Практичне заняття № 4

Задача Коші для рівняння коливань

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n-ок $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, T – довільне додатне число або $+\infty$. Позначимо

$$Q := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad \overline{Q} := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\} = \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Розглянемо рівняння

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x,t) \;\Leftrightarrow\; u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

де $a > 0$, f – задані, відповідно, стала і неперервна функція, u – невідома функція і

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ – } \textbf{\textit{лапласіан}}, \quad \Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Зауважимо, що коли $n = 1$, то рівняння (1) є рівнянням поперечних коливань струни, коли $n = 2$ – рівнянням поперечних коливань мембрани, а коли $n = 3$ – рівнянням поширення звукових хвиль. Тому рівняння (1) називаємо *рівнянням коливань*.

Задача Коші для рівняння коливань (1): знайти функцію $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, яка поточково задовольняє рівняння (1) в Q і початкові умови

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де φ, ψ – задані неперервні функції.

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (1), (2).

Нагадаємо, що належність функції u до простору $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ означає, що функція u є двічі неперервно диференційовною по $x_1, ..., x_n$ і t в Q та неперервною на $\overline{Q}$ разом з похідними $u_t, u_{x_1}, ..., u_{x_n}$. Крім того, відмітимо, що через $C^{1,0}(\overline{Q})$ позначають простір, складений з функцій $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, які є неперервними на $\overline{Q}$ разом з похідними f_{x_i}, $i = \overline{1,n}$, а через $C^{2,0}(\overline{Q})$ – підпростір простору $C^{1,0}(\overline{Q})$, складений з тих функцій $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, для яких $f_{x_i x_j} \in C(\overline{Q})$, $i, j = \overline{1,n}$.

Розглянемо існування розв'язку задачі (1), (2) у випадках $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2)

1) у випадку $n = 3$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$ і виражається формулою Кірхгофа

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at} \varphi(y)\,dS_y\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at} \psi(y)\,dS_y +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dS_y\,, \quad (x,t) \in Q; \tag{3}$$

2) у випадку $n = 2$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Пуассона

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}}\,dy\right) + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\leqslant at} \frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}}\,dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2 - |y-x|^2}}\,dy\,, \quad (x,t) \in Q\,; \tag{4}$$

3) у випадку $n = 1$ існує при умові, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,, \quad (x,t) \in Q. \tag{5}$$

Тут прийнято такі позначення. У формулі (3) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки простору $\mathbb{R}^3$, $|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$ – відстань між точками y і x в $\mathbb{R}^3$, а інтеграл береться по сфері $\{y \,|\, |y - x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, dS_y – елемент площі цієї сфери. У формулі (4) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – точки площини $\mathbb{R}^2$, $|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками y і x, а інтеграл береться по кругу $\{y \,|\, |y - x| \leqslant at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, $dy = dy_1 dy_2$ – елемент площі круга. У формулі (5) x і y є точки прямої $\mathbb{R}$, а інтеграл береться по відрізку $[x - at, x + at]$.

Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння коливань

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (5) маємо

$$u(x,t) = \frac{(x+at)+(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy.$$

Обчислимо

$$\frac{(x+at)+(x-at)}{2} = x,$$

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y^2\,dy = \frac{1}{2a}\frac{y^3}{3}\Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2a}\frac{(x+at)^3-(x-at)^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{2at((x+at)^2+(x^2-a^2t^2)+(x-at)^2)}{3} = \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3}. \tag{6}$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = x + \frac{(3x^2+a^2t^2)t}{3}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

$\square$

Приклад 2. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (4) маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|y-x| \leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \, dy_1 dy_2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \tag{7}$$

Для обчислення інтегралу використаємо узагальнену полярну систему координат:

$$y_1 = x_1 + atr\cos\alpha, \; y_2 = x_2 + atr\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \; 0 < r \leq 1.$$

Легко переконатися, що $dy_1 dy_2 = a^2 t^2 r \, d\alpha dr$. Отож, маємо

$$J(x,t) := \iint\limits_{|y-x| \leqslant at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \, dy_1 dy_2 =$$

$$= a^2 t^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2 - (atr\cos\alpha)^2 - (atr\sin\alpha)^2}} r \, d\alpha dr =$$

$$= a^2 t^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr\cos\alpha)(x_2 + atr\sin\alpha)}{\sqrt{(at)^2 (1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) r^2)}} r \, d\alpha dr =$$

$$= at\int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\int\limits_0^{2\pi}(x_1x_2+atr(x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha)+a^2t^2r^2\cos\alpha\sin\alpha)\,d\alpha.$$

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha=0$, $\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha\,d\alpha=0$, $\int\limits_0^{\pi}\sin 2\alpha\,d\alpha=0$, отримаємо

$$J(x,t)=\iint\limits_{|y-x|\leqslant at}\frac{y_1y_2}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1dy_2 = at\int\limits_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\int\limits_0^{2\pi}x_1x_2\,d\alpha =$$

$$= -2\pi atx_1x_2\sqrt{1-r^2}\Big|_0^1 = 2\pi atx_1x_2.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}J(x,t)=\frac{1}{2\pi a}2\pi atx_1x_2 = tx_1x_2,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 3. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 0, \quad (x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$
$$u\big|_{t=0} = x_1 x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (3) маємо

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 \, dS_y\Big), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty). \tag{8}$$

Для обчислення інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = at\}$ на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at \sin\theta \cos\alpha, \ \ y_2 = x_2 + at \sin\theta \sin\alpha, \ \ y_3 = x_3 + at\cos\theta, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2 t^2 \sin\theta \, d\theta d\alpha$. Отож, маємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 \, dS_y = a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (x_1 + at\cos\alpha\sin\theta)(x_2 + at\sin\theta\sin\alpha)(x_3 + at\cos\theta)\sin\theta \, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \big(x_1 x_2 x_3 + at(x_2 x_3 \cos\alpha\sin\theta + x_1 x_3 \sin\theta\sin\alpha + x_1 x_2 \cos\theta) +$$

$$+a^2t^2(x_1 \sin\theta \sin\alpha \cos\theta + x_2 \cos\alpha \sin\theta \cos\theta + x_3 \cos\alpha \sin^2\theta \sin\alpha)+$$
$$+a^3t^3 \cos\alpha \sin^2\theta \sin\alpha \cos\theta\big) \sin\theta \, d\theta d\alpha =$$
$$= a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_2x_3 \sin\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_2x_3 \sin^2\theta \, d\theta+$$
$$+a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_3 \sin^2\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1x_2 \cos\theta \sin\theta \, d\theta+$$
$$+a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1 \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta + a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_2 \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta+$$
$$+a^4t^4 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_3 \sin^3\theta \, d\theta + a^5t^5 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha \cos\alpha d\alpha \int\limits_0^{\pi} \cos\theta \sin^3\theta \, d\theta.$$

Врахувавши, що $\int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin 2\alpha d\alpha = 0$, $\int\limits_0^{\pi} \sin 2\theta \, d\theta = 0$, отримаємо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1y_2y_3 \, dS_y = 4\pi a^2t^2 x_1x_2x_3.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}4\pi a^2 t^2 x_1x_2x_3\Big)=\frac{\partial}{\partial t}\Big(tx_1x_2x_3\Big)=x_1x_2x_3,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty).$$

$\square$

Приклад 4. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt}-a^2\sum_{i=1}^{3}u_{x_ix_i}=3t^2,\quad (x,t)=(x_1,x_2,x_3,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0}=x_1,\quad u_t\Big|_{t=0}=x_2+2x_3,\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Розв'язок шукаємо за формулою (3)

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}y_1\,dS_y\Big)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}(y_2+2y_3)\,dS_y+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)}3\tau^2dS_y. \tag{9}$$

Для обчислення перших двох інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y\in\mathbb{R}^3\,\big|\,|y-x|=at\}$ з центром в точці x і радіусом at на основі сферичної системи координат:

$$y_1=x_1+at\sin\theta\cos\alpha,\ y_2=x_2+at\sin\theta\sin\alpha,\ y_3=x_3+at\cos\theta,\qquad 0\leqslant\alpha<2\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2t^2 \sin\theta \, d\theta d\alpha$. Отож, знаходимо

$$\int\limits_{|y-x|=at} y_1 \, dS_y = a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_1 + at\cos\alpha\sin\theta) \sin\theta \, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} x_1 \sin\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha \sin\theta \, d\theta = 4\pi a^2t^2 x_1;$$

$$\int\limits_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3) dS_y = a^2t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} (x_2 + at\cos\alpha\sin\theta + 2x_3 + 2at\cos\theta) \sin\theta \, d\theta d\alpha =$$

$$= a^2t^2(x_2 + 2x_3) \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta + a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin\alpha \, d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta +$$

$$+ a^3t^3 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta \, d\theta = 4\pi a^2t^2(x_2 + 2x_3);$$

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y = \int\limits_0^t \frac{3\tau^2 d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^t 3\tau^2(t-\tau)\,d\tau = 4\pi a^2(t^4 - \frac{3}{4}t^4) = 4\pi a^2 \cdot \frac{1}{4}t^4 = \pi a^2 t^4.$$

Тут ми врахували, що інтеграл $\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y$ виражає площу сфери радіуса $a(t-\tau)$ і дорівнює $4\pi a^2(t-\tau)^2$. Відмітимо, що в загальному випадку для обчислення інтеграла $\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dS_y$ можна використати параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y-x| = a(t-\tau)\}$ (з центром x і радіусом at) вигляду

$$y_1 = x_1 + a(t-\tau)\sin\theta\cos\alpha,\ y_2 = x_2 + a(t-\tau)\sin\theta\sin\alpha,\ y_3 = x_3 + a(t-\tau)\cos\theta,$$

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2 x_1\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 4\pi a^2 t^2(x_2+2x_3) + \frac{1}{4\pi a^2}\cdot \pi a^2 t^4 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\big(tx_1\big) + t(x_2+2x_3) + \frac{1}{4}t^4 = x_1 + (x_2+2x_3)t + \frac{1}{4}t^4, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty).$$

□

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти розв'язки таких задач Коші

а) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

б) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = ax_1 + bt, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

в) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 2x_1 x_3 t, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = x_1 + x_2 x_3, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} - \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = (x_1 + x_2)t, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = x_1 x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x_1 + x_2, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

д) $u_{tt} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = x_3 t^2 + 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x_1 + x_2 + 7, \quad x \in \mathbb{R}^3;$

е) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = x^3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = 4, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$

є) $u_{tt} - a^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = x_1 x_3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0, +\infty),$

$u\big|_{t=0} = 4x_2, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x_3, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. Розв'язками яких задач є функції

$$\text{а) } u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} (3y_1 + y_2 + 2y_3)dS_y \ ?$$

$$\text{б) } u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} (y_1 + y_2 - y_3)dS_y \Big) \ ?$$

$$\text{в) } u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)} (y_1^2 + y_2 - 2y_3)\cos\tau \, dS_y \, , \ ?$$

Потрібно сформулювати задачі і переконатися, що ці функції є їх розв'язками.

Відповіді:

1. а) $u = x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2$;
б) $u = x_2 x_3 + (x_1 x_2 + x_3)t + axt^2/2 + bt^3/6$.