Практичне заняття № 5
Задача Коші для рівняння теплопровідності

Нехай n – довільне натуральне число, T – будь-яке додатне число або $+\infty$,

$$Q := \{(x,t) \,|\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n \times (0,T] - \quad \text{напіввідкритий шар,}$$
$$\overline{Q} := \{(x,t) \,|\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\} \equiv \mathbb{R}^n \times [0,T] - \quad \text{замикання } Q.$$

Припустимо, що

$$f \in C(Q), \qquad \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$$

– довільні функції.

Задача Коші для рівняння *теплопровідності*

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

полягає у знаходженні функції $u \in C^{2,1}(Q) \cap C_b(\overline{Q})$ (тобто u – функція, яка двічі неперервно диференційовна за змінними $x_1, ..., x_n$ і неперервно диференційовна за змінною t в Q та неперервна і обмежена на $\overline{Q}$), яка задовольняє поточково це рівняння і початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Функцію u називають *класичним розв'язком* задачі (1), (2).

Нагадаємо, що тут використано позначення

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \text{де} \;\; \Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad - \text{лапласіан.}$$

Зауважимо, що коли $f = 0$, то рівняння (1) називають однорідним, а якщо $f \neq 0$, то – неоднорідним.

Теорема 1. *Якщо φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^n$ функція, а f – неперервна і обмежена разом зі своїми похідними за змінними $x_1, \ldots, x_n$ до другого порядку включно на $\overline{Q}$, то існує обмежений класичний розв'язок задачі* (1), (2) *і він виражається формулою*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\, dy, \qquad (3)$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$, $t \in (0,T]$.

Формулу (3) називають *формулою Пуассона.*

Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 u_{xx} = 2t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Розв'язування. В нашому випадку $n = 1$ і тому розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \sin y \, dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} (2s) \, dy, \tag{6}$$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y = x + 2a\sqrt{t}z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t}\, dz\,.$$

Тоді

$$v(x,t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin(x + 2a\sqrt{t}z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sin x \, \cos(2a\sqrt{t}z)\ dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos x \, \sin(2a\sqrt{t}z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos(2a\sqrt{t}z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\cos(2a\sqrt{t}z)\,dz.$$

Тут враховано те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\sin(2a\sqrt{t}z)\,dz = 0.$$

Тепер використаємо відому формулу

$$J(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi = \sqrt{\pi}e^{-\beta^2/4}. \tag{7}$$

Отже, одержуємо

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin x\cdot J(2a\sqrt{t}) = e^{-a^2t}\sin x. \tag{8}$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (6):

$$w(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}(2s)\,dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{2s\,ds}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\,dy. \tag{9}$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y = x + 2a\sqrt{t-s}\,z \quad \Rightarrow \quad dy = 2a\sqrt{t-s}\,dz$$

і використавши рівність (див. (7)):

$$J(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\pi}. \tag{10}$$

У результаті отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}}\,dy = 2a\sqrt{t-s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = 2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-s}.$$

Підставимо отриманий вираз у (9):

$$w(x,t) := \int\limits_{0}^{t} 2s\,ds = t^2. \tag{11}$$

З (8) і (11) одержимо розв'язок вихідної задачі:

$$u(x,t) \equiv v(x,t) + w(x,t) = e^{-a^2 t}\sin x + t^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 2. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2\Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2\times(0,+\infty), \tag{12}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1\sin x_2, \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

Розв'язування. В даному випадку $n = 2$ і розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2 t}} y_1 \sin y_2 \, dy_1 dy_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \quad (14)$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t} z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\, dz_k, \quad k = 1, 2\,.$$

Тоді, врахувавши (10), отримаємо

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2 - z_2^2} (x_1 + 2a\sqrt{t} z_1) \sin(x_2 + 2a\sqrt{t} z_2)\, dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} (x_1 + 2a\sqrt{t} z_1)\, dz_1 \Big) \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2} \sin(x_2 + 2a\sqrt{t} z_2)\, dz_2 \Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \Big(\sqrt{\pi} x_1 + 2a\sqrt{t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} z_1\, dz_1 \Big) \Big(\sin x_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\, \cos(2a\sqrt{t} z_2)\, dz_2 +$$

$$+ \cos x_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\, \sin(2a\sqrt{t} z_2)\, dz_2 \Big).$$

Тепер врахуємо те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} z_1\, dz_1 = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2} \sin(2a\sqrt{t} z_2)\, dz_2 = 0,$$

та використаємо формулу (7). У результаті отримаємо

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi} x_1 \sin x_2 \cdot J(2a\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x_1 \sin x_2 \cdot \sqrt{\pi} e^{-a^2 t} = e^{-a^2 t} x_1 \sin x_2, \qquad (15)$$

$(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$. □

Приклад 3. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2 \Delta u = x_1 e^{-t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{16}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2 t}} y_1 y_2 \, dy_1 dy_2 +$$

$$+\frac{1}{4a^2\pi t} \int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} (y_1 e^{-s}) \, dy_1 dy_2, \tag{18}$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0,+\infty)$.

Для обчислення першого інтеграла зробимо в ньому заміну

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t} z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\, dz_k,\ k = \overline{1,2}\,.$$

Тоді

$$v(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}} y_1y_2\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2-z_2^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t}z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}(x_2+2a\sqrt{t}z_2)\,dz_2\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi}x_1+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}z_1\,dz_1)(\sqrt{\pi}x_2+2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}z_2\,dz_2) = x_1x_2. \qquad (19)$$

Тут враховано рівність (10) і те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}z\,dz = 0. \qquad (20)$$

Знайдемо другий інтеграл в правій частині формули (18):

$$w(x_1,x_2,t) := \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}}(y_1e^{-s})\,dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^t \frac{e^{-s}\,ds}{(t-s)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\,dy_1dy_2. \tag{21}$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл, зробивши заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t-s}\,z_k, \quad k = 1, 2,$$

і використавшши рівності (10) і (20):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2(t-s)}} y_1\,dy_1dy_2 =$$

$$= 4a^2(t-s)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}(x_1+2a\sqrt{t-s}\,z_1)\,dz_1\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\,dz_2\Big) =$$

$$= 4a^2(t-s)x_1(\sqrt{\pi})^2 = 4a^2\pi(t-s)x_1.$$

Підставимо отриманий вираз у (21):

$$w(x_1,x_2,t) = x_1\int\limits_0^t e^{-s}\,ds = x_1(1-e^{-t}). \tag{22}$$

З (19) і (22) одержимо розв'язок вихідної задачі

$$u(x_1,x_2,t) \equiv v(x_1,x_2,t) + w(x_1,x_2,t) = x_1x_2 + x_1(1-e^{-t}), \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 4. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_t - a^2\Delta u = 0, \quad (x,t) = (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty), \tag{23}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1 + \cos x_2, \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Розв'язування. Розв'язок даної задачі будемо шукати за формулою (3) у вигляді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4a^2t}}(y_1+\cos y_2)\,dy_1dy_2, \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty). \tag{25}$$

Для обчислення інтеграла зробимо в ньому заміну змінних

$$y_k = x_k + 2a\sqrt{t}z_k \quad \Rightarrow \quad dy_k = 2a\sqrt{t}\,dz_k, \quad k = 1,2\,.$$

Тоді

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2-z_2^2}\big[x_1 + 2a\sqrt{t}z_1 + \cos(x_2 + 2a\sqrt{t}z_2)\big]\,dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}\,dz_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\big[x_1 + 2a\sqrt{t}z_1 + \cos x_2\cos(2a\sqrt{t}z_2) - \sin x_2\sin(2a\sqrt{t}z_2)\big]\,dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2}\big[\sqrt{\pi}(x_1 + 2a\sqrt{t}z_1) + \cos x_2 \cdot \sqrt{\pi}e^{-a^2t}\big]\,dz_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi x_1 + \pi e^{-a^2 t}\cos x_2) = x_1 + e^{-a^2 t}\cos x_2.$$

Тут ми врахували те, що в силу непарності підінтегральної функції маємо рівності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} z_1\, dz_1 = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_2^2}\sin(2a\sqrt{t}z_2)\, dz_2 = 0,$$

та використали формулу (7). Отже,

$$u(x_1, x_2, t) = x_1 + e^{-a^2 t}\cos x_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

$\square$

Вправи для самостійної роботи

Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $u_t - a^2 \Delta u = 3t^2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$
$u\big|_{t=0} = \sin 2x_1 \sin 3x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
2. $u_t - a^2 u_{xx} = e^t, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$
$u\big|_{t=0} = x, \quad x \in \mathbb{R};$
3. $u_t - a^2 \Delta u = e^{-t}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$
$u\big|_{t=0} = x_1 \sin x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
4. $u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$
$u\big|_{t=0} = \sin x_1 + \cos x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$
5. $u_t - a^2 \Delta u = x_1 x_2 e^{-t}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = \cos x_1 \cos 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2;$

Відповіді:

1. $u(x_1, x_2, t) = e^{-13a^2t} \sin 2x_1 \sin 3x_2 + t^3$.
2. $u(x, t) = x_1 + (e^t - 1)$.
3. $u(x_1, x_2, t) = e^{-a^2t} x_1 \sin x_2 + (1 - e^{-t})$.
4. $u(x_1, x_2, t) = e^{-a^2t} (\sin x_1 + \cos x_2)$.
5. $u(x_1, x_2, t) = e^{-5a^2t} \cos x_1 \cos 2x_2 + x_1 x_2 (1 - e^{-t})$.