Практичне заняття № 20

Розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $\Gamma := \partial\Omega$ – межа області Ω. Вважаємо, що $\Gamma \in C^1$ і $\nu_y = (\nu_{y,1}, ..., \nu_{y,n})$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ в точці $y \in \Gamma$.

Нагадаємо, що

$$\Delta u := u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} \quad -$$

дія оператора Лапласа на функцію $u \in C^2(\Omega)$. Також відмітимо, що функцію $u \in C^2(\Omega)$ називають *гармонічною*, якщо вона є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Задача Діріхле для рівняння Лапласа: знайти функцію $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, яка є розв'язком рівняння Лапласа (1) і задовольняє умову

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

де $\varphi \in C(\Gamma)$ — задана функція.

Зауважимо, що в деяких випадках, коли область Ω є необмеженою, для коректності задачі (1), (2) потрібно накладати певні обмеження на поведінку її розв'язку на нескінченності (умову регулярності).

Фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа називають функцію

$$E_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & \text{якщо } n = 2, \\ & \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \\ \dfrac{1}{\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{якщо } n > 2, \end{cases}$$

де ω_n — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$ (зокрема, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$), $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Звідси маємо

$$E_2(x) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

— *фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа* на площині,

$$E_3(x) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в (тривимірному) просторі.

Означення 1. ***Функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа*** *називають функцію*

$$G_n(x, y) := E_n(x - y) + g_n(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, \quad x \neq y, \tag{3}$$

де $g_n(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\setminus\{(x,x)\,|\,x\in\Gamma\}$, *така функція, що для кожного* $x\in\Omega$ *функція* $g_n(x,\cdot)$ *належить* $C^2(\overline{\Omega})$ *і є гармонічною в* Ω, *тобто*

$$\Delta_y g_n(x,y)=0,\quad y\in\Omega,$$

та задовольняє крайову умову

$$g_n(x,y)=-E_n(x-y),\quad y\in\Gamma,$$

тобто

$$G_n(x,y)|_{y\in\Gamma}=0.$$

Теорема 1. *Якщо функція* $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ *є розв'язком задачі Діріхле (1), (2), то вона має зображення*

$$u(x)=-\int\limits_\Gamma \frac{\partial G_n(x,y)}{\partial\nu_y}\,\varphi(y)\,dS_y,\quad x\in\Omega, \tag{4}$$

де G_n *— функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа.*

Підкреслимо, що теорема 1 говорить тільки про зображення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, але не гарантує, що по формулі (4) можна знайти цей розв'язок, коли відомо, що $\varphi\in C(\Gamma)$. Але ми можемо за формулою (4) обчислити функцію u, а потім перевірити, чи вона є розв'язком даної задачі.

Приклади розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна

Приклад 1. Для задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі:

$$\Delta u=0,\quad x\in\Omega, \tag{5}$$

$$u|_\Gamma=\varphi, \tag{6}$$

де
- $\Omega:=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2\}$ – куля радіуса $R>0$ з центром в початку координат,
- $\Gamma:=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2\}$ – сфера радіуса R з центром в початку координат,

потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) знайти інтегральне зображення розв'язку.

Розв'язування.

1) Функцію Гріна шукатимемо у вигляді

$$G_3(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}+g_3(x,y),\quad |x|\leqslant R,\ |y|\leqslant R,\ x\neq y, \tag{7}$$

де функція g_3 така, що для кожного x, $|x|<R$, маємо

$$\Delta_y g_3(x,y)=0,\ \text{якщо}\ \ |y|<R,\quad \text{і}\quad g_3(x,y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|},\ \text{якщо}\ \ |y|=R. \tag{8}$$

Спробуємо знайти вираз g_3 у випадку $0 < |x| < R$, $|y| \leqslant R$ у вигляді

$$g_3(x,y) = -\frac{a(x)}{4\pi|x^*-y|}, \tag{9}$$

де x^* – точка, яка симетрична до точки x відносно сфери Γ, тобто x^* – лежить на промені з початком в точці 0, який проходить через точку x, і $|x^*||x| = R^2$, тобто

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x, \tag{10}$$

а функція a вибирається за умови, щоби виконувалася крайова умова з (8), тобто

$$\frac{a(x)}{|x^*-y|} = \frac{1}{|x-y|}, \quad 0 < |x| < R, \quad |y| = R. \tag{11}$$

Легко бачити, що

$$\Delta_y \frac{a(x)}{|x^*-y|} = 0, \quad |y| < R, \;\; 0 < |x| < R, \quad \text{для довільної функції} \;\; a.$$

Очевидно, що із рівності (11) з врахуванням, що $|y| = R$, випливає такий ланцюжок рівностей

$$\begin{gathered} a(x)|x-y| = |x^*-y| \quad \Leftrightarrow \quad a^2(x)|x-y|^2 = |x^*-y|^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)(x-y, x-y) = (x^*-y, x^*-y) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)[|x|^2 - 2(x,y) + |y|^2] = |x^*|^2 - 2(x^*,y) + |y|^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a^2(x)[|x|^2 - 2(x,y) + R^2] = |x^*|^2 - 2(x^*,y) + R^2. \end{gathered} \tag{12}$$

Тут і далі через $(\cdot,\cdot)$ позначаємо скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$, тобто $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, де $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

На підставі (10) маємо

$$|x^*|^2 - 2(x^*,y) + R^2 = \frac{R^4}{|x|^2} - 2\frac{R^2}{|x|^2}(x,y) + R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}[R^2 - 2(x,y) + |x|^2].$$

Звідси та з (12) одержуємо $a^2(x) = \frac{R^2}{|x|^2}$, тобто

$$a(x) = \frac{R}{|x|}. \tag{13}$$

Отже, з (9) і (13) маємо

$$g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{|x||x^*-y|}, \quad \text{якщо} \;\; 0 < |x| \leqslant R, \; |y| \leqslant R, \quad x \neq y, \quad \text{коли} \; |x| = |y| = R.$$

Оскільки

$$|x||x^*-y| = |x||x^*|\left|\frac{x^*}{|x^*|} - \frac{y}{|x^*|}\right| \to R^2 \quad \text{при} \quad |x| \to 0,$$

то остаточно знаходимо

$$g_3(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{R}{|x||x^*-y|}, & \text{якщо} \;\; 0 < |x| \leqslant R, \\ & \qquad |y| \leqslant R, \; x \neq y, \; \text{коли} \; |x| = |y| = R. \\ -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R}, & \text{якщо} \;\; |x| = 0, \end{cases} \tag{14}$$

Отже, шукана функція Гріна має вигляд

$$G_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{1}{|x-y|} - \dfrac{R}{|x||x^*-y|}\Big), & \text{якщо } \ 0<|x|\leqslant R, \\ \dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{1}{|y|} - \dfrac{1}{R}\Big), & \text{якщо } \ |x|=0, \end{cases} \qquad |y|\leqslant R, \ x\neq y. \tag{15}$$

2) Нехай $0<|x|<R$, $|y|=R$. Знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x|}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|}\Big). \tag{16}$$

Використавши те, що $\nu_y = \frac{1}{R}y \equiv \frac{1}{R}(y_1,y_2,y_3)$ (бо точка y лежить на сфері з центром в початку координат і радіусом $R>0$) і

$$\frac{\partial w(y)}{\partial\nu_y} := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w(y)}{\partial y_i}\cdot\nu_{y,i} = (\nabla_y w(y),\nu_y),$$

де $\nu_y = (\nu_{y,1},\nu_{y,2},\nu_{y,3})$, $\nabla_y w(y) = (\frac{\partial w(y)}{\partial y_1},\frac{\partial w(y)}{\partial y_2},\frac{\partial w(y)}{\partial y_3})$, $y\in\mathbb{R}^3$, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|} = \Big(\nabla_y\frac{1}{|x-y|},\nu_y\Big) = -\frac{1}{|x-y|^2}(\nabla_y|x-y|,\frac{1}{R}y) =$$

$$= \frac{1}{R|x-y|^3}(x-y,y) = \frac{(x,y)-|y|^2}{R|x-y|^3} = \frac{(x,y)-R^2}{R|x-y|^3}, \tag{17}$$

бо $|y|=R$.

Аналогічно знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|} = \frac{(x^*,y)-R^2}{R|x^*-y|^3}, \tag{18}$$

З рівності (11), врахувавши (13), маємо

$$\frac{R}{|x||x^*-y|} = \frac{1}{|x-y|},$$

звідки

$$\frac{1}{|x^*-y|^3} = \frac{|x|^3}{R^3|x-y|^3}. \tag{19}$$

Врахувавши (10), отримаємо

$$(x^*,y)-R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}(x,y)-R^2 = \frac{R^2}{|x|^2}[(x,y)-|x|^2]. \tag{20}$$

Підставивши (19) і (20) в (18), здобудемо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x^*-y|} = \frac{|x|[(x,y)-|x|^2]}{R^2|x-y|^3}. \tag{21}$$

Тепер на підставі (17) і (21) з (16) отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(x,y) = \frac{1}{4\pi R}\Big(\frac{(x,y)-R^2}{|x-y|^3} - \frac{(x,y)-|x|^2}{|x-y|^3}\Big) = \frac{1}{4\pi R}\,\frac{|x|^2-R^2}{|x-y|^3}, \quad 0<|x|<R, \ |y|=R. \tag{22}$$

На підставі (15) легко знайти

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(0,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\Big(\frac{1}{|y|}-\frac{1}{R}\Big)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y|^2}(\nabla|y|,\frac{1}{R}y)=-\frac{1}{4\pi R}\frac{1}{|y|^3}(y,y)=-\frac{1}{4\pi R^2}.$$

Звідси та з (22) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(0,y)=\lim_{|x|\to 0}\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(x,y),$$

тобто формулу (22) можна використати і у випадку $x=0$.

Врахувавши формулу

$$u(x)=-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_3(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

для розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в тривимірній області, на підставі (22) отримаємо інтегральне зображення розв'язку задачі (5), (6):

$$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\varphi(y)\,dS_y,\quad |x|<R.$$

Цю формулу називають *формулою Пуассона* розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.

Приклад 2. Для задачі Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі:

$$\Delta u=0,\quad x\in\Omega, \tag{23}$$

$$u|_\Gamma=\varphi, \tag{24}$$

де
- $\Omega:=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_3>0\}$ – півпростір в $\mathbb{R}^3$,
- $\Gamma:=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_3=0\}$ – площина в $\mathbb{R}^3$,

потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) знайти інтегральне зображення розв'язку $u\in C^2(\Omega)\cap C_b(\overline{\Omega})$. якщо $\varphi\in C_b(\Gamma)$
3) розв'язати дану задачу, коли $\varphi(x)=2,\ x\in\Omega$.
Тут і далі під $C_b(G)$ розуміємо простір неперервних на $G\subset\mathbb{R}^3$ функцій.

Розв'язування.
1) Будемо використовувати взаємно однозначне відображення Γ на $\mathbb{R}^2$, визначене за правилом $(x_1,x_2,0)\to(x_1,x_2)=:x'$, і приймемо, що $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2,0)$. Також для зручності і лаконічності викладу домовимося, що $(x_1,x_2,x_3)=(x',x_3)$ і $(y_1,y_2,y_3)=(y',y_3)$, де, відповідно, $x'=(x_1,x_2)$ та $y'=(y_1,y_2)$.

Функцію Гріна шукатимемо у вигляді

$$G_3(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}+g_3(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega},\ x\neq y, \tag{25}$$

де функція g_3 така, що для кожного $x\in\Omega$ маємо

$$\Delta_y g_3(x,y)=0,\ \text{якщо}\ \ y\in\Omega,\quad \text{і}\quad g_3(x,y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|},\ \text{якщо}\ \ y\in\Gamma.$$

Запишемо g_3 у вигляді

$$g_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi|\widetilde{x}-y|} \equiv -E_3(\widetilde{x}-y), \quad x,y \in \overline{\Omega},\ y \neq x \in \Gamma, \tag{26}$$

$\widetilde{x} = (x', -x_3)$ – точка $\mathbb{R}^3$, яка симетрична до x відносно координатної площини Γ. Очевидно, що функція g_3 задовольняє потрібні умови.

Отже, зі сказанного вище випливає, що функція Гріна нашої задачі має вигляд

$$G_3(x,y) := \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|\widetilde{x}-y|}\Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{1/2}} - \frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{1/2}}\Big). \tag{27}$$

2) Для знаходження інтегрального зображення розв'язку даної задачі використаємо формулу (4), де $n=3$, а G_3 визначено в (27).

Оскільки $\nu_y = (0,0,-1)$, то

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial \nu_y}\Big|_{\Gamma} = -\frac{\partial G_0}{\partial y_3}(x,y)\Big|_{y_3=0}, \quad x \in \Omega. \tag{28}$$

Знайдемо при $x \neq y$:

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial y_3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\Big(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|\widetilde{x}-y|}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\Big(\frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{1/2}} - \frac{1}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{1/2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{x_3-y_3}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2)^{3/2}} + \frac{x_3+y_3}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3+y_3|^2)^{3/2}}\Big).$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial G_3(x,y)}{\partial \nu_y}\Big|_{y_3=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_3}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{3/2}}, \quad x \in \Omega,\ y' \in \mathbb{R}^2. \tag{29}$$

На підставі (4), (28) і (29) отримуємо інтегральне зображення розв'язку нашої задачі

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x_3\varphi(y_1,y_2)}{(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+x_3^2)^{3/2}}\,dy_1dy_2, \quad x \in \Omega. \tag{30}$$

3) Якщо $\varphi(x') = 2,\ x' \in \mathbb{R}^2$, то на підставі (30) маємо розв'язок у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{2x_3}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{3/2}}\,dy', \quad x \in \Omega. \tag{31}$$

Обчислимо цей розв'язок. Для цього зробимо в підінтегральному виразі заміну змінних:

$$y_1 = x_1 + \rho\cos\theta,\ y_2 = x_2 + \rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{32}$$

Тоді матимемо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{2x_3}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{3/2}}\,dy' = \frac{x_3}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+x_3^2)^{3/2}}\,d\theta =$$

$$= x_3\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\rho\,d\rho}{(\rho^2+x_3^2)^{3/2}} = -2x_3\frac{1}{(\rho^2+x_3^2)^{1/2}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = 2.$$

Отже, розв'язком задачі є функція $u(x) := 2,\ x\in\mathbb{R}^3$.

Вправи для самостійної роботи

1. Для задачі

$$\Delta u = 0,\quad x\in\Omega,\quad u|_{x_2=0} = \varphi(x_1),\quad x_1\in\mathbb{R},$$

де $\Omega := \{x=(x_1,x_2)\,|\,-\infty<x_1<+\infty,\ x_2>0\}$, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок, якщо

$$\varphi(x_1) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x_1|\leqslant R,\\ 0, & \text{якщо } |x_1|>R,\end{cases}$$

де $R>0$ – задане число.
4) знайти розв'язок, якщо

$$\varphi(x_1) := \frac{x_1}{x_1^2+1},\quad x_1\in\mathbb{R}.$$

2. Для задачі

$$\Delta u = 0,\quad x\in\Omega,\qquad u|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2),\ x_2>0,\quad u|_{x_2=0} = \varphi_2(x_1),\ x_1>0,$$

де $\Omega := \{x=(x_1,x_2)\,|\,x_1>0, x_2>0\}$, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок, якщо $\varphi_1(x_2)=1$, $x_2>0$, і $\varphi_2(x_1)=0$, $x_1>0$.

3. Для задачі

$$\Delta u = 0,\quad x\in\Omega,\quad u|_{x_1^2+x_2^2=R^2} = \varphi_1(x_1,x_2),$$

де $\Omega := \{x=(x_1,x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2<R^2\}$, $R>0$ – задане число, потрібно
1) побудувати функцію Гріна,
2) отримати інтрегральне зображення розв'язку,
3) знайти розв'язок при $\varphi(x_1,x_2)=2$, $x_1^2+x_2^2<R^2$.

4. Знайти значення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, заданого в кулі радіуса $R>0$, у точках діаметра, який з'єднує його північний ($\theta=0$) і південний ($\theta=\pi$) полюси при заданих крайових умовах:

$$u(r,\psi,\theta)\big|_{r=R} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ 0, & \text{якщо } \pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi,\end{cases}\quad 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi.$$

5. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області Ω, де
1) $\Omega := \{(x_1,x_2,x_3)\,|\,-\infty<x_1<+\infty,\ x_2>0,\ x_3>0\}$ – двогранний кут;
2) $\Omega := \{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2,\ x_3>0\}$ – півкуля.