

Практичне заняття № 4

Задача Коші для рівняння коливань

Нехай $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n -ок $x = (x_1, \dots, x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, T – довільне додатне число або $+\infty$. Позначимо

$$Q := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq T\} = \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad \bar{Q} := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T\} = \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Розглянемо рівняння

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = f(x, t) \Leftrightarrow u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

де $a > 0$, f – задані, відповідно, стала і неперервна функція, u – невідома функція і

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \text{лапласіан}, \quad \Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Зауважимо, що коли $n = 1$, то рівняння (1) є рівнянням поперечних коливань струни, коли $n = 2$ – рівнянням поперечних коливань мембрани, а коли $n = 3$ – рівнянням поширення звукових хвиль. Тому рівняння (1) називаємо *рівнянням коливань*.

Задача Коші для рівняння коливань (1): знайти функцію $u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, яка поточково задовольняє рівняння (1) в Q і початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де φ, ψ – задані неперервні функції.

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (1), (2).

Нагадаємо, що належність функції u до простору $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ означає, що функція u є двічі неперервно диференційовною по x_1, \dots, x_n і t в Q та неперервною на \bar{Q} разом з похідними $u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$. Крім того, відмітимо, що через $C^{1,0}(\bar{Q})$ позначають простір, складений з функцій $f(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}$, які є неперервними на \bar{Q} разом з похідними f_{x_i} , $i = \bar{1}, n$, а через $C^{2,0}(\bar{Q})$ – підпростір простору $C^{1,0}(\bar{Q})$, складений з тих функцій $f \in C^{1,0}(\bar{Q})$, для яких $f_{x_i x_j} \in C(\bar{Q})$, $i, j = \bar{1}, n$.

Розглянемо існування розв'язку задачі (1), (2) у випадках $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

Теорема 1. *Розв'язок задачі (1), (2)*

1) у випадку $n = 3$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^{2,0}(\bar{Q})$ і виражається формулою Кірхгофа

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau) dS_y, \quad (x, t) \in Q; \quad (3)$$

2) у випадку $n = 2$ існує при умові, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^{2,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Пуассона

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x| \leq at} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x| \leq at} \frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}} dy + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|y-x| \leq a(t-\tau)} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2 - |y-x|^2}} dy, \quad (x, t) \in Q; \quad (4)$$

3) у випадку $n = 1$ існує при умові, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q})$, і виражається формулою Д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy, \quad (x, t) \in Q. \quad (5)$$

Тут прийнято такі позначення. У формулі (3) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки простору \mathbb{R}^3 , $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$ – відстань між точками y і x в \mathbb{R}^3 , а інтеграл береться по сфері $\{y \mid |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, dS_y – елемент площі цієї сфери. У формулі (4) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – точки площини \mathbb{R}^2 , $|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$ – відстань між точками y і x , а інтеграл береться по колу $\{y \mid |y-x| \leq at\}$ з центром в точці x і радіусом $at > 0$, $dy = dy_1 dy_2$ – елемент площі колу. У формулі (5) x і y є точки прямої \mathbb{R} , а інтеграл береться по відрізку $[x-at, x+at]$.

Приклади розв'язування задачі Коші для рівняння коливань

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (5) маємо

$$u(x, t) = \frac{(x+at) + (x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} y^2 dy.$$

Обчислимо

$$\frac{(x+at) + (x-at)}{2} = x, \\ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} y^2 dy = \frac{1}{2a} \frac{y^3}{3} \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2a} \frac{(x+at)^3 - (x-at)^3}{3} = \\ = \frac{1}{2a} \frac{2at((x+at)^2 + (x^2 - a^2t^2) + (x-at)^2)}{3} = \frac{(3x^2 + a^2t^2)t}{3}. \quad (6)$$

Отже, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x, t) = x + \frac{(3x^2 + a^2t^2)t}{3}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

□

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^2 u_{x_i x_i} = 0, \quad (x, t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (4) маємо

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{|y-x| \leq at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty). \quad (7)$$

Для обчислення інтегралу використаємо узагальнену полярну систему координат:

$$y_1 = x_1 + atr \cos \alpha, \quad y_2 = x_2 + atr \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 < r \leq 1.$$

Легко переконатися, що $dy_1 dy_2 = a^2 t^2 r d\alpha dr$. Отож, маємо

$$\begin{aligned} J(x, t) &:= \iint_{|y-x| \leq at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2 = \\ &= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr \cos \alpha)(x_2 + atr \sin \alpha)}{\sqrt{(at)^2 - (atr \cos \alpha)^2 - (atr \sin \alpha)^2}} r d\alpha dr = \\ &= a^2 t^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + atr \cos \alpha)(x_2 + atr \sin \alpha)}{\sqrt{(at)^2 (1 - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) r^2)}} r d\alpha dr = \\ &= at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr \int_0^{2\pi} (x_1 x_2 + atr(x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha) + a^2 t^2 r^2 \cos \alpha \sin \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Звідси, врахувавши, що $\int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0$, $\int_0^{\pi} \sin 2\alpha d\alpha = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \iint_{|y-x| \leq at} \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2 = at \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr \int_0^{2\pi} x_1 x_2 d\alpha = \\ &= -2\pi at x_1 x_2 \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^1 = 2\pi at x_1 x_2. \end{aligned}$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} J(x, t) = \frac{1}{2\pi a} 2\pi at x_1 x_2 = t x_1 x_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

□

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = 0, \quad (x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$

$$u|_{t=0} = x_1 x_2 x_3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (3) маємо

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 dS_y \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty). \quad (8)$$

Для обчислення інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x| = at\}$ на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at \sin \theta \cos \alpha, \quad y_2 = x_2 + at \sin \theta \sin \alpha, \quad y_3 = x_3 + at \cos \theta, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\alpha$. Отож, маємо

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 dS_y &= a^2 t^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x_1 + at \cos \alpha \sin \theta)(x_2 + at \sin \theta \sin \alpha)(x_3 + at \cos \theta) \sin \theta d\theta d\alpha = \\ &= a^2 t^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x_1 x_2 x_3 + at(x_2 x_3 \cos \alpha \sin \theta + x_1 x_3 \sin \theta \sin \alpha + x_1 x_2 \cos \theta) + \\ &\quad + a^2 t^2(x_1 \sin \theta \sin \alpha \cos \theta + x_2 \cos \alpha \sin \theta \cos \theta + x_3 \cos \alpha \sin^2 \theta \sin \alpha) + \\ &\quad + a^3 t^3 \cos \alpha \sin^2 \theta \sin \alpha \cos \theta) \sin \theta d\theta d\alpha = \\ &= a^2 t^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi x_1 x_2 x_3 \sin \theta d\theta + a^3 t^3 \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^\pi x_2 x_3 \sin^2 \theta d\theta + \\ &\quad + a^3 t^3 \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^\pi x_1 x_3 \sin^2 \theta d\theta + a^3 t^3 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi x_1 x_2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \\ &\quad + a^4 t^4 \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^\pi x_1 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta + a^4 t^4 \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^\pi x_2 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta + \\ &\quad + a^4 t^4 \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^\pi x_3 \sin^3 \theta d\theta + a^5 t^5 \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \alpha d\alpha \int_0^\pi \cos \theta \sin^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Враховавши, що $\int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin 2\alpha d\alpha = 0$, $\int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0$, отримаємо

$$\int_{|y-x|=at} y_1 y_2 y_3 dS_y = 4\pi a^2 t^2 x_1 x_2 x_3.$$

Отож, розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} 4\pi a^2 t^2 x_1 x_2 x_3 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (t x_1 x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty).$$

□

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = 3t^2, \quad (x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$

$$u|_{t=0} = x_1, \quad u_t|_{t=0} = x_2 + 2x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Розв'язування. Розв'язок шукаємо за формулою (3)

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} y_1 dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3) dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y. \quad (9)$$

Для обчислення перших двох інтегралів використаємо параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y-x| = at\}$ з центром в точці x і радіусом at на основі сферичної системи координат:

$$y_1 = x_1 + at \sin \theta \cos \alpha, \quad y_2 = x_2 + at \sin \theta \sin \alpha, \quad y_3 = x_3 + at \cos \theta, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Легко переконатися, що $dS_y = a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\alpha$. Отож, знаходимо

$$\int_{|y-x|=at} y_1 dS_y = a^2 t^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (x_1 + at \cos \alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} x_1 \sin \theta d\theta + a^3 t^3 \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi a^2 t^2 x_1;$$

$$\int_{|y-x|=at} (y_2 + 2y_3) dS_y = a^2 t^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (x_2 + at \cos \alpha \sin \theta + 2x_3 + 2at \cos \theta) \sin \theta d\theta d\alpha =$$

$$= a^2 t^2 (x_2 + 2x_3) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta + a^3 t^3 \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta +$$

$$+ a^3 t^3 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 4\pi a^2 t^2 (x_2 + 2x_3);$$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} 3\tau^2 dS_y = \int_0^t \frac{3\tau^2 d\tau}{t-\tau} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^t 3\tau^2 (t-\tau) d\tau = 4\pi a^2 (t^4 - \frac{3}{4}t^4) = 4\pi a^2 \cdot \frac{1}{4}t^4 = \pi a^2 t^4.$$

Тут ми врахували, що інтеграл $\int_{|y-x|=a(t-\tau)} dS_y$ виражає площу сфери радіуса $a(t-\tau)$ і дорівнює $4\pi a^2 (t-\tau)^2$. Відмітимо, що в загальному випадку для обчислення інтеграла

$\int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau) dS_y$ можна використати параметризацію сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y-x| = a(t-\tau)\}$ (з центром x і радіусом at) вигляду

$$y_1 = x_1 + a(t - \tau) \sin \theta \cos \alpha, \quad y_2 = x_2 + a(t - \tau) \sin \theta \sin \alpha, \quad y_3 = x_3 + a(t - \tau) \cos \theta,$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Отже, розв'язком вихідної задачі є функція

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \cdot 4\pi a^2 t^2 x_1 \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \cdot 4\pi a^2 t^2 (x_2 + 2x_3) + \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \pi a^2 t^4 = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (tx_1) + t(x_2 + 2x_3) + \frac{1}{4}t^4 = x_1 + (x_2 + 2x_3)t + \frac{1}{4}t^4, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty). \end{aligned}$$

□

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти розв'язки таких задач Коші

а) $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^2 u_{x_i x_i} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

б) $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = ax_1 + bt, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = x_2 x_3, \quad u_t|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

в) $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = 2x_1 x_3 t, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = x_1 + x_2 x_3, \quad u_t|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

г) $u_{tt} - \sum_{i=1}^2 u_{x_i x_i} = (x_1 + x_2)t, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = x_1 x_2, \quad u_t|_{t=0} = 2x_1 + x_2, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

д) $u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = x_3 t^2 + 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x_1 + x_2 + 7, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

е) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = x^3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = 4, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$$

є) $u_{tt} - a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = x_1 x_3 t^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, +\infty),$

$$u|_{t=0} = 4x_2, \quad u_t|_{t=0} = \sin x_3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Розв'язками яких задач є функції

$$\text{а) } u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} (3y_1 + y_2 + 2y_3) dS_y ?$$

$$\text{б) } u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} (y_1 + y_2 - y_3) dS_y \right) ?$$

$$\text{в) } u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} (y_1^2 + y_2 - 2y_3) \cos \tau dS_y, ?$$

Потрібно сформулювати задачі і переконатися, що ці функції є їх розв'язками.

Відповіді:

1. а) $u = x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2$;

б) $u = x_2 x_3 + (x_1 x_2 + x_3)t + axt^2/2 + bt^3/6$.