Практичне заняття № 22

Розв'язування задач математичної фізики методом інтегральних перетворень Фур'є

1. Довідкова інформація

Розглянемо ***одновимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Нехай

$$S := \left\{ u \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,\Big|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^q |u^{(p)}(x)| < \infty \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N}\cup\{0\} \right\}$$

— простір Шварца швидкоспадних функцій.

Визначимо інтегральне перетворення Фур'є за правилом

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

для кожного $u \in S$.

Відомо, що $\mathcal{F} : S \to S$ — бієктивне відображення і обернене відображення визначене за правилом

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi x}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Через $L_2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ позначимо гільбертів простір, складений з (класів еквівалентних) вимірних функцій $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx < \infty$, зі скалярним добутком і нормою, відповідно,

$$(u, w) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \|u\| := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx \right)^{1/2},$$

де $\overline{z}$ — комплексно-спряжене до z число.

Відомо, що оператор $\mathcal{F} : S \to S$ можна розширити до оператора $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, причому для будь-якої функції $u \in L_2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ маємо $\mathcal{F}u = \widehat{u}$, де $\widehat{u} = \lim\limits_{R\to+\infty} \widehat{u}_R$, $\widehat{u}_R := \int_{-R}^{R} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$, $R > 0$, і границя береться в просторі $L_2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Властивості одновимірного перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S$ правильні рівності

$$\widehat{u^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\widehat{u}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-ix)^k u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

2°. Нехай $u, v \in S$ – довільні, а

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) v(x-y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

— згортка функцій u і v. Припустимо, що

$$\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x), \quad \widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)) = (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Тепер розглянемо ***багатовимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Для цього введемо ще такі позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Для будь-яких $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ покладемо $(x,\xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j$.

Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел. Через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (тут $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,n}$) позначаємо мультиіндекс, а через $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – його довжину.

Введемо ще такі позначення:

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n), \quad D_j := \frac{1}{i}\partial_j \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D := (D_1, \ldots, D_n).$$

Далі вважатимемо, що $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, а також $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} := (-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv (-i)^{|\alpha|}\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$,
$D^\alpha u := (-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}u$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Очевидно, що $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Введемо функційний простір

$$S := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^q |\partial^\alpha u(x)| < \infty \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Визначимо багатовимірні пряме та обернене інтегральні перетворення Фур'є

$$\mathcal{F} : S \to S, \quad \mathcal{F}^{-1} : S \to S$$

за правилами

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Властивості багатовимірного інтегрального перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S_n$ правильна рівність

$$\widehat{D^\alpha} u(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7}$$

$$D^\alpha \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-x)^\alpha u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{8}$$

2°. Нехай $u, v \in S_n$ – довільні, а $\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)$, $\widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)) = (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Тут і далі $u * v$ – згортка функцій u і v. Нагадаємо, що *згорткою* функцій u і v з S називають функцію $w \in S$, яка визначена за правилом:

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності:

$$u_t - a(t)u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T], \tag{11}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

де $\varphi \in S$.

Розв'язування. Подіємо перетворенням Фур'є на рівняння (11) і початкову умову (12), а точніше, помножимо рівності (11), (12) на $e^{-ix\xi}$ і проінтегруємо по x від $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-ix\xi}\,dx - a(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-ix\xi}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{u_t}(\xi,t) - a(t)\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{u|_{t=0}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Поклавши

$$\widehat{u}(\xi,t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$

отримаємо

$$\widehat{u_t}(\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx\Big)_t = \widehat{u}_t(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{15}$$

$$\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = (i\xi)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t). \tag{16}$$

Отож, для функції $\widehat{u}$ отримуємо задачу

$$\widehat{u}_t(\xi,t) + a(t)\xi^2\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{17}$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Цю задачу можна трактувати як задачу Коші для звичайного диференціального рівняння, а точніше, лінійного рівняння першого порядку, з незалежною змінною t і параметром ξ. Для цього замінимо в (17) символ t на s і домножимо отриману рівність для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $s \in (0,T]$ на $e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}$, де $\widetilde{a}(s) = \int\limits_0^s a(\tau)\,d\tau$, $s \in [0,T]$ (очевидно, що $\widetilde{a}$ – первісна a і $\widetilde{a}(0) = 0$):

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2} + a(s)\xi^2\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2} = \widehat{f}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R},\ s \in (0,T]. \tag{19}$$

Легко бачити, що

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}+a(s)\xi^2\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}=\Big(\widehat{u}(\xi,s)e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\Big)_s,\quad \xi\in\mathbb{R},\ s\in(0,T].$$

Звідси та з (19) здобуваємо

$$\Big(e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{u}(\xi,s)\Big)_s=e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{f}(\xi,s).$$

Проінтегруємо отриману рівність за s від 0 до t:

$$e^{\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{u}(\xi,t)-\widehat{u}(\xi,0)=\int\limits_0^t e^{\widetilde{a}(s)\xi^2}\widehat{f}(\xi,s)\,ds,\quad \xi\in\mathbb{R},\ t\in(0,T].$$

Звідки, врахувавши умову (18) і поділивши на $e^{\widetilde{a}(t)\xi^2}$, отримаємо

$$\widehat{u}(\xi,t)=e^{-\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi)+\int\limits_0^t e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}\widehat{f}(\xi,s),\quad \xi\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]. \tag{20}$$

Для знаходження розв'язку задачі (11), (12) нам потрібно здійснити обернене перетворення Фур'є функції $\widehat{u}$, заданій в (20), тобто

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in(0,T].$$

Тоді

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{-\widetilde{a}(t)\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi)\Big)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\int\limits_0^t e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}\widehat{f}(\xi,s)\,ds\Big),\quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]. \tag{21}$$

Відмітимо, що коли покласти

$$G(x,t,s):=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le s\le t\le T, \tag{22}$$

то (21) можна записати, використовуючи перетворення Фур'є згортки функцій, у вигляді

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(y)G(x-y,t,0)\,dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y,s)G(x-y,t,s)\,dyds,\quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]. \tag{23}$$

Функцію G називають *функцією Гріна задачі Коші для рівняння (11).*

Знайдемо вираз функції Гріна G. Для цього покажемо, що

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}e^{[\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}(t)]\xi^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}}e^{-\frac{x^2}{4[\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)]}},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T]. \tag{24}$$

Справді, зафіксувавши довільно вибрані значення t і s такі, що $0\leqslant s<t\leqslant T$, та ввівши позначення $b:=\widetilde{a}(t)-\widetilde{a}(s)>0$, отримаємо

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\,e^{-b\xi^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\xi^2}e^{i\xi x}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\xi^2+i\xi x}\,d\xi. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$-b\xi^2 + i\xi x = -b(\xi^2 - \frac{ix}{b}\xi) = -b\big((\xi - \frac{ix}{2b})^2 + \frac{x^2}{4b^2}\big) = -b(\xi - \frac{ix}{2b})^2 - \frac{x^2}{4b}.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2 + i\xi x}\, d\xi = e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b(\xi - \frac{ix}{2b})^2}\, d\xi = \Big[\eta = \sqrt{b}(\xi - \frac{ix}{2b}),\ d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{b}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Тут ми використали відому рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}$. Отож, маємо

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\, e^{-b\xi^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}.$$

З (25), врахувавши (26), матимемо (24), а отже, на підставі (22) отримаємо

$$G(x,t,s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}} e^{-\frac{x^2}{4[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}}, \quad -\infty < x + \infty,\ 0 \leqslant s < t \leqslant T.$$

Отож, розв'язком задачі (11), (12) є функція

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{2\sqrt{\pi \widetilde{a}(t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\widetilde{a}(t)}}\, dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} f(y,s) \frac{1}{2\sqrt{\pi[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4[\widetilde{a}(t) - \widetilde{a}(s)]}}\, dyds, \tag{27}$$

$x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T]$.

Приклад 2. Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{28}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

де $T > 0$; $a = \mathrm{const} > 0$; $\Delta = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j}$ – оператор Лапласа; $f \in C(\overline{Q})$, $f(\cdot,t) \in S$ для кожного $t \in [0,T]$; $\varphi \in S$.

Розв'язування. Подіємо перетворенням Фур'є на рівності (28) і (29):

$$\widehat{u_t}(\xi,t) - a^2 \widehat{\Delta u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{30}$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Легко переконатись у правильності таких рівностей

$$\widehat{u_t}(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t) e^{-i(x,\xi)}\, dx = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\, dx\Big)_t = \widehat{u}_t(\xi,t), \tag{32}$$

$$\widehat{\Delta u}(\xi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta u(x,t)e^{-i(x,\xi)}\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}e^{-i(x,\xi)}\,dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j}e^{-i(x,\xi)}\,dx=-\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\Big)\widehat{u}(\xi,t)=-|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t), \tag{33}$$

$\xi\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,T]$.

Отже, рівність (30) на підставі (32) і (33) можна записати так:

$$\widehat{u}_t(\xi,t)+a^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi,t),\qquad \xi\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,T], \tag{34}$$

де

$$\widehat{f}(\xi,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x,t)e^{-i(x,\xi)}\,dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T].$$

Звідси та з умови (31) знайдемо вираз $\widehat{u}$. Для цього замінимо в (34) символ t на s і домножимо отриману рівність для кожного $\xi\in\mathbb{R}^n$ і $s\in(0,T]$ на $e^{a^2|\xi|^2 s}$:

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}+a^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}=\widehat{f}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ s\in(0,T]. \tag{35}$$

Легко бачити, що

$$\widehat{u}_s(\xi,s)e^{\widetilde{a}(\xi)|\xi|^2}+a(s)|\xi|^2\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}=\Big(\widehat{u}(\xi,s)e^{a^2|\xi|^2 s}\Big)_s,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ s\in(0,T].$$

Звідси та з (35) здобуваємо

$$\Big(e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{u}(\xi,s)\Big)_s=e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{f}(\xi,s).$$

Проінтегруємо отриману рівність за s від 0 до t:

$$e^{a^2|\xi|^2 t}\widehat{u}(\xi,t)-\widehat{u}(\xi,0)=\int\limits_0^t e^{a^2|\xi|^2 s}\widehat{f}(\xi,s)\,ds,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,T].$$

Звідки, врахувавши умову (31) і поділивши на $e^{a^2|\xi|^2 t}$, отримаємо

$$\widehat{u}(\xi,t)=e^{-a^2|\xi|^2 t}\widehat{\varphi}(\xi)+\int\limits_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}\widehat{f}(\xi,s),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T]. \tag{36}$$

Для знаходження розв'язку задачі (28), (29) нам потрібно здійснити обернене перетворення Фур'є функції $\widehat{u}$, заданій в (36), тобто

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi,t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \ t\in(0,T].$$

Тоді

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{-a^2|\xi|^2 t}\widehat{\varphi}(\xi)\Big)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\int\limits_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}\widehat{f}(\xi,s)\Big), \tag{37}$$

$x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,T]$.

Відмітимо, що коли покласти

$$G(x,t,s) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} e^{-a^2|\xi|^2(t-s)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le s \le t \le T, \tag{38}$$

то (37) можна записати, використовуючи перетворення Фур'є згортки функцій, у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y) G(x-y,t,0)\, dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y,s) G(x-y,t,s)\, dyds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]. \tag{39}$$

Функцію G називають *функцією Гріна задачі Коші для рівняння (28)* і вона може бути записана у вигляді

$$G(x,t,s) := \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-s)}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant s < t \leqslant T. \tag{40}$$

Тоді розв'язок задачі (28) і (29) має вигляд

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-s)}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\, dyds, \tag{41}$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]$.

3. Вправи для самостійної роботи

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу Коші для рівнянь з частинними похідними:

1.

$$u_t - 2tu_{xx} + u_x = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.

$$u_t - 3t^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(x_1,x_2,t), \quad (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3.

$$u_t - 4t^3(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(x_1,x_2,x_3,t), \quad (x_1,x_2,x_3,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2,x_3), \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$