Практичне заняття № 23

Розв'язування задач математичної фізики методом інтегрального перетворення Лапласа

1. Довідкова інформація

Розглянемо функційний простір $K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ складений з функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ таких, що

1) функція f є кусково-неперервною, тобто на кожному відрізку $[a,b]$ існує не більше, ніж скінченна кількість точок розриву, причому кожна з них є точкою розриву першого роду (t_0 - точка розриву першого роду для функції f, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{t\to t_0-0} f(t)=f(t_0-0)<\infty$ і $\lim\limits_{t\to t_0+0} f(t)=f(t_0+0)<\infty$),

2) $f(t)=0$ при $t<0$,

3) існують сталі $M\geqslant 0$ і α, для яких правильна нерівність

$$|f(t)|\leqslant Me^{\alpha t},\quad t\in[0;+\infty). \tag{1}$$

Для функції $f\in K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ визначають інтегральне перетворення Лапласа за правилом:

$$\mathcal{L}_{t\to p}f(t)=\widehat{f}(p):=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt,\ \ p:=\eta+i\xi\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}p:=\eta>\alpha, \tag{2}$$

де α — стала з нерівності (1).

Відомо, що функція $\widehat{f}:\Pi_\alpha\to\mathbb{C}$ є аналітичною на півплощині

$$\Pi_\alpha:=\{p\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}p>\alpha\},$$

і обернене перетворення визначене формулою Мелліна:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\widehat{f}(p):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\widehat{f}(p)e^{pt}dp,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

де $\alpha<\sigma$ — довільне фіксоване число.

Відмітимо, що для функції $g:[0,l]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ($l>0$ — яке-небудь фіксоване число) такої, що для кожного $x\in[0,l]$ функція $g(x,\cdot)$ належить простору $K(\mathbb{R};\mathbb{C})$, причому існують сталі $M\geqslant 0$ і α такі, що

$$|g(x,t)|\leqslant Me^{\alpha t},\quad t\in[0,+\infty),$$

можна визначити перетворення Лапласа за змінною t:

$$\mathcal{L}_{t\to p}g(x,t)=\widehat{g}(x,p):=\int\limits_0^{+\infty} g(x,t)e^{-tp}dt,\quad x\in[0,l],\quad p\in\Pi_\alpha.$$

Розглянемо ***метод інтегрального перетворення Лапласа для розв'язування задач математичної фізики***.

Нехай $l > 0$ — яке-небудь фіксоване число. Позначимо $Q := (0,l) \times (0,+\infty)$, $\overline{Q} := [0,l] \times [0,+\infty)$.

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{C}$ таку, що

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{4}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)\Big|_{x=0} = \mu_0(t), & t \in (0,+\infty), \\ (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)\Big|_{x=l} = \mu_1(t), & t \in (0,+\infty), \end{cases} \tag{5}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{6}$$

де $a > 0$, $f \in C(\overline{Q})$, $\mu_0, \mu_1 \in C([0,+\infty))$, $\varphi, \psi \in C([0,l])$, α_0, β_0, α_1, β_1 — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \geqslant 0$.

Будемо вважати, що існують сталі $M \geqslant 0$ і α такі, що

$$|f(x,t)| + |\mu_0(t)| + |\mu_1(t)| \leqslant M e^{\alpha t}, \quad x \in [0,l], \ t \in [0,+\infty),$$

і шукатимемо розв'язок $u \in C^2(\overline{Q})$ задачі (4) — (6) такий, що

$$|u(x,t)| + |u_t(x,t)| + |u_x(x,t)| + |u_{tt}(x,t)| + |u_{xx}(x,t)| \leqslant M e^{\alpha t}, \quad x \in [0,l], \ t \in [0,+\infty). \tag{7}$$

Для цього припустимо, що такий розв'язок існує і знайдемо його зображення за допомогою перетворення Лапласа. При цьому вважаємо, що

$$\mu_0(t) = \mu_1(t) = f(x,t) = u(x,t) = 0, \quad x \in [0,l], \ t \in (-\infty,0). \tag{8}$$

Підставимо розв'язок задачі в рівняння (4) і умови (5) та (6) і на отримані рівності подіємо перетворенням Лапласа:

$$\mathcal{L}_{t\to p}[u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t)] = \mathcal{L}_{t\to p} f(x,t),$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}[\alpha_0 u_x(0,t) + \beta_0 u(0,t)] = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t),$$
$$\mathcal{L}_{t\to p}[\alpha_1 u_x(l,t) + \beta_1 u(l,t)] = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t).$$

Позначимо

$$\widehat{u}(x,p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, u(x,t) \equiv \int\limits_0^{+\infty} u(x,t) e^{-tp} dt,$$

$$\widehat{f}(x,p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, f(x,t), \quad \widehat{\mu}_k(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\, \mu_k(t), \ \ k = 0,1.$$

На підставі властивостей перетворення Лапласа маємо

$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{tt}(x,t) = p^2\widehat{u}(x,p) - p u(x,0) - u_t(x,0) = p^2\widehat{u}(x,p) - p\varphi(x) - \psi(x), \quad x \in [0,l], \ p \in \Pi_\alpha,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{xx}(x,t) = (\mathcal{L}_{t\to p} u(x,t))_{xx} = \widehat{u}_{xx}(x,p), \quad x \in [0,l], \ p \in \Pi_\alpha.$$

Отже, зі сказаного випливає, що $\widehat{u}$ задовольняє рівності

$$p^2\widehat{u}(x,p) - a^2\widehat{u}_{xx}(x,p) = \widehat{f}(x,p) + p\varphi(x) + \psi(x), \ \ x \in (0,l), \ p \in \Pi_\alpha, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \widehat{u}_x(0,p) + \beta_0 \widehat{u}(0,p) = \widehat{\mu}_0(p), \\ \alpha_1 \widehat{u}_x(l,p) + \beta_1 \widehat{u}(l,p) = \widehat{\mu}_1(p), \end{cases} \quad p \in \Pi_\alpha. \tag{10}$$

Нехай $p \in \Pi_\alpha$ — довільне фіксоване. Позначимо

$$z(x) := \widehat{u}(x,p), \;\; h(x) := -\frac{\widehat{f}(x,p) + p\varphi(x) + \psi(x)}{a^2}, \;\; x \in [0,l],$$

$$\gamma_0 := \widehat{\mu}_0(p), \;\; \gamma_1 := \mu_1(p).$$

Після ділення рівності (9) на $(-a^2)$ стає очевидним, що функція z є розв'язком крайової задачі

$$z'' - \frac{p^2}{a^2} z = h(x), \quad x \in (0,l), \tag{11}$$

$$\alpha_0 z'(0) + \beta_0 z(0) = \gamma_0, \;\; \alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \gamma_1. \tag{12}$$

Оскільки (11) є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, то розв'язок задачі (11), (12) шукаємо так: спочатку знаходимо повний загальний розв'язок рівняння (11), він буде містити дві довільні сталі, а потім знайдемо ці сталі, задовольняючи умови (12). Повний загальний розв'язок рівняння (11) є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \frac{p^2}{a^2} z = 0 \tag{13}$$

і часткового розв'язку неоднорідного рівняння (11).

Оскільки рівняння (13) є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку записуємо і розв'язуємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mu_{1,2} = \pm \frac{p}{a}.$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$z = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x}, \quad x \in [0,l], \;\; C_1, \; C_2 \; \text{— довільні сталі.}$$

Далі знаходимо частковий розв'язок $\overset{*}{z}(x)$, $x \in [0,l]$, рівняння (11) і записуємо повний загальний розв'язок рівняння (11) у вигляді

$$z = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \overset{*}{z}(x), \quad x \in [0,l], \;\; C_1, \; C_2 \; \text{— довільні сталі.} \tag{14}$$

Підставляємо вираз (14) у крайові умови (12) і знаходимо значення C_1 і C_2, при яких формула (14) задає розв'язок задачі (11), (12).

Припустимо, що значення C_1, C_2 шукаються однозначно. Тоді знаходимо функцію $\widehat{u}(x,p)$, $x \in [0,l]$, $p \in \Pi_\alpha$, і розв'язок задачі (4) — (6) визначаємо за формулою

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}_{p \to t} \widehat{u}(x,p), \;\; (x,t) \in \overline{Q}.$$

2. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Знайти перетворення Лапласа функції*

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \textit{якщо } t \geqslant 0, \\ 0, & \textit{якщо } t < 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Маємо

$$\mathcal{L}_{t\to p} f(t) = \widehat{f}(p) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} e^{-tp} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+p)t} dt = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} e^{-(1+p)t} dt =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{1+p} e^{-(1+p)t}\Big|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{1+p}[e^{-(1+p)b} - 1] = \frac{1}{1+p}.$$

□

Приклад 2. *Розв'язати мішану задачу для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty), \tag{15}$$

$$u\Big|_{x=0} = \mu_0(t), \quad u\Big|_{x=l} = \mu_1(t), \;\; t \in (0,+\infty), \tag{16}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \;\; x \in [0,l], \tag{17}$$

методом інтегрального перетворення Лапласа.

Тут $l > 0$ — яке-небудь число, $\mu_k \in C([0,+\infty))$ і $|\mu_k(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$, $k = 0,1$, для деяких сталих $M \geqslant 0$, α.

Розв'язування. Припустимо, що розв'язок $u \in C^2(\overline{Q})$ задачі існує, причому виконується умова (7). Підставимо його в рівняння (15) та умови (16) і (17). У результаті отримаємо рівності

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty), \tag{18}$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_1(t), \qquad t \in (0,+\infty), \tag{19}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{20}$$

Подіємо на рівності (18) і (19) перетворенням Лапласа, використавши умови (20):

$$\mathcal{L}_{t\to p}[u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t)] = 0,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p} u(0,t) = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t), \;\; \mathcal{L}_{t\to p} u(l,t) = \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t).$$

Поклавши тут

$$\widehat{u}(x,p) := \mathcal{L}_{t\to p} u(x,t) \equiv \int\limits_0^{+\infty} u(x,t) e^{-tp} dt, \qquad p \in \Pi_\alpha,$$
$$\widehat{\mu}_0(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\mu_0(t), \;\; \widehat{\mu}_1(p) := \mathcal{L}_{t\to p}\mu_1(t), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$

та врахувавши, що

$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{tt}(x,t) = p^2 \widehat{u}(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) = p^2 \widehat{u}(x,p), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$
$$\mathcal{L}_{t\to p} u_{xx}(x,t) = (\mathcal{L}_{t\to p} u(x,t))_{xx} = \widehat{u}_{xx}(x,p), \qquad p \in \Pi_\alpha,$$

отримаємо умови на $\widehat{u}$:

$$p^2\widehat{u}(x,p) - a^2\widehat{u}(x,p) = 0, \qquad x \in [0,l], \quad p \in \Pi_\alpha, \tag{21}$$

$$\widehat{u}(0,p) = \widehat{\mu}_0(p), \quad \widehat{u}(l,p) = \widehat{\mu}_1(p). \tag{22}$$

Нехай $p \in \Pi_\alpha$ — довільне фіксоване. Позначимо

$$z(x) := \widehat{u}(x,p), \quad x \in [0,l], \quad \gamma_0 := \widehat{\mu}_0(p), \quad \gamma_1 := \widehat{\mu}_1(p).$$

Тоді з (21) і (22) (після ділення (21) на $(-a^2)$) випливає, що z є розв'язком крайової задачі

$$z'' - \frac{p^2}{a^2}z = 0, \tag{23}$$

$$z(0) = \gamma_0, \quad z(l) = \gamma_1. \tag{24}$$

Розв'яжемо цю задачу. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (23), яке є лінійним зі сталими коефіцієнтами. Запишемо його характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\mu^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\frac{p}{a}.$$

Звідси маємо повний загальний розв'язок рівняння (23):

$$z = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{\frac{p}{a}x}, \quad x \in [0,l], \quad C_1,\ C_2 - \text{довільні сталі}. \tag{25}$$

Підставимо вираз (25) в крайові умови (24):

$$\left.\begin{array}{c} z(0) = C_1 + C_2 = \gamma_0 \\ z(l) = C_1 e^{-\frac{p}{a}l} + C_2 e^{\frac{p}{a}l} = \gamma_1 \end{array}\right\} \tag{26}$$

Систему (26) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & e^{\frac{p}{a}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо її методом Крамера. Для цього знайдемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & e^{\frac{p}{a}l} \end{vmatrix} = e^{\frac{p}{a}l} - e^{-\frac{p}{a}l} = 2\sinh\frac{p}{a}l,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_0 & 1 \\ \gamma_1 & e^{\frac{p}{a}l} \end{vmatrix} = \gamma_0 e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_0 \\ e^{-\frac{p}{a}l} & \gamma_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 - \gamma_0 e^{-\frac{p}{a}l},$$

де $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ — синус гіперболічний.

Отож, маємо

$$C_1 = \frac{\gamma_0 e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1}{2\sinh\frac{p}{a}l}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_0 e^{-\frac{p}{a}l}}{2\sinh\frac{p}{a}l}.$$

Звідси і (25) отримуємо

$$z = [(\gamma_0 e^{\frac{p}{a}l} - \gamma_1)e^{-\frac{p}{a}x} + (\gamma_1 - \gamma_0 e^{-\frac{p}{a}l})e^{\frac{p}{a}x}](2\sinh\frac{p}{a}l)^{-1} \equiv [\gamma_0(e^{\frac{p}{a}(l-x)} - e^{-\frac{p}{a}(l-x)}) +$$
$$+ \gamma_1(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x})](2\sinh\frac{p}{a}l)^{-1} \equiv \gamma_0\frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \gamma_1\frac{\sinh\frac{p}{a}x}{\sinh\frac{p}{a}l},$$
$$x \in [0,l], \ p \in \Pi_\alpha.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}(x,p) = \widehat{\mu}_0(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \widehat{\mu}_1(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}(x)}{\sinh\frac{p}{a}l}, \quad x \in [0,l], \quad p \in \Pi_\alpha,$$

тобто

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\widehat{u}(x,p)e^{pt}dp \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\widehat{\mu}_0(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}(l-x)}{\sinh\frac{p}{a}l} + \widehat{\mu}_1(p)\frac{\sinh\frac{p}{a}x}{\sinh\frac{p}{a}l}\right]e^{pt}\,dp,$$
$$(x,t) \in \overline{Q},$$

де $\alpha < \sigma$ — яке-небудь фіксоване число. □

3. Вправи для самостійної роботи

Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішані задачі для рівняння коливання струни:

1.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty),$$
$$u\Big|_{x=0} = e^t, \quad u_x\Big|_{x=l} = \cos t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l],$$

2.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x, \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty),$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=l} = \cos 2t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 3, \quad u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l],$$

Методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності:

3.

$$u_t - a^2 u_{xx} = 3\sin x, \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,+\infty),$$
$$u_x\Big|_{x=0} = e^t, \quad u\Big|_{x=l} = t, \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$