Практичне заняття № 2

Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.

1.1.2. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними

Розглянемо майже лінійне рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \Phi(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{1}$$

Вважатимемо, що Ω – область в $\mathbb{R}^2$, $a, b, c \in C^1(\Omega)$, $|a| + |b| + |c| > 0$ на Ω.

Виявляється, що класифікація рівнянь вигляду (1) за типом залежить від значення виразу

$$\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

який називають дискримінантом рівняння (1).

Якщо або $\Delta(x,y) > 0$, або $\Delta(x,y) = 0$, або $\Delta(x,y) < 0$ у всіх точках (x,y) множини $\Omega_0 \subset \Omega$, то рівняння (1) є відповідно *гіперболічним* або *параболічним*, або *еліптичним* на Ω_0.

Виявляється, що для кожного типу рівняння (1) можна знайти таке перетворення незалежних змінних, яке приводить його до канонічного вигляду не тільки в окремо взятій точці області Ω, але і зразу в деякій підобласті Ω_0 області Ω, де рівняння зберігає тип.

Покажемо це. Спочатку зробимо таке загальне зауваження. Нехай (ξ,η) – нові незалежні змінні, які пов'язані з (x,y) співвідношеннями

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega_0,\ (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega_0}, \tag{2}$$

де $\xi,\ \eta\in C^2(\Omega_0)$, $\begin{vmatrix}\xi_x & \eta_x\\ \xi_y & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$ на Ω_0.

Виконаємо заміну змінних змінних (2) в рівнянні (1). Маємо

$$u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\widetilde{u}(\xi,\eta)=\widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y)),\quad (x,y)\in\Omega_0,\ (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega_0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&u_x=\widetilde{u}_\xi\,\xi_x+\widetilde{u}_\eta\,\eta_x,\\
&u_y=\widetilde{u}_\xi\,\xi_y+\widetilde{u}_\eta\,\eta_y,\\
&u_{xx}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_x)^2+2u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x+\widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_x)^2+\widetilde{u}_\xi\,\xi_{xx}+\widetilde{u}_\eta\,\eta_{xx},\\
&u_{xy}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y+\widetilde{u}_{\xi\eta}\,(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+\widetilde{u}_{\eta\eta}\,\eta_x\eta_y+\widetilde{u}_\xi\,\xi_{xy}+\widetilde{u}_\eta\,\eta_{xy},\\
&u_{yy}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\,(\xi_y)^2+2\widetilde{u}_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y+\widetilde{u}_{\eta\eta}\,(\eta_y)^2+\widetilde{u}_\xi\,\xi_{yy}+\widetilde{u}_\eta\,\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u в рівняння (1), отримаємо

$$\widetilde{a}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\xi}+2\widetilde{b}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\xi\eta}+\widetilde{c}(\xi,\eta)\,\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta)=0, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&\widetilde{a}=a\,(\xi_x)^2+2\,b\,\xi_x\,\xi_y+c\,(\xi_y)^2,\\
&\widetilde{b}=a\,\xi_x\,\eta_x+b\,(\xi_x\,\eta_y+\xi_y\,\eta_x)+c\,\xi_y\,\eta_y,\\
&\widetilde{c}=a\,(\eta_x)^2+2\,b\,\eta_x\,\eta_y+c\,(\eta_y)^2,
\end{aligned}$$

а $\Phi(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta)$ – об'єднання всіх членів, які не містять похідних другого порядку від $\widetilde{u}$.

Виявляється, що можна вибрати заміну змінних (9) залежно від знаку Δ таку, при якій рівняння (3) матиме канонічний вигляд в Ω_0. Для цього розглядаємо рівняння

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0, \tag{4}$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (1), а лінію, задану рівнянням

$$\omega(x,y) = C, \tag{5}$$

де C – довільна стала, а $\omega(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_0$, – перший інтеграл рівняння (4), називають *характеристикою* або *характеристичною лінією.*

Тепер вкажемо заміну незалежних змінних в рівнянні (1), при якій воно матиме канонічний вигляд в усій області Ω_0.

1) Нехай рівняння (1) *гіперболічне*, тобто $\Delta(x,y) > 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, і або $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, або $c(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$. Якщо $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, то рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо dy" і отримуємо сукупність рівнянь

$$dy = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}\, dx,$$

яка рівносильна рівнянню (4). Цю сукупність можна записати у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} a\,dy - (b + \sqrt{\Delta})dx = 0, \\ a\,dy - (b - \sqrt{\Delta})dx = 0. \end{array}\right.$$

Аналогічно, якщо $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, то рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння відносно dx" і отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} c\,dx - (b + \sqrt{\Delta})dy = 0, \\ c\,dx - (b - \sqrt{\Delta})dy = 0. \end{array}\right.$$

Нехай, для визначеності, $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо перші інтеграли кожного з цих рівнянь:

$$\omega_1(x, y) = C, \quad \omega_2(x, y) = C$$

і зробимо заміну змінних

$$\xi = \omega_1(x, y), \quad \eta = \omega_2(x, y).$$

Тоді в рівнянні (3) маємо $\widetilde{a}(\xi, \eta) = 0$, $\widetilde{c}(\xi, \eta) = 0$, $\widetilde{b}(\xi, \eta) \neq 0$ для всіх $(\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{b}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0. \tag{6}$$

Додаткова заміна $\xi = \alpha - \beta$, $\eta = \alpha + \beta$ зводить отримане рівняння до рівняння

$$\widehat{u}_{\alpha\alpha} - \widehat{u}_{\beta\beta} + \widehat{\Phi}(\alpha, \beta, \widehat{u}, \widehat{u}_\alpha, \widehat{u}_\beta) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння гіперболічного типу згідно з класифікацією, даною у попередньому пункті. Але у випадку двох незалежних змінних *канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу* частіше називають рівняння (6).

2) Нехай рівняння (1) *параболічне*, тобто $\Delta(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, і або $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, або $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$. Тоді, якщо $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, то розв'язуючи рівняння (4) як "квадратне рівняння відносно dy"отримаємо рівносильне йому рівняння

$$a\, dy - b\, dx = 0.$$

Аналогічно, якщо $c(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, то, розв'язуючи рівняння (4) як "квадратне рівняння відносно dx" , отримуємо рівносильне рівнянню (4) рівняння

$$c\, dx - b\, dy = 0.$$

Нехай (для визначеності) $a(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, і маємо перше рівняння. Знайдемо перший інтеграл цього рівняння

$$\omega(x, y) = C.$$

Зробимо заміну змінних

$$\xi = \omega(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де η – довільна неперервно диференційовна функція така, що $\begin{vmatrix} \omega_x & \eta_x \\ \omega_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ на Ω_0, тобто функції η і ω є незалежними. Тоді маємо $\widetilde{a}(\xi, \eta) = 0$, $\widetilde{b}(\xi, \eta) = 0$ і $\widetilde{c}(\xi, \eta) \neq 0$ для всіх $(\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_0$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{c}$, прийдемо до рівняння

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння параболічного типу.

3) Нехай рівняння (1) *еліптичне*, тобто $\Delta(x,y) < 0,\ (x,y) \in \Omega_0$. Тоді рівняння (4) рівносильне сукупності комплексно спряжених рівнянь

$$a\,dy - (b \pm i\sqrt{-\Delta})\,dx = 0,$$

якщо $a(x,y) \neq 0$ (рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне рівняння щодо dy"), або

$$c\,dx - (b \pm i\sqrt{-\Delta})\,dy = 0,$$

якщо $c(x,y) \neq 0,\ (x,y) \in \Omega_0$, (рівняння (4) розв'язуємо як "квадратне відносно dx").

Нехай, для визначеності, $a(x,y) \neq 0, (x,y) \in \Omega_0$, і маємо першу сукупність рівнянь. Знайдемо їх перші інтеграли:

$$\omega_1(x,y) \pm i\omega_2(x,y) = C$$

(вони є комплексно спряженими). Тоді виберемо заміну змінних

$$\xi = \omega_1(x,y), \quad \eta = \omega_2(x,y) \quad (\text{або} \quad \eta = -\omega_2(x,y)).$$

У результаті в рівнянні (4) матимемо $\widetilde{a}(\xi,\eta) = \widetilde{c}(\xi,\eta) \neq 0$ і $\widetilde{b}(\xi,\eta) = 0$ для всіх $(\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega_0}$. Отже, поділивши рівняння (3) на $\widetilde{a}(\xi,\eta) = \widetilde{c}(\xi,\eta)$, отримаємо рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{\Phi}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0.$$

Це є *канонічний вигляд* рівняння еліптичного типу.

Висновок. Щоб звести рівняння (1) до канонічного вигляду, потрібно виконати такі операції:

- складасти дискримінант Δ і визначити тип рівняння;
- скласти характеристичне рівняння і знайти його перші інтеграли;
- виконати відповідне перетворення незалежних змінних.

Приклад 1.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + u_x - 2u_y = x \sin y.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}\,.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 + 5\,dx\,dy + 6\,dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy", отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -3\,dx, \qquad dy = -2\,dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$y + 3x = C, \qquad y + 2x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних
$$\xi = y + 3x, \qquad \eta = y + 2x.$$
Оскільки $u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, то

$$\begin{array}{rl}
1| & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 3 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2, \\
-2| & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1| & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 9 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 12 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
-5| & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 5 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 2, \\
6| & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [9 - 15 + 6] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [12 - 25 + 12] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [4 - 10 + 6] + \widetilde{u}_\xi \cdot [3 - 2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [2 - 2] = x \sin y.$$

Звідси, врахувавши, що згідно з нашою заміною

$$y = 3\eta - 2\xi, \quad x = \xi - \eta,$$

одержимо
$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_\xi = (\eta - \xi) \cdot \sin(3\eta - 2\xi)$$
– канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 2.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} - 3x^2u_{yy} + 4xu_x + 12x^2u_y = 0, \quad x > 0.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = x^2 + 3x^2 = 4x^2, \quad x > 0.$$

Звідси, зокрема, випливає, що дане рівняння є гіперболічного типу. Зведемо його до канонічного вигляду. Для цього запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2x\,dxdy - 3x^2dx^2 = 0.$$

Розв'яжемо його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = (x \pm 2x)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + xdx = 0 \quad \text{або} \quad dy - 3xdx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли отриманих рівнянь:

$$\frac{x^2}{2} + y = C, \quad \frac{3}{2}x^2 - y = C.$$

Отже, заміна змінних має вигляд

$$\xi = \frac{x^2}{2} + y, \quad \eta = \frac{3x^2}{2} - y.$$

Тоді $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, і похідні функції u виражаються через похідні функції $\widetilde{u}$ так:

$$\begin{aligned}
4x \ \ | \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot x + \widetilde{u}_\eta \cdot 3x,\\
12x^2 \ \ | \quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1),\\
1\,| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 6x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 9x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \cdot\widetilde{u}_\eta \cdot 3,\\
2x\,| \quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot x + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-3x),\\
-3x^2| \quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставляємо вирази похідних в задане рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x^2 + 2x^2 - 3x^2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [6x^2 + 4x^2 + 6x^2] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [9x^2 - 6x^2 - 3x^2] +$$

$$+\widetilde{u}_\xi \cdot [4x^2 + 12x^2] + \widetilde{u}_\eta \cdot [12x^2 - 12x^2] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$16x^2\,\widetilde{u}_{\xi\eta} + (16x^2+1)\,\widetilde{u}_\xi + 3\,\widetilde{u}_\eta = 0.$$

Звідси, оскільки $2x^2 = \xi + \eta$, маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{8(\xi+\eta)+1}{8(\xi+\eta)}\widetilde{u}_\xi + \frac{3}{8(\xi+\eta)}\widetilde{u}_\eta = 0$$

– рівняння канонічного вигляду.

Приклад 3.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$e^{2y}u_{xx} - 2xe^{y}u_{xy} + x^2u_{yy} - x^2u_y = x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант

$$\Delta = x^2e^{2y} - x^2e^{2y} = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то дане рівняння є параболічним. Запишемо характеристичне рівняння

$$e^{2y}dy^2 + 2xe^{y}dx\,dy + x^2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння щодо dy", отримаємо рівняння

$$dy = -x \cdot e^{-y}dx \quad \Longleftrightarrow \quad e^{y}dy + x\,dx = 0.$$

Звідси отримаємо перший інтеграл

$$2e^{y} + x^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2e^{y} + x^2, \qquad \eta = x.$$

Оскільки $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то маємо

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\ -\,x^2 & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^y, \\ e^{2y} & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 4x + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_\xi, \cdot 2 \\ -\,2xe^y & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4xe^y + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2e^y, \\ x^2 & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4e^{2y} + \widetilde{u}_\xi \cdot 2e^y. \end{array}$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\widetilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [4x^2e^{2y} - 8x^2e^{2y} + 4x^2e^{2y}] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [4xe^{2y} - 4xe^{2y}] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [e^{2y}] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [-2x^2e^y + 2e^{2y} + 2x^2e^y] + \widetilde{u}_\eta \cdot 0 = 0.$$

Врахувавши, що згідно з нашою заміною $x = \eta$, одержимо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_\xi = \eta.$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 4.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} + y u_y = 0.$$

Розв'язування. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = y^2 - y^2 = 0.$$

Отже, дане рівняння має параболічний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$y^2 dy^2 - 2ydxdy + dx^2 = 0 \Leftrightarrow (ydy - dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$ydy - dx = 0.$$

Знаходимо перший інтеграл:

$$\frac{y^2}{2} - x = C$$

і в даному рівняння робимо заміну змінних:

$$\xi = \frac{y^2}{2}, \quad \eta = y,$$

оскільки

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Маємо $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$. Виразимо похідні функцій u через похідні функцій $\widetilde{u}$:

$$\begin{aligned}
&0\cdot \big| u_x = \widetilde{u}_\xi\cdot(-1),\\
&y\cdot \big| u_y = \widetilde{u}_\xi\cdot y + \widetilde{u}_\eta\cdot 1,\\
&y^2\cdot \big| u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot(-1)^2,\\
&2y\cdot \big| u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot(-y) + \widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot(-1),\\
&1\cdot \big| u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot y^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot 2y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot 1 + \widetilde{u}_\xi\cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо ці вирази у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot\big[-2y^2+y^2+y^2\big] + \widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot\big[-2y+2y\big] + \widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot\big[1\big] + \widetilde{u}_\xi\cdot\big[y^2+1\big] + \widetilde{u}_\eta\cdot\big[y\big] = 0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + (\eta^2+1)\widetilde{u}_\xi + \eta\widetilde{u}_\eta = 0$$

– канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 5.

Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2+1)u_{yy} + xu_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x,y) = x^2 - 1 \cdot (x^2+1) = -1.$$

Оскільки $\Delta(x,y) < 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (7) має еліптичний тип. Запишемо його характеристичне рівняння

$$dy^2 - 2xdxdy + (x^2+1)dx^2 = 0\,.$$

Розв'язуючи його як "квадратичне рівняння відносно dy ", отримаємо

$$dy = (x \pm i)dx,$$

звідки

$$y - \frac{x^2}{2} \mp i\,x = C.$$

Отже, заміну змінних в рівнянні (7) беремо у вигляді

$$\xi = y - \frac{x^2}{2}, \quad \eta = x.$$

Оскільки $u(x,y) = \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то і маємо

$$\begin{aligned}
0| \quad & u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-x) + \tilde{u}_\eta \cdot 1\,, \\
0| \quad & u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1, \\
x| \quad & u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x^2) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2x) + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1 + \tilde{u}_\eta \cdot (-1)\,, \\
2x| \quad & u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-x) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1\,, \\
(x^2+1)| \quad & u_{yy} = \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1\,.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази похідних у рівняння (7). Отримаємо

$$\tilde{u}_{\xi\xi}[x^2 - 2x^2 + x^2 + 1] + \tilde{u}_{\xi\eta}[-2x + 2x] + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \tilde{u}_\xi \cdot [x-1] + \tilde{u}_\eta \cdot [0] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + (\eta - 1)\tilde{u}_\xi = 0$$

– канонічний вигляд рівняння (7). □

Приклад 6.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Розв'язування. Обчислимо дискримінант рівняння

$$\Delta = x^2y^2 - 2x^2y^2 = -x^2y^2.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то дане рівняння є еліптичним. Запишемо характеристичне рівняння

$$y^2 dy^2 - 2xy\, dx\, dy + 2x^2 dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох комплексно спряжених рівнянь

$$dy = \frac{xy \pm ixy}{y^2}\, dx.$$

Після спрощення отримаємо

$$ydy = xdx \pm ixdx.$$

Перший інтеграл цього рівняння

$$x^2 - y^2 \pm ix^2 = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = x^2, \qquad \eta = x^2 - y^2.$$

Обчислимо похідні

$$
\begin{aligned}
0\,| \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 2x + \widetilde{u}_\eta \cdot 2x, \\
y\,| \quad & u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot (-2y), \\
y^2\,| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 8x^2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + \widetilde{u}_\xi \cdot 2 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2, \\
2xy\,| \quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-4xy) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-4xy), \\
2x^2\,| \quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + \widetilde{u}_\eta \cdot (-2).
\end{aligned}
$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння і врахувавши, що згідно з нашою заміною $x^2 = \xi$, $y^2 = \xi - \eta$, одержимо

$$
\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}\,\widetilde{u}_\xi + \frac{1}{2(\eta - \xi)}\,\widetilde{u}_\eta = 0.
$$

Це є канонічний вигляд даного рівняння. □

Приклад 7.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$
xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
$$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$
\Delta(x, y) = x^2 - x(x-1) = x.
$$

Звідси випливає, що дане рівняння, залежно від значення x, є таких типів:
1) якщо $x = 0$, тобто $\Delta = 0$, то рівняння параболічного типу,

2) якщо $x > 0$, тобто $\Delta > 0$, то рівняння гіперболічного типу,
3) якщо $x < 0$, тобто $\Delta < 0$, то рівняння еліптичного типу.

Розглянемо кожний випадок окремо. У випадку 1), тобто на множині $\{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$, рівняння має такий канонічний вигляд:

$$u_{yy} = 0.$$

У випадку 2), тобто на множині $\{(x, y) \,|\, x > 0\}$, рівняння характеристик має вигляд

$$xdy^2 - 2xdxdy + (x-1)dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy":

$$dy = \frac{x \pm \sqrt{x}}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = (1 - \frac{1}{\sqrt{x}})dx \;\vee\; dy = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$y - x - 2\sqrt{x} = C_1, \quad y - x + 2\sqrt{x} = C_2.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних:

$$\xi = y - x - 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x + 2\sqrt{x}.$$

Тоді $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$ і

$$\begin{aligned}
0 \;&|\; u_x = \widetilde{u}_\xi(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_\eta(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}),\\
0 \;&|\; u_y = \widetilde{u}_\xi 1 + \widetilde{u}_\eta 1,\\
x \;&|\; u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}})(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 +\\
&\quad + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\xi - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\widetilde{u}_\eta,\\
2x \;&|\; u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\xi\eta}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \equiv\\
&\quad \equiv \widetilde{u}_{\xi\xi}(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + \widetilde{u}_{\xi\eta}(-2) + \widetilde{u}_{\eta\eta}(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}),\\
(x-1) \;&|\; u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази в рівняння (2), отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot \big[x(1 - \frac{1}{x})^2 + 2x(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) + x - 1\big] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot \big[x(1 - \frac{1}{x}) + (-2)2x + 2(x-1)\big] +$$

$$+\widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot \big[x(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2x(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) + (x-1)1\big] +$$

$$+\widetilde{u}_\xi \cdot \big[x\frac{1}{2x\sqrt{x}}\big] + \widetilde{u}_\eta \cdot \big[x(-\frac{1}{2x\sqrt{x}})\big] = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{u}_\xi \cdot \big[-x-3\big] + \widetilde{u}_\xi \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \widetilde{u}_\eta \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Оскільки $x = (\frac{\eta-\xi}{2})^2$, то маємо канонічний вигляд нашого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{2}{\eta-\xi}\frac{16}{(\eta-\xi)^2+8}(\widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta) = 0$$

Розглянемо випадок 3), тобто коли $x < 0$. Тоді характеристичне рівняння можна записати у вигляді сукупності рівнянь

$$dy = \frac{x \pm i\sqrt{-x}}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = \left(1 \pm i\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)dx\,,$$

і отримати такі перші інтеграли:

$$y - x \pm i \cdot 2\sqrt{-x} = C.$$

Отже, для зведення рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x}. \end{cases}$$

Оскільки $u(x,y) = \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, то

$$
\begin{aligned}
&0 \mid \quad u_x = \tilde{u}_\xi \cdot (-1) + \tilde{u}_\eta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right) ,\\
&0 \mid \quad u_y = \tilde{u}_\xi \cdot 1 ,\\
&x \mid \quad u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}} + \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{-x}}\right)^2 + \tilde{u}_\eta \cdot \frac{1}{2x\sqrt{-x}} ,\\
&2x \mid \quad u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1) + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right) ,\\
&(x-1) \mid \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1^2 .
\end{aligned}
$$

Підставимо вирази похідних u через похідні $\tilde{u}$ в рівняння:

$$
\tilde{u}_{\xi\xi} \cdot [x - 2x + x - 1] + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot \left[2x\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x\frac{1}{\sqrt{-x}}\right] +
$$

$$
+\tilde{u}_{\eta\eta}\left[\frac{1}{-x} \cdot x\right] + \tilde{u}_\xi \cdot [0] + \tilde{u}_\eta \left[x\frac{1}{2x\sqrt{-x}}\right] = 0 \Leftrightarrow -\tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\tilde{u}_\eta = 0 \Leftrightarrow
$$

$$
\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta = 0
$$

– канонічний вигляд даного рівняння.

1.2. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними

1.2.1. Знаходження загальних розв'язків

Знаходження загального розв'язку довільного рівняння з частинними похідними другого порядку, взагалі кажучи, неможливе. Але в деяких часткових випадках це легко зробити. Наведемо частину цих випадків.

Розглянемо лінійне гіперболічне рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{8}$$

де Ω – область в $\mathbb{R}^2$, і нехай

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}, \tag{9}$$

невироджена заміна змінних, при якій дане рівняння набуває канонічного вигляду

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{a}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\xi + \widetilde{b}_1(\xi,\eta)\widetilde{u}_\eta + \widetilde{c}_1(\xi,\eta)\widetilde{u} = \widetilde{f}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}. \tag{10}$$

Розглянемо кілька найпростіших випадків виконання однієї з умов а) або б) і знаходження при цьому загального розв'язку вихідного рівняння. При цьому для спрощення викладення, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\widetilde{\Omega} = I \times J$, I, J – відповідні числові інтервали, тобто $\widetilde{\Omega}$ – відкритий прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат.

Випадок 1. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a}_1 = 0, \quad \widetilde{b}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = \widetilde{f}(\xi, \eta). \tag{11}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування однієї з систем рівнянь:

$$v_\eta = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\xi = v \tag{12}$$

або

$$v_\xi = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{13}$$

Розв'яжемо систему (12). Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його по η і при цьому вважаючи ξ параметром. У результаті здобуваємо

$$v(\xi, \eta) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \widetilde{f}(\xi, r)\, dr + F_1(\xi),$$

де η_0 – фіксоване число, F_1 – довільна функція. Підставимо отриманий вираз v у друге рівняння системи (13). Проінтегрувавши отримане рівняння по ξ, вважаючи при цьому η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (11):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \widetilde{f}(t, r)\, dr dt + F(\xi) + G(\eta),$$

де $F(\xi)$, $\xi \in I$, $G(\eta)$, $\eta \in J$, – довільні неперервно диференційовні функції (тут F – первісна від F_1).

Отож, загальний розв'язок рівняння (8) в даному випадку має вигляд

$$u(x,y) = \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)} \int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} \widetilde{f}(t,r)\,drdt + F(\varphi(x,y)) + G(\psi(x,y)),$$

де F, G – довільні двічі неперервно диференційовні функції, визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 2. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a} = p(\eta)$, $\quad \widetilde{b}_1 = 0$, $\quad \widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + p(\eta)\widetilde{u}_\xi = \widetilde{f}(\xi,\eta). \tag{14}$$

Знаходження його розв'язку зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi,\eta), \quad \widetilde{u}_\xi = v. \tag{15}$$

Спочатку знайдемо розв'язок першого рівняння, тобто рівняння

$$v_\eta + p(\eta)v = \widetilde{f}(\xi,\eta).$$

Його можна трактувати як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку щодо змінної η, вважаючи змінну ξ параметром.

Розв'яжемо його, помноживши попередньо на $e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds}$. Отримаємо

$$e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v_\eta + p(\eta) e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v = e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi,\eta) \quad \Leftrightarrow \quad \big(e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v\big)_\eta = e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi,\eta) \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} v = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi,r)\,dr + F_1(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$v = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(\xi,r)\,dr + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F_1(\xi).$$

де η_0 – фіксоване число, F_1 – довільна функція. Підставляючи отриманий вираз $v(\cdot)$ в друге рівняння системи (15) і інтегруючи його по ξ, вважаючи при цьому змінну η параметром, отримаємо загальний розв'язок рівняння (10):

$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\xi}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(t,r)\,dr dt + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} p(s)\,ds} F(\xi) + G(\eta),$$

де $F(\xi)$, $\xi \in I$, $G(\eta)$, $\eta \in J$, – довільні неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових інтервалах (тут F – первісна від F_1).

Звідси здобуваємо загальний розв'язок рівняння (8) у вигляді

$$u(x,y) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(x,y)}\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} e^{\int\limits_{\eta_0}^{r} p(s)\,ds} \widetilde{f}(q,r)\,dr dq + e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\psi(x,y)} p(s)\,ds} F(\varphi(x,y)) + G(\psi(x,y)),$$

де F, G – довільні двічі неперервно диференційовні функції, які визначені на відповідних числових проміжках.

Випадок 3. Нехай в рівнянні (10): $\widetilde{a}_1 = 0$, $\widetilde{b}_1 = q(\xi)$, $\widetilde{c}_1 = 0$, тобто воно має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + q(\xi)\widetilde{u}_\eta = \widetilde{f}(\xi, \eta). \qquad (16)$$

Його розв'язування зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$v_\xi + q(\xi)v = \widetilde{f}(\xi, \eta), \quad \widetilde{u}_\eta = v. \qquad (17)$$

Ця система інтегрується цілком аналогічно, як система (15), із заміною η на ξ.

Приклад 8.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0.$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Обчисливши дискримінант рівняння

$$\Delta = (1 - y^2)^2 + y^2 = 1 + 2y^2 + y^4 = (1 + y^2)^2,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо його рівняння характеристик

$$4y^2 dy^2 - 2(1 - y^2)dx\,dy - dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як квадратне відносно dy, отримаємо сукупність рівнянь

$$dy = -\frac{1}{2}dx, \quad dy = \frac{1}{2y^2}dx.$$

Перші інтеграли цих рівнянь

$$2y + x = C, \qquad \frac{2}{3}y^3 - x = C.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду потрібно зробити заміну змінних

$$\xi = 2y + x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^3 - x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$\begin{aligned}
\frac{-4y}{1+y^2}\Bigg| \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta, \\
\frac{2y}{1+y^2}\Bigg| \quad & u_y = 2\widetilde{u}\ \ + 2y^2\widetilde{u}_\eta, \\
4y^2\big| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} - 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
2(1-y^2)\big| \quad & u_{xy} = 2\widetilde{u}_{\xi\xi} + (-2 + 2y^2)\widetilde{u}_{\xi\eta} - 2y^2\widetilde{u}_{\eta\eta}, \\
-1\big| \quad & u_{yy} = 4\widetilde{u}_{\xi\xi} + 8y^2\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4y^4\widetilde{u}_{\eta\eta} + 4y\widetilde{u}_\eta.
\end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази похідних функції u у вихідне рівняння, одержимо канонічний вигляд даного рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{18}$$

Інтегруючи рівняння (18) спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім – по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні неперервно диференційовні функції.

Звідси, вернувшись до старих змінних, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$u(x, y) = F(2y + x) + G(2y^3/3 - x),$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції. □

Приклад 9.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - e^{2x})u_{yy} - u_x - u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{19}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння:

$$\Delta(x, y) = 1 - 1 + e^{2x} = e^{2x}.$$

Оскільки $\Delta(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння (19) має гіперболічний тип. Запишемо відповідне рівняння характеристик:

$$dy^2 - 2\,dxdy + (1 - e^{2x})dx^2 = 0.$$

Розв'язавши його як "квадратне рівняння відносно dy", отримаємо сукупність двох рівнянь:

$$dy = (1 \pm e^x)\,dx,$$

і знайдемо їх перші інтеграли:

$$y - x - e^x = C, \quad y - x + e^x = C.$$

Отже, рівняння (19) зводиться до канонічного вигляду заміною змінних:

$$\xi = y - x - e^x, \quad \eta = y - x + e^x.$$

Оскільки

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big),$$

то

$$\begin{aligned}
-1\,\Big|\,& u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-1 + e^x), \\
-1\,\Big|\,& \quad u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,\Big|\,& \quad u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x)^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x)(-1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x)^2 + \\
& + \widetilde{u}_\xi \cdot (-e^x) + \widetilde{u}_\eta \cdot e^x, \\
2\,\Big|\,& \quad u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-1 - e^x) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1 - e^x - 1 + e^x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1 + e^x), \\
(1 - e^{2x})\,\Big|\,& \quad u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази u через похідні $\widetilde{u}$ в задане рівняння. У результаті отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\Big[(-1 - e^x)^2 + 2(-1 - e^x) + 1 - e^{2x}\Big] + \widetilde{u}_{\xi\eta}\Big[2(1 - e^{2x}) + (-4) + 2(1 - e^{2x})\Big] +$$

$$+\widetilde{u}_{\eta\eta}\Big[(-1+e^x)^2+2(-1+e^x)+(1-e^{2x})\Big]+\widetilde{u}_\xi\Big[(-1)\cdot(-1-e^x)-e^x-1\Big]+$$

$$+\widetilde{u}_\eta\Big[(-1)\cdot(-1+e^x)+e^x-1\Big]=0 \Longleftrightarrow -4e^{2x}\widetilde{u}_{\xi\eta}=0 \Longleftrightarrow \widetilde{u}_{\xi\eta}=0. \tag{20}$$

Розв'яжемо рівняння (20), а точніше, знайдемо його загальний розв'язок. Зауважимо, що рівняння (20) рівносильне системі рівнянь

$$v_\xi=0, \quad \widetilde{u}_\eta=v. \tag{21}$$

Знайдемо розв'язок першого рівняння, інтегруючи його за змінною η, вважаючи зміну ξ довільною і фіксованою. Тоді

$$v=F_1(\xi), \tag{22}$$

де F_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз (22) в друге рівняння системи :

$$\widetilde{u}_\xi=f_1(\xi).$$

Інтегруючи це рівняння за змінною ξ, вважаючи змінну η довільно заданою, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}=F(\xi)+G(\eta), \tag{23}$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні на осі $\mathbb{R}$ функції (тут F – первісна від F_1), тобто вираз (23) є зображенням загального розв'язку рівняння (20).

Повертаючись до змінних x і y, знайдемо загальний розв'язок рівняння (19):

$$u(x,y)=F(y-x-e^x)+G(y-x+e^x),(x,y)\in G,$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Приклад 10.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0. \tag{24}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо рівняння до канонічного вигляду. Знайдемо дискримінант рівняння

$$\Delta(x, y) = 4 + 5 = 9 > 0.$$

Отже, рівняння (24) має гіперболічний тип. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0, \tag{25}$$

звідси

$$dy = (2 \pm 3)\, dx \Longleftrightarrow dy - 5dy = 0 \quad \text{або} \quad dy + dx = 0.$$

Отже, перший інтеграл рівняння (25) мають вигляд,

$$y - 5x = C_1 \quad \text{або} \quad y + x = C_2,$$

і в рівнянні (24) робимо заміну змінних

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x.$$

Врахувавши, що

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\xi, \eta) = \widetilde{u}\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big),$$

знаходимо

$$
\begin{aligned}
-1\cdot\,&\big|u_x=\widetilde{u}_\xi\cdot(-5)+\widetilde{u}_\eta\cdot 1,\\
-1\cdot\,&\big|u_y=\widetilde{u}_\xi\cdot 1+\widetilde{u}_\eta\cdot 1,\\
1\cdot\,&\big|u_{xx}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot(-5)^2+2\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot(-5)\cdot 1+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot 1^2,\\
4\cdot\,&\big|u_{xy}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot(-5)\cdot 1+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot(-5\cdot 1+1\cdot 1)+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot 1^2,\\
-5\cdot\,&\big|u_{yy}=\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot 1^2+2\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot 1\cdot 1+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot 1^2.
\end{aligned}
$$

Підставивши ці вирази у рівняння (24) одержимо

$$
\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[15-5\cdot 4-5]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[-10-16-10]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[1+4-5]+
$$

$$
+\widetilde{u}_\xi[-5-1]+\widetilde{u}_\eta[1-1]=0 \Longleftrightarrow -36\widetilde{u}_{\xi\eta}-6\widetilde{u}_\xi=0 \quad \Longleftrightarrow
$$

$$
\widetilde{u}_{\xi\eta}+\frac{1}{6}\widetilde{u}_\eta=0. \tag{26}
$$

Рівняння (26) рівносильне системі рівнянь

$$
v_\xi+\frac{1}{6}v=0, \quad \widetilde{u}_\eta=v. \tag{27}
$$

Спочатку розв'яжемо перше рівняння системи (27). Для цього помноживши його на $e^{\xi/6}$ і перепишемо у вигляді

$$
\left(ve^{\xi/6}\right)_\xi=0.
$$

Звідси інтегруючи за змінною ξ, вважаючи змінну η довільною і фіксованою, знаходимо

$$ve^{\xi/6} = G_1(\eta),$$

де G_1–довільна неперервно диференційовна функція.

Отже, маємо

$$v(\xi, \eta) = G_1(\eta) \cdot e^{-\xi/6}.$$

Підставляючи цей вираз в друге рівняння системи (27), одержимо

$$\widetilde{u}_\eta = G_1(\eta) \cdot e^{-\xi/6},$$

Звідси маємо загальний роз'язок рівняння (26):

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = F(\xi) + G(\eta)e^{-\xi/6},$$

де F і G–довільні двічі неперервно диференційовні функції. Вертаючись до змінних x і y, знаходимо

$$u(x, y) = F(y - 5x) + G(y + x)\, e^{(-y+5x)/6}$$

– загальний розв'язок заданого рівняння.

1.2.2. Знаходження розв'язків задачі Коші

Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{28}$$

з початковими умовами або вигляду

$$u\Big|_{y=\mu_1(x)} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu_1(x)} = \psi(x), \tag{29}$$

або вигляду

$$u\Big|_{x=\mu_2(y)} = \varphi(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\mu_2(y)} = \psi(y). \tag{30}$$

Вважатимемо, що для рівняння (28) виконуються такі ж умови, як у пункті , тобто умови, які гарантують можливість знаходження загального розв'язку рівняння (28). Тоді, знайшовши загальний розв'язок рівняння (28), який містить дві довільні функції, підставимо його вираз у початкові умови ((29) чи (30)) і визначимо ці функції. Такий метод знаходження розв'язку задачі Коші називається *методом характеристик*. Продемонструємо його на конкретному прикладі.

Приклад 11.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{xx} + 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} + \cos x\, u_y = -4. \tag{31}$$

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 1 + 2\sin x, \quad u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 2 - 2x. \tag{32}$$

Розв'язування. Спочатку зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Знайшовши дискримінант рівняння

$$\Delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

переконуємося (оскільки $\Delta > 0$), що дане рівняння є гіперболічним. Запишемо рівняння характеристик

$$dy^2 - 2\sin x\, dx\, dy - \cos^2 x\, dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його щодо dy, отримаємо сукупність двох рівнянь

$$dy = (\sin x + 1)dx, \qquad dy = (\sin x - 1)dx.$$

Загальні інтеграли цих рівнянь

$$y + \cos x - x = C_1, \qquad y + \cos x + x = C_2.$$

Отже, для зведення вихідного рівняння до канонічного вигляду слід зробити заміну

$$\xi = y + \cos x - x, \qquad \eta = y + \cos x + x.$$

Виразимо похідні функції u через похідні функції $\widetilde{u}$:

$$
\begin{array}{rl}
0| & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\sin x + 1), \\
\cos x\,| & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,| & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (\sin^2 x + 2\sin x + 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (2\sin^2 x - 2) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (\sin^2 x - 2\sin x + 1) + \\
 & + \widetilde{u}_\xi \cdot (-\cos x) + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\cos x), \\
2\sin x\,| & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot (-\sin x - 1) + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-2\sin x) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-\sin x + 1), \\
-\cos^2 x\,| & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{array}
$$

Підставимо знайдені вирази похідних функції u через похідні функції $\tilde{u}$ у вихідне рівняння:

$$
\tilde{u}_{\xi\xi} \cdot [\sin^2 x + 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x - 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_{\xi\eta} \cdot [2\sin^2 x - 2 + 2\sin x(-2\sin x) - 2\cos^2 x] +
$$

$$
+ \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot [\sin^2 x - 2\sin x + 1 + 2\sin x(-\sin x + 1) - \cos^2 x] + \tilde{u}_\xi \cdot [\cos x - \cos x] + \tilde{u}_\eta \cdot [\cos x - \cos x] = -4.
$$

Після відповідних спрощень одержимо рівняння

$$
\widetilde{u}_{\xi\eta} = 1. \tag{33}
$$

Інтегруючи це рівняння спочатку по ξ, вважаючи при цьому η параметром, а потім – по η, вважаючи при цьому ξ параметром, одержимо загальний розв'язок рівняння (33):

$$
\widetilde{u}(\xi, \eta) = \eta\xi + F(\xi) + G(\eta),
$$

де F і G – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Повернувшись до змінних x та y, здобуваємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x,y) = (y+\cos x - x)(y+\cos x + x) + F(y+\cos x - x) + G(y+\cos x + x), \qquad (34)$$

де $F(\cdot)$ і $G(\cdot)$ – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Знайдемо частинну похідну

$$u_y(x,y) = (y+\cos x - x) + (y+\cos x + x) + F'(y+\cos x - x) + G'(y+\cos x + x).$$

Підставимо отримані вирази u, u_y в початкові умови:

$$u\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = (x+1)(3x+1) + F(x+1) + G(3x+1) = 1 + 2\sin x, \qquad (35)$$

$$u_y\Big|_{y=-\cos x+2x+1} = 4x+2 + F'(x+1) + G'(3x+1) = 2 - 2x. \qquad (36)$$

Продиференціюємо рівність (36) по x:

$$6x+4+F'(x+1)+3G'(3x+1) = 2\cos x. \qquad (37)$$

Віднявши від рівності (37) рівність (36), отримаємо

$$G'(3x+1) = \cos x - 2. \qquad (38)$$

Зробимо в (38) заміну змінних $z = 3x+1$, тобто $x = \frac{z-1}{3}$. Тоді $G'(z) = \cos\frac{z-1}{3} - 2$. Звідси $G(z) = 3\sin\frac{z-1}{3} - 2z + C$, де C – довільна стала. Тоді з (35) матимемо

$$F(x+1) = 1 + 2\sin x - (x+1)(3x+1) - 3\sin x + 2(3x+1) - C,$$

тобто $F(x+1) = -3x^2 + 2x + 2 - \sin x - C$. Зробимо заміну змінних $x + 1 = s$, звідки $x = s - 1$ і
$$F(s) = -3(s-1)^2 + 2(s-1) + 2 - \sin(s-1).$$
Отже, розв'язок вихідної задачі Коші визначений формулою
$$u(x,y) = (y + \cos x - x)(y + \cos x + x) - 3(y + \cos x - x - 1)^2 + 2(y + \cos x - x - 1) +$$
$$+2 - \sin(y + \cos x - x - 1) + 3\sin\frac{y + \cos x + x - 1}{3} - 2(y + \cos x + x).$$
□

Приклад 12.

Розв'язати задачу Коші для рівняння
$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - u_y = 0 \tag{39}$$
з початковими умовами
$$u|_{y=x+1} = e^{5x+2}, \quad u_y|_{y=x+1} = 2e^{5x+2}. \tag{40}$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Для цього зводимо наше рівняння до канонічного вигляду. Знаходимо дискримінант рівняння.
$$\Delta(x,y) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0.$$

Звідси, зокрема, отримуємо висновок, що дане рівняння є гіперболічного типу. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 + 3dxdy + 2dx^2 = 0.$$

Розв'язуючи його як "квадратне рівняння відносно dy" , знаходимо

$$dy = \Big(-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\Big)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad dy + dx = 0 \quad \text{або} \quad dy + 2dx = 0.$$

Знаходимо перші інтеграли

$$x + y = C, \quad 2x + y = C.$$

Отже, в нашому рівнянні треба зробити заміну змінних

$$\xi = x + y, \quad \eta = 2x + y.$$

Тоді

$$u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$$

і маємо

$$\begin{aligned}
1\,| \quad & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 2, \\
-1\,| \quad & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1, \\
1\,| \quad & u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + 2 \cdot \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
-3\,| \quad & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 3 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 4, \\
2\,| \quad & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в наше рівняння.

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[1-3+2]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[4-9+4]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[4-6+2]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[1-1]+\widetilde{u}_{\eta}\cdot[2-1]=0 \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta}+\widetilde{u}_{\eta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta}-\widetilde{u}_{\eta}=0 \qquad (41)$$

– рівняння канонічного вигляду.

Рівняння (41) є еквівалентним системі рівнянь

$$v_{\xi}-v=0, \quad \widetilde{u}_{\eta}=v. \qquad (42)$$

Розв'яжемо перше рівняння. Для цього помножимо його на $e^{-\xi}$ і перетворимо так:

$$(ve^{-\xi})_{\xi}=0.$$

Звідси отримаємо

$$ve^{-\xi}=G_1(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad v=e^{\xi}G_1(\eta),$$

де G_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо вираз v в друге рівняння системи (42):

$$\widetilde{u}_{\eta}=e^{\xi}G_1(\eta).$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо загальний розв'язок рівняння (41):

$$\widetilde{u}(\xi,\eta)=F(\xi)+e^{\xi}G(\eta),$$

де F і G – довільні неперервно диференційовні функції (G – первісна від G_1).

Повертаючись до змінних x і y , отримаємо загальний розв'язок даного рівняння:

$$u(x,y) = F(x,y) + e^{x+y}G(2x+y), \tag{43}$$

де F, G – довільні неперервно диференційовані на $\mathbb{R}$ функції.

Підставимо вираз загального розв'язку (43) в початкові умови (40), але спочатку обчислимо похідну знайденого розв'язку

$$u_y(x,y) = F'(x+y) + e^{x+y}G(2x+y) + e^{x+y}G'(2x+y).$$

Тоді з початкових (40) умов маємо

$$u|_{y=x+1} = F(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) = e^{5x+2} + 1, \tag{44}$$

$$u|_{y=x+1} = F'(2x+1) + e^{2x+1}G(3x+1) + e^{2x+1}G'(2x+1) = 2e^{5x+2}. \tag{45}$$

Знайдемо функції F, G. Для цього продиференціюємо рівність (44):

$$2F'(2x+1) + 2e^{2x+1}G(3x+1) + 3e^{2x+1}G'(3x+1) = 5e^{5x+2}. \tag{46}$$

Помножимо рівність (45) на 2 і віднімемо отриману рівність від рівності (46):

$$e^{2x+1}G'(3x+1) = e^{5x+2} \Longleftrightarrow G'(3x+1) = e^{3x+1}. \tag{47}$$

Зробимо в (47) заміну змінних

$$p = 3x+1.$$

Тоді $G'(p) = e^p$, звідки маємо

$$G(p) = e^p + C, \quad C - \text{довільна стала.} \tag{48}$$

З рівності (44), врахувавши (48), знаходимо

$$F(2x+1) = e^{5x+2} + 1 - e^{2x+1}(e^{3x+1} + C) \equiv 1 - Ce^{2x+1}.$$

Зробимо тут заміну змінних

$$q = 2x + 1.$$

Тоді

$$F(q) = 1 - Ce^q, \tag{49}$$

де C – та ж сама довільна стала, що в (48).

З виразу загального розв'язку (43) і (48) та (49) маємо

$$u(x,y) = 1 - Ce^{x+y} + e^{x+y}(e^{2x+y} + C) \equiv e^{3x+2y} + 1$$

розв'язок нашої задачі.

Приклад 13.

Розв'язати задачу Коші :

$$u_{xx} + u_{xy} + yu_x = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{50}$$

$$u|_{y=2x} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=2x} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{51}$$

де $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння (9), а для цього зведемо його до канонічного вигляду. Обчислимо дискримінант рівняння (9) :

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{4} > 0.$$

Отже, рівняння (50) має гіперболічний тип. Запишемо для нього рівняння характеристик:

$$dy^2 - dxdy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (dy - dx)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy = 0 \quad \text{або} \quad dy - dx = 0.$$

Знайдемо перші інтеграли цих рівнянь :

$$y = C, \quad y - x = C.$$

Отже, для зведення рівняння (50) до канонічного вигляду потрібно зробити в ньому заміну змінних:

$$\xi = y, \quad \eta = y - x. \tag{52}$$

Враховуючи, що $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi,\eta) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$, знаходимо:

$$\begin{aligned}
y \mid\ & u_x = \widetilde{u}_\eta \cdot (-1),\\
0 \mid\ & u_y = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\eta \cdot 1,\\
1 \mid\ & u_{xx} = \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1)^2,\\
1 \mid\ & u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot (-1) + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot (-1),\\
0 \mid\ & u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot 1 + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot 2 + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння (50):

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1 \cdot 0] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [1 \cdot (-1)] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)] + (-y) \cdot \widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow -\widetilde{u}_{\xi\eta} - \xi\widetilde{u}_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \xi\widetilde{u}_\eta = 0. \tag{53}$$

Рівняння (53) рівносильне системі рівнянь:

$$v_\xi + \xi v = 0, \quad \widetilde{u}_\eta = v. \tag{54}$$

Розв'яжемо перше з рівнянь системи (54):

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \ \text{ або } \ v = 0.$$

Маємо

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\xi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \ln|v|}{\partial \xi} = -\xi \Leftrightarrow \ln|v| = -\xi^2/2 + \ln|G_1(\eta)| \Leftrightarrow$$

$$v(\xi, \eta) = G_1(\eta) e^{-\xi^2/2},$$

де G_1 – довільна неперервно диференційовна функція.

Підставимо отриманий вираз у друге рівняння системи (54):

$$\widetilde{u}_\eta = G_1(\eta) e^{-\xi^2/2}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок рівняння (53):

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) e^{-\xi^2/2},$$

де F і G – довільні двічі неперервно-диференційовні функції. Повернемося до змінних x і y (див.(53)) :

$$u(x, y) = F(y) + G(y - x) e^{-y^2/2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{55}$$

– загальний розв'язок рівняння (50).

Підставимо знайдений вираз загального розв'язку в умови (51), але спочатку знайдемо похідну :

$$u_y(x, y) = F'(y) + G'(y - x) \cdot e^{-y^2/2} - G(y - x) \cdot y \cdot e^{-y^2/2}.$$

Тоді з умов (51) маємо

$$u|_{y=2x} = F(2x) + G(x) e^{-2x^2} = \varphi(x), \tag{56}$$

$$u_y|_{y=2x} = F'(2x) + G'(x) e^{-2x^2} - 2xG(x) e^{-2x^2} = \psi(x). \tag{57}$$

Для знаходження F і G продиференціюємо рівність (55):

$$2F'(2x) + G'(x) e^{-2x^2} - 4xG(x) e^{-2x^2} = \varphi'(x), \tag{58}$$

Помножимо рівність (56) на 2 і від отриманої рівності віднімемо рівність (57):

$$G'(x)e^{-2x^2} = 2\psi(x) - \varphi'(x),$$

Звідси

$$G'(x) = [2\psi(x) - \varphi'(x)]e^{2x^2}.$$

Отже, маємо

$$G(x) = \int\limits_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2} dt + C. \tag{59}$$

Тоді з (59) на підставі (58) маємо

$$F(2x) = \varphi(x) - \left(\int\limits_0^x [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2} dt + C \right) e^{-2x^2}.$$

Зробивши заміну змінних $2x = s \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{s}{2}$, отримаємо :

$$F(s) = \varphi\left(\frac{s}{2}\right) - \left(\int\limits_0^{\frac{s}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2} dt + C \right) e^{-s^2/2}. \tag{60}$$

Отже, з (55) на підставі (59), (60) отримуємо розв'язок задачі (50), (51):

$$u(x,y) = \varphi\left(y/2\right) - \left(\int\limits_0^{\frac{y}{2}} [2\psi(t) - \varphi'(t)]e^{2t^2} dt + C \right) e^{-y^2/2} +$$

$$+\left(\int\limits_0^{y-x}[2\psi(t)-\varphi'(t)]e^{2t^2}dt+C\right)e^{-\frac{y^2}{2}}\equiv$$

$$\equiv\varphi\left(y/2\right)+\int\limits_{y/2}^{y-x}[2\psi(t)-\varphi'(t)]e^{2t^2}dt.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (випадок двох незалежних змінних):

а) $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0$;
б) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0$;
в) $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y-2u=0$;
г) $(1+x^2)^2u_{xx}+u_{yy}+2x(1+x^2)u_x=0$;
д) $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0$;
е) $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0$.

2. Знайти загальні розв'язки таких рівнянь:

а) $2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}=0$;
б) $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0$;
в) $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^x$.

3. Знайти розв'язки таких задач Коші:

а) $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0,$
$\quad u\big|_{y=0} = \sin x, \qquad u_y\big|_{y=0} = 1;$

б) $u_{xx} - 2u_{xy} = -4e^y,$
$\quad u\big|_{x=0} = e^y, \qquad u_x\big|_{x=0} = y;$

в) $u_{xx} + 2\cos x\, u_{xy} - \sin^2 x\, u_{yy} - \sin x\, u_y = 0,$
$\quad u\big|_{y=\sin x} = x + \cos x, \qquad u_y\big|_{y=\sin x} = \sin x;$

г) $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0,$
$\quad u\big|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u_y\big|_{y=0} = \psi(x);$

д) $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$
$\quad u\big|_{y=\cos x} = 0, \qquad u_y\big|_{y=\cos x} = e^{-x/2}\cos x.$

е) $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0; \qquad u|_{y=x} = 3x+2, \quad u_y|_{y=x} = x+1.$

Відповіді:

2. а) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} - 8\widetilde{u} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2x;$

б) параболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\eta} + 18\widetilde{u}_{\xi} + 9\widetilde{u}_{\eta} - 9\widetilde{u} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x;$

в) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi} + 3\widetilde{u}_{\xi} - \widetilde{u}_{\eta} + 2\widetilde{u} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2y - x;$

г) еліптичне всюди, $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = y, \quad \eta = \operatorname{arctg} x;$

д) параболічне всюди, крім початку координат (у початку координат рівняння вироджується)

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}\widetilde{u}_{\xi} + \frac{1}{2\eta}\widetilde{u}_{\xi} = 0, \qquad \xi = y^2 - x^2, \quad \eta = x^2;$$

е) гіперболічне всюди, $\widetilde{u}_{\eta\xi} = 0, \quad \xi = x + \operatorname{arctg} y, \quad \eta = x - \operatorname{arctg} y.$

1. а) заміна $\xi = x + y$, $\eta = 3x + 2y$ зводить до рівняння $\widetilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, інтегруючи яке, знаходимо $u(x, y) = F(x + y) + G(3x + 2y)$, де F, G – довільні двічі неперервно-диференційовні функції;
б) $u(x, y) = F(y - x) + e^{(x-y)/2}G(y - 2x)$;
в) $u(x, y) = 2e^x + e^{(x+2y)/2}F(x) + G(x + 2y)$.

3. а) $u(x, y) = \sin(x - \frac{2}{3}y^3) + y + \frac{1}{3}y^3$; в нових змінних $\xi = x - \frac{2}{3}y^3$, $\eta = x + 2y$ вихідне рівняння набуває вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, інтегруючи яке і використовуючи початкові умови, приходимо до відповіді.
б) $u(x, y) = (2 + 2x - e^{2x})e^y + x^2 + xy$; використовується заміна змінних $\xi = y$, $\eta = y + 2x$.
в) $u(x, y) = x + \cos(x - y + \sin x)$; використати заміну змінних $\xi = y - x - \sin x, \eta = y + x - \sin x$.
г) $u(x, y) = \frac{3}{2}e^{-y}\varphi(x + y) - \frac{1}{2}\varphi(x + 3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+3y)} \int\limits_{x+y}^{x+3y} e^{z/2}[3\varphi(z) + 2\psi(z)]dz$; спочатку за допомогою заміни змінних $\xi = x + 3y, \eta = y + x$ звести вихідне рівняння до канонічного вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\tilde{u}_\eta = 0$, інтегруючи яке, можна отримати його загальний розв'язок.
д) $u(x, y) = 2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)} \cos x \sin \frac{1}{2}(y - \cos x)$; за допомогою заміни змінних $\xi = 2x - y + \cos x, \eta = 2x + y - \cos x$ вихідне рівняння задачі звести до канонічного вигляду $\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_\eta = 0$, загальний розв'язок якого має вигляд $\widetilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + e^{-\xi/4}G(\eta)$, де F і G – довільні двічі неперервно диференційовні функції; повертаючись до старих змінних, отримати загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x, y) = F(2x - y + \cos x) + e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)}G(2x + y - \cos x);$$

далі, використовуючи початкові умови, визначити вигляд функцій F і G.

Взірець контрольної роботи №1

1.Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння:
$5u_{xx} + 2u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} - 2u_{yz} + 2u_{xz} + 2u_y = 0.$
2. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння:
$x^2 u_{xx} + u_{yy} + 6u_y = 0.$
3. Вказати тип та звести до канонічного вигляду рівняння:
$y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} + xu_x = 0.$
4. Розв'язати задачу Коші:
$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0,$
$u\big|_{y=x} = e^{-x}, \quad u_y\big|_{y=x} = 1.$