

Практичне заняття № 24  
Контрольна робота №7

Варіант № 1

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$ , потрібно

- 1) побудувати функцію Гріна,
- 2) отримати інтегральне зображення розв'язку,
- 3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 3x_2 + 1, & \text{коли } x_2 \in [-5, 5], \\ 0, & \text{коли } x_2 \notin [-5, 5]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 5t^4 u_{xx} + 2u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 3x, & \text{коли } x \in [-5, 9], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-5, 9]. \end{cases}$$

3. Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_{tt} - 16u_{xx} = 2x, \quad (x, t) \in (0, 5) \times (0, +\infty),$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=5} = \cos 2t, \quad t \in (0, +\infty),$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 5],$$

Варіант № 2

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$ , потрібно

- 1) побудувати функцію Гріна,
- 2) отримати інтегральне зображення розв'язку,
- 3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 5x_2, & \text{коли } x_2 \in [0, 8], \\ 0, & \text{коли } x_2 \notin [0, 8]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 5t^4 u_{xx} + 2u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 5x, & \text{коли } x \in [-6, 9], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-6, 9]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_t - 9u_{xx} = 5 \sin 2x, \quad (x, t) \in (0, 4) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = e^{2t}, \quad u \Big|_{x=4} = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 4].$$

### Варіант № 3

**1.** Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x_1=0} = \varphi(x_2, x_3), \quad (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2,$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 2x_3, & \text{коли } x_3 \in [-5, 8], \\ 0, & \text{коли } x_3 \notin [-5, 8]. \end{cases}$

**2.** Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 6t^5 u_{xx} + 3u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 5x, & \text{коли } x \in [-2, 10], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-2, 10]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 2x, \quad (x, t) \in (0, 6) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = \cos 2t, \quad u_x \Big|_{x=6} = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 6],$$

### Варіант № 4

**1.** Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x_2=0} = \varphi(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2,$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_2 > 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_1) := \begin{cases} 5x_1, & \text{коли } x_1 \in [-1, 8], \\ 0, & \text{коли } x_1 \notin [-1, 8]. \end{cases}$

**2.** Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 5t^4 u_{xx} + 2u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 5x, & \text{коли } x \in [-6, 11], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-6, 11]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_t - 25u_{xx} = 5 \sin 3x, \quad (x, t) \in (0, 5) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 2t, \quad u \Big|_{x=5} = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 4].$$

## Варіант № 5

**1.** Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 < 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_1) := \begin{cases} 3x_1 + 1, & \text{коли } x_1 \in [-5, 6], \\ 0, & \text{коли } x_1 \notin [-5, 6]. \end{cases}$

**2.** Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 3t^2 u_{xx} + 4u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 5x, & \text{коли } x \in [-4, 15], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-4, 15]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_{tt} - u_{xx} = 2x + 1, \quad (x, t) \in (0, 7) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0, \quad u_x \Big|_{x=7} = \cos 2t, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 7],$$

## Варіант № 6

1. Для задачі

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{x_1=0} &= \varphi(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$ , потрібно

- 1) побудувати функцію Гріна,
- 2) отримати інтегральне зображення розв'язку,
- 3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 5x_2 + 1, & \text{коли } x_2 \in [-5, 9], \\ 0, & \text{коли } x_2 \notin [-5, 9]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$\begin{aligned}u_t - 5t^4 u_{xx} + 6u &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x) &:= \begin{cases} 4x, & \text{коли } x \in [-5, 14], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-5, 14]. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$\begin{aligned}u_{tt} - 16u_{xx} &= 2x, \quad (x, t) \in (0, 6) \times (0, +\infty), \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=6} = \cos 4t, \quad t \in (0, +\infty), \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 6],\end{aligned}$$

## Варіант № 7

1. Для задачі

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{x_1=0} &= \varphi(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$ , потрібно

- 1) побудувати функцію Гріна,
- 2) отримати інтегральне зображення розв'язку,
- 3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 6x_2, & \text{коли } x_2 \in [0, 9], \\ 0, & \text{коли } x_2 \notin [0, 9]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$\begin{aligned}u_t - 5t^4 u_{xx} + 2u &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x) &:= \begin{cases} 6x, & \text{коли } x \in [-6, 15], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-6, 15]. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_t - 9u_{xx} = 5 \sin 3x, \quad (x, t) \in (0, 3) \times (0, +\infty),$$

$$\begin{aligned} u_x \Big|_{x=0} &= e^{2t}, & u \Big|_{x=3} &= 0, & t &\in (0, +\infty), \\ u \Big|_{t=0} &= 0, & u_t \Big|_{t=0} &= 0, & x &\in [0, 3]. \end{aligned}$$

## Варіант № 8

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u \Big|_{x_1=0} = \varphi(x_2, x_3), \quad (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2,$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_2) := \begin{cases} 5x_3 + 2, & \text{коли } x_3 \in [-3, 8], \\ 0, & \text{коли } x_3 \notin [-3, 8]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 6t^5 u_{xx} + 3u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 8x, & \text{коли } x \in [-2, 17], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-2, 17]. \end{cases}$$

3. Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 2x, \quad (x, t) \in (0, 6) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = \cos 2t, \quad u_x \Big|_{x=6} = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 6],$$

## Варіант № 9

1. Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u \Big|_{x_2=0} = \varphi(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2,$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_2 > 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_1) := \begin{cases} 5x_1, & \text{коли } x_1 \in [-1, 8], \\ 0, & \text{коли } x_1 \notin [-1, 8]. \end{cases}$

2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 5t^4 u_{xx} + 2u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 5x, & \text{коли } x \in [-6, 11], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-6, 11]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_t - 25u_{xx} = 5 \cos 3x, \quad (x, t) \in (0, 4) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 2t, \quad u \Big|_{x=4} = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 4].$$

## Варіант № 10

**1.** Для задачі

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

де  $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 < 0\}$ , потрібно

1) побудувати функцію Гріна,

2) отримати інтегральне зображення розв'язку,

3) знайти розв'язок, якщо  $\varphi(x_1) := \begin{cases} 3x_1 + 2, & \text{коли } x_1 \in [-3, 9], \\ 0, & \text{коли } x_1 \notin [-3, 9]. \end{cases}$

**2.** Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для параболічного рівняння:

$$u_t - 3t^2 u_{xx} + 4u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) := \begin{cases} 8x, & \text{коли } x \in [-3, 16], \\ 0, & \text{коли } x \notin [-3, 16]. \end{cases}$$

**3.** Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для гіперболічного рівняння:

$$u_{tt} - u_{xx} = 3x + 2, \quad (x, t) \in (0, 9) \times (0, +\infty),$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0, \quad u_x \Big|_{x=9} = \cos 2t, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 9],$$