Практичне заняття № 21

Інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа

1. Довідкова інформація

1.1. Інтегральне перетворення Фур'є

Спочатку розглянемо ***одновимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Введемо в розгляд функційний простір

$$S = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,\Big|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^q |u^{(p)}(x)| < \infty \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Визначимо інтегральне перетворення Фур'є за правилом

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

для кожного $u \in S$.

Легко переконатися, що $\mathcal{F}_{x\to\xi} : S \to S$ — бієктивне відображення і обернене відображення визначене за правилом

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} \widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi x}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Властивості одновимірного перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S$ правильні рівності

$$\widehat{u^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\widehat{u}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-ix)^k u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

2°. Нехай $u, v \in S$ – довільні, а

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) v(x-y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-y) v(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

— згортка функцій u і v. Припустимо, що

$$\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x), \quad \widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \widehat{u}(\xi)\, \widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)) = (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Тепер розглянемо ***багатовимірне інтегральне перетворення Фур'є***. Для цього введемо ще такі позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Для будь-яких $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ покладемо $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \xi_j$. Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел. Через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (тут $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,n}$) позначаємо мультиіндекс, а через $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – його довжину. Введемо ще такі позначення: $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $D_j := \frac{1}{i}\partial_j \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D := (D_1, \ldots, D_n)$.

Далі вважатимемо, що $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, а також $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} := (-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv (-i)^{|\alpha|}\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}$,
$D^\alpha u := (-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}u$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Очевидно, що $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Введемо функційний простір

$$S := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^q |\partial^\alpha u(x)| < \infty \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Визначимо багатовимірні пряме та обернене інтегральні перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} : S \to S, \quad \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} : S \to S$$

за правилами

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}u(x) = \widehat{u}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{u}(\xi) = u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Властивості багатовимірного інтегрального перетворення Фур'є:

1°. Для будь-якої функції $u \in S_n$ правильна рівність

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7}$$

$$D^\alpha \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}((-x)^\alpha u(x)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{8}$$

2°. Нехай $u, v \in S_n$ – довільні, а $\widehat{u}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)$, $\widehat{v}(\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Тоді маємо рівності

$$(\widehat{u * v})(\xi) = \widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)) = (u * v)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Тут і далі $u * v$ – згортка функцій u і v. Нагадаємо, що *згорткою* функцій u і v з S називають функцію $w \in S$, яка визначена за правилом:

$$w(x) = (u * v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Покажемо, що

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} e^{b\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Розв'язування. Маємо

$$\mathcal{F}_{\xi\to x}\, e^{-b\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2} e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2 + i\xi x}\, d\xi. \tag{12}$$

Зауважимо, що

$$-b\xi^2 + i\xi x = -b(\xi^2 - \frac{ix}{b}\xi) = -b((\xi - \frac{ix}{2b})^2 + \frac{x^2}{4b^2}) = -b(\xi - \frac{ix}{2b})^2 - \frac{x^2}{4b}.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2 + i\xi x}\, d\xi = e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b(\xi - \frac{ix}{2b})^2}\, d\xi = \Big[\eta = \sqrt{t}(\xi - \frac{ix}{2b}),\ d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{b}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Тут ми використали відому рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}$.

3. Вправи для самостійної роботи

Знайти інтегральне перетворення Фур'є таких функцій:

1. $f(x) := e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$;

2. $f(x) := \begin{cases} 2x+1, & \text{якщо} \ \ x \in [-2;3], \\ 0, & \text{якщо} \ \ x \notin [-2;3]; \end{cases}$

3. $f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{якщо} \ \ x \in [0;\pi], \\ 0, & \text{якщо} \ \ x \notin [0;\pi]. \end{cases}$

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачі:

4. Знайти $u \in H^2(\mathbb{R})$ таке, що

$$u'' - 4u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $f(x) := \begin{cases} x, & \text{якщо} \ \ x \in [-1;1], \\ 0, & \text{якщо} \ \ x \notin [-1;1]. \end{cases}$

5. Знайти $u \in H^2(\mathbb{R})$ таке, що

$$u'' - 9u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $f(x) := \begin{cases} 3\cos 2x, & \text{якщо} \;\; x \in [-\pi/2; \pi/2], \\ 0, & \text{якщо} \;\; x \notin [-\pi/2; \pi/2]. \end{cases}$

Знайти інтегральне перетворення Лапласа таких функцій:

6. $f(t) := e^{-t}, \quad t \in [0, +\infty)$;

7. $f(t) := \begin{cases} t, & \text{якщо} \;\; t \in [0; 5], \\ 0, & \text{якщо} \;\; x \notin [0; 5]; \end{cases}$

8. $f(t) := \sin 3t, \quad t \in [0, +\infty)$.

Розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

9. $\begin{cases} u'' + u = \cos 2t, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 2; \end{cases}$

10. $\begin{cases} u'' - u = e^{2t}, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(0) = 2, \quad u'(0) = -1. \end{cases}$