>0$ — довільне число, то $L_2(0,l)$ — дійсний гільбертів простір, складений з класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $v:(0,l)\to\mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l |v(x)|^2\,dx<\infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_0^l v(x)w(x)\,dx, \quad v,w\in L_2(0,l),$$

тобто $L^2(0,l):=L^2(\Omega)$, де $\Omega=(0,l)$.

Нехай задано лінійний оператор

$$A: D(A)\to H,$$

тобто відображення A з H в H таке, що його область визначення $D(A)$ є лінійним підпростором лінійного простору H і для будь-яких $v_1,v_2\in D(A)$ та $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ маємо

$$A(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1Av_1+\alpha_2Av_2.$$

Далі всюди вважаємо, що $D(A)$ — щільна в H множина.

Означення 1. *Оператор $A: D(A)\to H$ називають **замкненим**, якщо з того, що $v_k\underset{k\to\infty}{\to} v$ і $Av_k\underset{k\to\infty}{\to} w$ в H, де $\{v_k\}$ — послідовність елементів з $D(A)$, випливає, що $v\in D(A)$ і $w=Av$.*

Зауваження 1. *Якщо лінійний оператор $\widetilde{A}: D(\widetilde{A})\to H$ зі щільною в H областю визначення $D(\widetilde{A})$ не є замкненим, то в деяких випадках можна розширити його до замкненого. Необхідною і достатньою умовою реалізації цієї можливості є наявність в оператора $\widetilde{A}$ такої властивості:*
- *для будь-яких послідовностей $\{v_k^{(1)}\},\{v_k^{(2)}\}\subset D(A)$ таких, що*

$$v_k^{(1)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v,\quad v_k^{(2)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v \quad i \quad \widetilde{A}v_k^{(1)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}w^{(1)},\quad \widetilde{A}v_k^{(2)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}w^{(2)} \quad \text{в} \quad H,$$

правильна рівність

$$w^{(1)}=w^{(2)}.$$

Тоді можна побудувати замкнений лінійний оператор $A: D(A)\to H$ такий, що

$$D(\widetilde{A})\subset D(A)\quad i\quad Av=\widetilde{A}v\quad \forall v\in D(\widetilde{A}),$$

причому для будь-якого $v \in D(A)$ існує послідовність $\{v_k\} \subset D(\widetilde{A})$ така , що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad i \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Av \quad в \quad H.$$

Це робиться шляхом приєднання до множини $D(\widetilde{A})$ тих елементів $v \in H$, для яких існують елемент $w \in H$ і послідовність $\{v_k\}$ елементів з $D(\widetilde{A})$ такі, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\to} v \quad i \quad Av_k \underset{k\to\infty}{\to} w \quad в\ H,$$

і покладанням

$$Av := w.$$

$\square$

Нагадаємо, що $H^2(0,l)$ — простір Соболєва, складений з неперервно диференційовних функцій $v : [0,l] \to \mathbb{R}$ таких, що функція v' є абсолютно неперервною на $[0,l]$ і її похідна v'' (яка існує майже всюди на $(0,l)$) є елементом простору $L_2(0,l)$. Простір $H^2(0,l)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^2(0,l)} := \int_0^l [vw + v'w' + v''w'']\,dx.$$

Твердження 1. *Припустимо, що $l > 0$ — довільне дійсне число, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — які-небудь дійсні числа такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, і розглядаємо оператор*

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to L_2(0,l),$$

визначений за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \left\{ v \in C^2([0,l]) \;\middle|\; \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \right\} \subset L_2(0,l),$$

$$\widetilde{A}v := -v'' \quad \forall v \in D(\widetilde{A}).$$

Тоді розширенням цього оператора до замкненого є оператор

$$A : D(A) \to L_2(0,l)$$

такий, що

$$D(A) := \left\{ v \in H^2(0,l) \;\middle|\; \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(l) = 0 \right\}, \tag{1}$$

$$Av := -v'' \quad \forall v \in D(A). \tag{2}$$

Означення 2. ***Спряженим*** *до оператора A називають оператор $A^\star : D(A^\star) \to H$, область визначення $D(A^\star)$ якого складається з тих елементів $w \in H$, для яких існує елемент $w^\star \in H$ такий, що*

$$(Av, w) = (v, w^\star) \quad \forall v \in D(A), \tag{3}$$

і

$$A^\star w = w^\star.$$

Очевидно, що оператор $A^\star$ є лінійним і

$$(Av, w) = (v, A^\star w) \quad \forall v \in D(A),\ \forall w \in D(A^\star).$$

Означення 3. *Оператор A, для якого*

$$D(A) \subset D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \quad \forall v \in D(A),$$

тобто правильна тотожність

$$(Av, w) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A), \tag{4}$$

називають ***симетричним****.*

Означення 4. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають* ***самоспряженим****, якщо $A = A^\star$, тобто*

$$D(A) = D(A^\star) \quad i \quad Av = A^\star v \ \ \forall v \in D(A).$$

Теорема 1. *Оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим тоді і лише тоді, коли він є симетричним і з того, що для $w \in H$ існує $w^\star \in H$, при якому виконується тотожність* (3)*, випливає включення $w \in D(A)$.*

Твердження 2. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 1, є самоспряженим.*

Доведення. Отже, нехай $v, w \in D(A)$ — довільні. Маємо

$$(Av, w) = \int\limits_0^l (-v''(x))w(x)\ dx = -v'(x)w(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l v'(x)w'(x)\ dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(x)w'(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l v(x)(-w''(x))\, dx =$$

$$= -v'(l)w(l) + v'(0)w(0) + v(l)w'(l) - v(0)w'(0) + (v, Aw). \tag{5}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$. Це означає, що або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$. У випадку $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$ маємо $v(0) = w(0) = 0$ і тоді

$$v'(0)w(0) - v(0)w'(0) = 0. \tag{6}$$

Якщо $\beta_0 = 0$ і $\alpha_0 \neq 0$, то $v'(0) = v'(l) = 0$, і тоді знову маємо (6). Коли ж $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ (тобто $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 \neq 0$), то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$ і $w'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}w(0)$, а отже правильна рівність (6).

Аналогічно аналізуємо всеможливі випадки значень α_1 та β_1 і отримуємо рівність

$$v'(l)w(l) - v(l)w'(l) = 0. \tag{7}$$

З (5) на підставі (6) і (7) маємо

$$(Aw, v) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in D(A),$$

тобто оператор А є симетричним.

Залишається показати, що коли для деяких $w, w^* \in L_2(0, l)$ маємо

$$(Av, w) = (v, w^*) \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_0^l (-v''(x))w(x)\, dx = \int\limits_0^l v(x)w^*(x)\, dx \ \ \forall v \in D(A),$$

то $w \in D(A)$ і $w^* = Aw$, тобто $w^* = -w''$. Це легко доводиться, виходячи із означення узагальненої похідної другого порядку. □

Означення 5. *Оператор $A : D(A) \to H$ називають невід'ємним, якщо*

$$(Av, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(A). \tag{8}$$

Якщо ж

$$(Av, v) > 0 \quad \forall v \in D(A),\ v \neq 0, \tag{9}$$

то його називають додатним.

Твердження 3. *Оператор $A : D(A) \to L_2(0, l)$, який визначений у формулюванні твердження 1, у випадку $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ і $\alpha_1\beta_1 \geq 0$ є невід'ємним, причому коли $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$ (це означає, що або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$), то він є додатним, а коли $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то суттєво невід'ємним.*

Доведення. Отже, нехай $v \in D(A)$ — довільне. Тоді маємо

$$(Av, v) = \int_0^l (-v''(x))\, v(x)dx = -v'(x)v(x)\Big|_0^l + \int_0^l |v'(x)|^2 dx =$$

$$= -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int_0^l |v'(x)|^2 dx. \tag{10}$$

Нехай $\alpha_0\beta_0 = 0$, тобто або $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, або $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Якщо $\alpha_0 = 0$ і $\beta_0 \neq 0$, то $v(0) = 0$, а отже, $v'(0)v(0) = 0$. Така ж рівність буде і коли $\alpha_0 \neq 0$ і $\beta_0 = 0$. Коли $\alpha_0\beta_0 < 0$, то $v'(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v(0)$, а отже, $v'(0)v(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}|v(0)|^2 \geq 0$, бо $\frac{\beta_0}{\alpha_0} < 0$.

Аналогічно розглядаючи різні випадки значень α_1 і β_1, приходимо до висновку, що $-v'(l)v(l) \geq 0$, якщо $\alpha_1\beta_1 \geq 0$. Тоді з (10) маємо, що $(Av, v) \geq 0$.

Якщо $(Av, v) = 0$, то з (10) маємо, що $v'(x) = 0\ \forall x \in [0, l]$, $v'(0)v(0) = 0$ і $v'(l)v(l) = 0$. Очевидно, що $v(x) = C$, $x \in [0, l]$, де C — стала, і при $\beta_0 \neq 0$ або $\beta_1 \neq 0$ маємо $C = 0$, а при $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$ отримаємо, що C —- довільна стала. Це означає те, що нам було потрібно показати. $\square$

Означення 6. *Кажуть, що число $\lambda \in \mathbb{R}$ є власним значенням оператора $A : D(A) \to H$, якщо існує ненульовий елемент $w \in D(A)$, такий, що*

$$Aw = \lambda w, \tag{11}$$

Елемент w називають ***власним елементом*** *оператора A, відповідний власному значенню λ.*

Легко переконатися, що множина $V(\lambda^*)$, складена з власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, разом з нульовим елементом, є лінійним підпростором у просторі $D(A)$. Цей підпростір називають власним підпростором, відповідним власному значенню Розмірність підпростору $V(\lambda^*)$ або, іншими словами, максимальна кількість лінійно незалежних власних елементів оператора A, відповідних власному значенню λ^*, називають **кратністю власного значення** λ^*. Кратність власного значення може бути як скінченою так і нескінченною.

Теорема 2. *Якщо оператор $A : D(A) \to H$ є самоспряженим, то будь-які два власні елементи цього оператора, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними. Крім того, якщо оператор A ще і невід'ємний (відповідно, додатний), то його власні значення є невід'ємними (відповідно, додатними).*

Означення 7. *Оператор $B : H \to H$ називають компактним, якщо для будь-якої обмеженої послідовності $\{v_k\} \subset H$ (тобто $v_k \in H$ і $\|v_k\| \leq C$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, де $C > 0$ — стала, яка від k не залежить) послідовність $\{Bv_k\}$ містить збіжну в H підпослідовність.*

Твердження 4. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $K(\cdot, \cdot) : [0, l] \times [0, l] \to \mathbb{R}$ — задана неперервна функція. Тоді оператор $B : L_2(0, l) \to L_2(0, l)$, визначений за правилом:*

$$\big(Bv\big)(x) = \int\limits_0^l K(x, y)v(y)\, dy, \quad x \in [0, l], \tag{12}$$

є компактним.

Твердження 5. *Нехай $A : D(A) \to L_2(0, l)$ — оператор, який визначений у формулюванні твердження 1, і $\alpha_0\beta_0 \leq 0$ та $\alpha_1\beta_1 \geq 0$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ оператор $(cI + A)^{-1}$, який називають резольвентою оператора A, є визначеним на всьому просторі $L_2(0, l)$ і компактним.*

Доведення. Отже, нехай $c > 0$ — довільна фіксована стала. Спочатку доведемо, що для довільного елемента $w \in L_2(0, l)$ існує тільки один елемент $v \in H^2(0, l)$ такий, що

$$-v''(x) + cv(x) = w(x), \quad x \in (0, l), \tag{13}$$

$$\alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \quad \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0. \tag{14}$$

Як випливає з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку функція v, яка задовольняє (13), (14) може існувати і бути єдиною тоді і лише тоді, коли функція $v(x)$, $x \in [0, l]$, що задовольняє рівність

$$-v''(x) + cv(x) = 0, \quad x \in (0, l), \tag{15}$$

і крайові умови (14), може бути лише нульовою. Покажемо, що при $c > 0$ це так. Припустимо, що маємо функцію v, яка задовольняє (15), (14). Помножимо рівність (15) на цю функцію та проінтегруємо здобуту рівність по $[0, l]$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_0^l \left[-v''(x)v(x) + c|v(x)|^2\right] dx = 0. \tag{16}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^l \big(-v''(x)\big)v(x)\, dx = -v''(x)v(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l \big|v'(x)\big|^2 dx = -v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int\limits_0^l \big|v'(x)\big|^2 dx,$$

то рівність (16) перепишемо у вигляді

$$-v'(l)v(l) + v'(0)v(0) + \int\limits_0^l \Big[\big|v'(x)\big|^2 + c\big|v(x)\big|^2\Big]\, dx = 0. \tag{17}$$

Міркуючи так як при доведені твердження 3, отримуємо, що $-v'(l)v(l) + v'(0)v(0) \geq 0$. Звідси і з (17) випливає, що $v = 0$. Зауважимо, що коли або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, то і при умові $c = 0$ матимемо $v = 0$.

Визначимо функцію Гріна:

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{v_1(x)v_2(y)}{W(y)}, & \text{якщо } \ 0\le x\le y,\\[2ex] \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{W(y)}, & \text{якщо } \ y\le x\le l,\end{cases} \tag{18}$$

де v_1 — функція, що задовольняє (15) і першу з крайових умов (14), а v_2 — функція, що задовольняє (15) і другу з крайових умов (14), а

$$W(x)=\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x)\\ v_1'(x) & v_2'(x)\end{vmatrix}, \quad x\in[0,l],$$

— визначник Вронського, побудований за функціями v_1 і v_2.

Як відомо з теорії крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку, коли $w\in C\big([0,l]\big)$, то єдина функція $v\in C^2([0,l])$, яка задовольняє (13), (14), має зображення

$$v(x)=\int\limits_0^l G(x,y)w(y)\,dy=\int\limits_0^x G(x,y)w(y)\,dy+\int\limits_x^l G(x,y)w(y)\,dy=$$

$$=v_2(x)\int\limits_0^x\frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy+v_1(x)\int\limits_x^l\frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x\in[0,l]. \tag{19}$$

Це означає, що

$$v'(x)=v_2'(x)\int\limits_0^x\frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy+v_1'(x)\int\limits_x^l\frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy, \quad x\in[0,l],$$

$$v''(x)=v_2''(x)\int\limits_0^x\frac{v_1(y)w(y)}{W(y)}\,dy+v_1''(x)\int\limits_x^l\frac{v_2(y)w(y)}{W(y)}\,dy+w(x) \text{ для майже всіх } x\in[0,l].$$

Звідси видно, що функція v, задана формулою (19) при $w\in L_2(0,l)$, належить простору $H^2(0,l)$ і задовольняє (13) майже скрізь та крайові умови (14), тобто обернений оператор $(cI+A)^{-1}$ визначний на всьому просторі $L_2(0,l)$, причому $(cI+A)^{-1}w=v$, де $w\in L_2(0,l)$ — довільна, а v визначена формулою (19), тобто формула (19) визначає оператор $(cI+A)^{-1}: L_2(0,l)\to L_2(0,l)$. А так як $G\in C\big([0,l]\times[0,l]\big)$, то цей оператор, як показано у твердженні 4, є компактним. □

Теорема 3. *Нехай лінійний оператор $A: D(A)\to H$ задовольняє такі умови:*
- *він є самоспряженим і невід'ємним (відповідно, додатним),*
- *для деякої сталої $c\ge 0$ оператор $(cI+A)^{-1}$ (тобто обернений до оператора $cI+A$ або, іншими словами, резольвента оператора A) визначений на всьому просторі H і компактний.*

Тоді власні значення оператора A є невід'ємними (відповідно, додатними), мають скінчені кратності і точкою скупчення є і тільки $+\infty$, а з власних елементів оператора A можна утворити ортонормовану базу в H, а точніше існує ортонормована база $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ в H така, що

$$Aw_k=\lambda_k w_k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{20}$$

де

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots, \quad \textit{причому} \ \ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{21}$$

і в ланцюжку нерівностей (21) кожне власне значення оператора A повторюється стільки разів, яка його кратність.

Означення 8. *Скажемо, що лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), якщо він задовольняє умови теореми 3.*

Зауваження 2. *Якщо лінійний оператор $A : D(A) \to H$ задовольняє умову (**SNC**), то послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$, про які говориться в теоремі 3, шукаємо так. Спочатку шукаємо всі власні значення λ_j°, $j \in \mathbb{N}$, оператора A (вони є невід'ємними числами), нумеруючи їх так, щоби вони утворювали монотонну зростаючу послідовність, тобто $0 \le \lambda_1^\circ < \lambda_2^\circ < \ldots < \lambda_k^\circ < \ldots$, і знаходимо відповідні їм власні підпростори $V(\lambda_j^\circ)$. Як відомо, будь-які два власні елементи оператора A, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними. В кожному власному підпросторі $V(\lambda_j^\circ)$ (він скінченновимірний) вибираємо ортонормомовану базу $w^*_{(j,s)}, s \in \{1, \ldots, q_j\}$, де q_j — кратність власного значення λ_j°, і вводимо позначення $\lambda^*_{(j,s)} := \lambda_j^\circ$, $s \in \{1, \ldots, q_j\}$. Впорядкуємо множину $\{(j\,, s)\,|\, j \in \mathbb{N}, s \in \{1, \ldots, q_j\}\}$ так, що (j_1, s_1) передує (j_2, s_2), якщо або $j_1 < j_2$, або $j_1 = j_2$ і $s_1 < s_2$, і задамо монотонно зростаюче відображення μ множини $\mathbb{N}$ в цю множину (тобто, якщо $l_1 < l_2$, то $\mu(l_1) = (j_1, s_1)$ передує $\mu(l_2) = (j_2, s_2)$). Тоді визначаємо*

$$w_k := w^*_{\mu(k)}, \quad \lambda_k := \lambda^*_{\mu(k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що в ланцюжку рівностей/нерівностей (21) кожне власне значення оператора A повторяється підряд стільки раз, яка його кратність.

Наслідок 1. *Існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора $A : D(A) \to L_2(0, l)$, визначеного у формулюванні твердження 1 при умові $\alpha_0\beta_0 \le 0$ та $\alpha_1\beta_1 \ge 0$, так, що*

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots, \ \textit{причому} \ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{23}$$

і $\lambda_1 = 0$ у випадку $\beta_0 = \beta_1 = 0$, а в інших випадках значень α_0, β_0 і α_1, β_1 маємо $\lambda_1 > 0$.

Доведення. Ми вже з'ясували, що (див. твердження 2, 3, 5), що оператор A є самоспряженим, додатним у випадку, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і суттєво невід'ємним у випадку, якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, а також встановили, що для довільного $c > 0$ оператор $(cI + A)^-1$ є визначеним на $L_2(0, l)$ і компактним, тобто оператор A задовольняє умову **(SNC)**. Зі сказаного безпосередньо випливає, що власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. Звідси і теореми 3 безпосередньо випливає наше твердження.

Уточнимо спосіб знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ і переконаємося, що в (23) всі нерівності, крім першої, є обов'язково строгими, тобто всі власні значення є однократними. Для цього зауважимо, що із означення оператора A випливає, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Оскільки $H^2(0,l)$ — простір Соболєва, то w'' — узагальнена похідна w другого порядку за Соболєвим. Як було раніше сказано, $H^2(0,l) \subset C^1([0,l])$, а отже, з рівняння задачі (24) маємо $w'' \in C([0,l])$, тобто задачу (24) розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$ (похідна w'' є класичною і неперервною на $[0,l]$).

Отож, нам потрібно знайти числа λ такі, що задача (24) має ненульові розв'язки. Як вже було сказано, коли або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, то такі числа є тільки серед додатних чисел, а якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, то нуль є таким числом, а решта — серед додатних чисел.

Спочатку припустимо, що маємо перший випадок, тобто або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, а отже, $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

яке запишемо у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{25}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{26}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{27}$$

і підставимо вирази (26) і (27) в крайові умови задачі (24):

$$\begin{cases} \alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) \equiv \alpha_0 C_2\sqrt{\lambda} + \beta_0 C_1 = 0, \\ \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) \equiv \alpha_1(-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + \beta_1(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення λ, при яких система (28) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки і підставити їх у (26). У результаті цього будуть знайдені власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A.

Зведемо систему (28) до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} \beta_0 C_1 + \alpha_0\sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ (-\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l)C_1 + (\alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l)C_2 = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Система (29) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0\sqrt{\lambda} \\ -\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + \beta_1\cos\sqrt{\lambda}l & \alpha_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \beta_1\sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + (\alpha_0\alpha_1\lambda - \beta_0\beta_1)\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{30}$$

Аналізуючи різні випадки значень $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, в кожному з них отримаємо зліченну кількість додатних коренів рівняння (30). Найбільш загальний та складний випадок будемо мати, коли $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq 0,\ \alpha_0\alpha_1 \neq 0,\ \beta_0\beta_1 \neq 0$. Тоді рівняння (30) рівносильне рівнянню

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}(\alpha_0\alpha_1\sqrt{\lambda} + \frac{\beta_0\beta_1}{\sqrt{\lambda}}).$$

Розв'язуючи графічно, бачимо, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Ці корені і будуть власними значеннями нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (29) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга або має значення нуль, або виражається через першу. Це означає, що множина всіх власних функцій, відповідних одному і тому ж власному значенню, доповнена нульовою функцією, утворюють одновимірний лінійний підпростір простору $L_2(0,l)$, який має вигляд $\{Cw^* \mid C \in \mathbb{R}\}$, де w^* — одна із власних функцій. Отож, ми встановили, що власні значення оператора A є однократними. Впорядкуємо додатні корені рівняння (30) в порядку зростання їх величин, тобто у вигляді

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ... \tag{31}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдемо власну функцію за формулою (26) при $\lambda = \lambda_k$ і значеннях C_1 і C_2, знайдених із системи (29) при $\lambda = \lambda_k$ за додаткової умови

$$\int_0^l |w(x)|^2 dx = 1$$

(умові нормування). Позначимо отриману власну функцію через w_k. Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$.

Аналогічно розглядаємо випадок $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$. □

Як було сказано вище, для будь-якого $v \in H$ маємо маємо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k, \quad \text{де } \ \widehat{v}_k = (v, w_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Припустимо, що оператор A задовольняє умову (**SNC**). Тоді*

$$D(A) = \{v \in H \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\widehat{v}_k|^2 < \infty\}, \quad Av = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widehat{v}_k w_k, \quad \text{якщо } \ v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{v}_k w_k. \tag{32}$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $l > 0$ *— яке-небудь фіксоване число, а* $A : D(A) \to L_2(0, l)$ *оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де* $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, *тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0, l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$*, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A*;*
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := x + 1,\ x \in (0, l)$*;* *б)* $f(x, t) := x \sin t,\ (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Отож, нам потрібно знайти значення $\lambda > 0$ такі, що задача (33) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w'' = \lambda w,$$

і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{34}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{35}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{36}$$

і підставимо вирази (35) і (36) в крайові умови задачі (33):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (37) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (37) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{38}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (35) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{40}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\sqrt{\lambda_k}x\, dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0, l],$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x+1) \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big((x+1) \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x \Big|_0^l \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(-1 - (-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \Big) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \Big(1 + (-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f_k}(t) := \int\limits_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l (x\sin t)\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l x\sin\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= -\sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\Big) =$$

$$= -\sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(0 - \frac{2l}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}((-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi+2\pi k}) = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\sin t\,,\quad t\in(0,+\infty).$$

□

Приклад 2. *Нехай* $l>0$ *— яке-небудь фіксоване число, а* $A: D(A)\to L_2(0,l)$ *оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де* $\alpha_0=1,\beta_0=0,\alpha_1=1,\beta_1=0$, *тобто*

$$D(A) := \{v\in H^2(0,l)\mid v'(0)=0,\ v'(l)=0\},\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A).$$

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ *в* $L^2(0,l)$ *і відповідну їй числову послідовність* $\{\lambda_k\}$, *складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора* A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := 2x+1,\ x\in(0,l)$; *б)* $f(x,t) := (x-1)e^t,\ (x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1=0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w''=\lambda w, & x\in(0,l),\\ w'(0)=0, & w'(l)=0.\end{cases}\tag{42}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda\geqslant 0$ такі, що задача (42) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння

$$-w''=\lambda w,\tag{43}$$

у випадках 1) $\lambda=0$ та 2) $\lambda>0$.
1) Нехай $\lambda=0$, тоді маємо рівняння

$$-w''=0.$$

Будь-який його розв'язок якого має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо ці сталі, підставивши розв'язок у крайові умови задачі (42). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто $w_0(x) = C_2$, $x \in [0, l]$, де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_0(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{44}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{45}$$

2) Нехай $\lambda > 0$ і запишемо рівняння (43) у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{46}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \mu^2 = -\lambda \Longleftrightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (46) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{47}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі. Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{48}$$

і підставимо вирази (47) і (48) в крайові умови задачі (42):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{49}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (49) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (49) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{50}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (47) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad x \in [0, l], \tag{52}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k(x)|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} C_1^2 \int_0^l \Big(1 + \cos 2 \frac{\pi k}{l} x\Big) \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x \, dx \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int_0^l \varphi(x) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (2x + 1) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} (l^2 + l) = \sqrt{l}(l + 1) \,,$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (2x + 1) \cos \frac{\pi k}{l} x \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big((2x + 1) \sin \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l - 2 \int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx \Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k} \Big(0 + \frac{2l}{\pi k} \cos \frac{\pi k}{l} x \Big|_0^l \Big) = 2 \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l f(x, t) w_0(x) \, dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (x - 1) e^t \, dx = e^t \cdot \sqrt{\frac{1}{l}} \Big(\frac{l^2}{2} - l\Big) = \sqrt{l} \Big(\frac{l}{2} - 1\Big) \cdot e^t \,,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int\limits_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x-1)e^t \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x-1)\cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l (x-1)\cos\frac{\pi k}{l} x\, dx =$$

$$= e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k}\Big((x-1)\sin\frac{\pi k}{l} x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin\frac{\pi k}{l} x\, dx\Big) = e^t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi k}\Big(0 + \frac{l}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{l} x\Big|_0^l\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1) \cdot e^t = a_k e^t, \quad t \in (0, +\infty), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $a_k := \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2 ((-1)^k - 1),\ k \in \mathbb{N}.$ □

Приклад 3. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0, l)$ оператор, заданий за правилом* (1), (2), *де* $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, *тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

де $h_1 > 0$ — задане число.
Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x) := \cos x,\ x \in (0, l)$;   б) $f(x, t) := 2x \cos t,\ (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0, l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (54) має ненульові розв'язки. Розглянемо рівняння задачі (54) і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{55}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (55) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{56}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{57}$$

і підставимо вирази (56) і (57) в крайові умови задачі (54):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (58) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (58) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \tag{59}$$

звідки

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \tag{60}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{l h_1}. \tag{61}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (58) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (56) і кожного $k \in \mathbb{N}$ знаходимо

$$w_k(x) = C_1(\cos \sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k}x), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{63}$$

де C_1 — ненульова стала, яку знаходимо з умови нормування:

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1^2\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{64}$$

Отож, для кожного $k\in\mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x\in[0,l], \tag{65}$$

де M_k визначено в (64).

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ (див. (65)) і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$ (див.(62)), складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A.

Зауваження 1. *Вирази власних елементів* w_k, $k\in\mathbb{N}$, *оператора* A *можна спростити. Справді, використавши рівність* (60), *маємо*

$$\cos\sqrt{\lambda_k}x - \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x = \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}(\cos\sqrt{\lambda_k}x\sin\sqrt{\lambda_k}l - \cos\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_k}x) =$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x\in[0,l], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{66}$$

Отож, звідси та (63) *для довільного* $k\in\mathbb{N}$ *отримаємо*

$$w_k(x) := C_1\frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x) = \widetilde{C}_1\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x\in[0,l], \quad k\in\mathbb{N}$$

де $\widetilde{C}_1 := C_1\dfrac{1}{\sin\sqrt{\lambda_k}l}$ *— ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування:*

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \widetilde{C}_1^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \widetilde{C}_1^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1.$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використавши рівність (60)*:*

$$\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1-(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$\widetilde{C}_1^2 \cdot \frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C}_1 = \widetilde{M}_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}. \tag{67}$$

Отож,

$$w_k(x) = \widetilde{M}_k \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x), \quad x \in [0,l], \quad \textit{де} \ \ \widetilde{M}_k := \left(\frac{1}{2}\Big(l - \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\right)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{68}$$

— ортонормована база в $L^2(0,l)$ складена з власних елементів оператора A, а відповідна їй числова послідовність з власних чисел має вигляд (62).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою $\{w_k\}$, використавши вирази (68):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0,l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = \widetilde{M}_k \int_0^l \cos x \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\int_0^l \big(\sin(x(1-\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l) + \sin(-x(1+\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big)\,dx =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(-\frac{1}{1-\sqrt{\lambda_k}}\cos(x(1-\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big|_0^l + \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_k}}\cos(-x(1+\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k}l)\big|_0^l\Big) =$$

$$= \frac{\widetilde{M}_k}{2}\Big(-\frac{1}{1-\sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l) + \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_k}}(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l)\Big) =$$

$$= -\widetilde{M}_k \frac{\sqrt{\lambda_k}}{1-\lambda_k}\Big(\cos l - \cos\sqrt{\lambda_k}l\Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = \widetilde{M}_k \int_0^l (2x\cos t)\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx =$$

$$= 2\cos t \cdot \widetilde{M}_k \int_0^l x \sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx = 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(x\cos\sqrt{\lambda_k}(l-x)\big|_0^l - \int_0^l \cos\sqrt{\lambda_k}(l-x)\,dx\Big) =$$

$$= 2\cos t \cdot \frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(l-x)\big|_0^l\Big) = 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\Big)\cdot\cos t =$$

$$= b_k\cos t, \quad t \in (0,+\infty), \quad \text{де} \quad b_k := 2\frac{\widetilde{M}_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

Приклад 4. *Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом (1), (2), де $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто*

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) = 0,\ v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

де h_2 — задане число.

Треба

1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;

2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:

а) $\varphi(x) := x - 1,\ x \in (0,l)$; б) $f(x,t) := e^x \sin t,\ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.

Розв'язування. **1)** На підставі наслідку 1 робимо висновок, що існують ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$ такі, що виконуються співвідношення (22), (23), причому $\lambda_1 > 0$. Для знаходження $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ використаємо схему, описану в доведенні наслідку 1.

З означення оператора A випливає, що для довільного фіксованого значення параметра λ операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) = 0, \quad w'(l) + h_2 w(l) = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (69) має ненульові розв'язки. Отже, розглянемо рівняння задачі (69) і запишемо його у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{70}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його повний загальний розв'язок, а для цього розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (70) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{71}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{72}$$

і підставимо вирази (71) і (72) в крайові умови задачі (69):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) + h_2 w(l) \equiv (-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + h_2(C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (58) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Із системи (73) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{74}$$

Перетворимо отримане рівняння так

$$-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + h_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda}l = \frac{h_2}{\sqrt{\lambda}}. \tag{75}$$

Позначимо $\mu := \sqrt{\lambda}l$ і здобуваємо рівняння

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{h_2 l}{\mu}.$$

Розв'язуючи його графічно, переконуємося, що це рівняння має зліченну кількість додатних коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{76}$$

— власні значення нашого оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (71) і знаходимо

$$w_k(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N},$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо з умови нормування:

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad .$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використовуючи (75), так:

$$\int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (1+\cos 2\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k}}\sin 2\sqrt{\lambda_k}l =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_k}l = \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda_k}l\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\sqrt{\lambda_k}l} =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{1}{1+(\frac{h_2}{\sqrt{\lambda_k}})^2} = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big).$$

Отож, отримуємо

$$C_1^2\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = H_k := \bigg(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\bigg)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{77}$$

Отже, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$, складена з власних елементів оператора A, є така:

$$w_k(x) = H_k\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \quad \text{де } H_k := \bigg(\frac{1}{2}\Big(l + \frac{h_2}{\lambda_k + h_2^2}\Big)\bigg)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

а відповідну їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складена з власних власних значень оператора A, визначена в (76).

2) а) Запишемо розвинення функції φ в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in (0, l),$$

де

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx = H_k \int\limits_0^l (x-1) \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((x-1) \sin\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin\sqrt{\lambda_k} x\, dx \Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((l-1) \sin\sqrt{\lambda_k} l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cos\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l \Big) =$$

$$= \frac{H_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Big((l-1) \sin\sqrt{\lambda_k} l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (\cos\sqrt{\lambda_k} l - 1) \Big).$$

б) Запишемо розвинення функції f в ряд Фур'є за знайденою ортонормованою базою:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0, +\infty),$$

де

$$\widehat{f}_k(t) := \int\limits_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx = H_k \int\limits_0^l (e^x \sin t) \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= \sin t \cdot H_k \int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx, \quad t \in (0, +\infty).$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^l e^x \sin\sqrt{\lambda_k} x\, dx =$$

$$= e^l \cos\sqrt{\lambda_k} l - 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \big(e^x \sin\sqrt{\lambda_k} x \Big|_0^l - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx \big) =$$

$$= e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1 - \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx.$$

Звідси

$$\big(1 + \frac{1}{\lambda_k} \big) \int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1,$$

$$\int\limits_0^l e^x \cos\sqrt{\lambda_k} x\, dx = \frac{e^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k} l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k} l}{\sqrt{\lambda_k}} \big) - 1}{1 + \frac{1}{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{f}_k(t) := c_k \sin t, \quad t \in (0, +\infty), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{де} \;\; c_k := \frac{e^l\left(\cos\sqrt{\lambda_k}l - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}l}{\sqrt{\lambda_k}}\right) - 1}{1 + \frac{1}{\lambda_k}} H_k \,.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число, а $A : D(A) \to L_2(0,l)$ оператор, заданий за правилом (1),(2).

Треба
1) знайти ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A;
2) розвинути в ряд Фур'є за цією базою функції:
а) $\varphi(x)$, $x \in (0,l)$; б) $f(x,t)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$,
якщо

1. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 0, \;\beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \,|\, v(0) = 0,\; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = \cos 2x$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = (x+2)t^3$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

2. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \,|\, v'(0) = 0,\; v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A);$$

$\varphi(x) = 2x + 3$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = x^2(t+1)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

3. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \,|\, v'(0) - h_1 v(0) = 0,\; v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_1 — задане число;

$\varphi(x) = 3x + 2$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = e^x t^3$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

4. $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \,|\, v(0) = 0,\; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де h_2 — задане число;

$\varphi(x) = \sin 3x$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = (x+2)e^{2t}$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$;

5. $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -h_1, \alpha_1 = 1, \beta_1 = h_2$, тобто

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \,|\, v'(0) - h_1 v(0) = 0,\; v'(l) + h_2 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A),$$

де $h_1,\; h_2$ — задані числа;

$\varphi(x) = 2x - 1$, $x \in (0,l)$; $f(x,t) = x(t+3)$, $(x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty)$.