Практичне заняття № 18

Крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона в кругових областях. Метод Фур'є

Завдання №1: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < l^2\} \ \text{— круг радіуса } l > 0,$$

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = l^2\} \ \text{— межа } \Omega \text{ — коло радіуса } l,$$

$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в крузі***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

де

$$g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad p \in C(\partial\Omega), \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \beta_1 > 0.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Для розв'язування даної задачі перейдемо в ній до полярної системи координат:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r \in [0, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Покладаючи

$$u(r,\theta) := w(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad f(r,\theta) := g(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \psi(\theta) := p(l\cos\theta, l\sin\theta),$$

отримаємо задачу

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (0,l), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (0,l], \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u\big|_{r=0} < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)\big|_{r=l} = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Тут і далі під умовою $u\big|_{r=0} < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі 0.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(r,\theta) = f(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Введемо лінійний простір $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ визначених на $\mathbb{R}$ і неперервних та 2π-періодичних функцій, тобто $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$ для будь-яких $\theta \in \mathbb{R}$. На ньому задамо скалярний добуток і відповідну норму за правилами:

$$(v,w) = \int_0^{2\pi} v(\theta)w(\theta)\,d\theta, \quad \|v\| = \Big(\int_0^{2\pi} |v(\theta)|^2\,d\theta\Big)^{1/2}.$$

Так введений простір не є повним і його поповнення позначимо через $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$. Очевидно, що $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ є складений з функцій $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ таких, що $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$ для майже всіх $\theta \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(\widetilde{A}) = C^2(\mathbb{R}) \cap C_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad \widetilde{A}v = -v'' \;\; \forall v \in D(\widetilde{A}),$$

та введемо позначення

$$(0,l] \ni r \to u(r) := u(r,\cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad (0,l) \ni r \to f(r) := f(r,\cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\psi := \psi(\cdot) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

У результаті задача () – () може бути потрактована як крайова задача для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}\widetilde{A}u = f(r), \quad r \in (0,l), \tag{4}$$

з крайовими умовами

$$u(0) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l) + \beta_1 u(l) = \psi, \tag{5}$$

де під умовою $u(0) < \infty$ розуміємо умову $\overline{\lim}_{r\to 0+} \|u(r)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})} < \infty$, тобто обмеженість функції $r \to \|u(r)\|_{C_{2\pi}(\mathbb{R})}$ в околі точки 0.

Розширимо оператор $\widetilde{A}$ до замкненого оператора $A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, поклавши

$$D(A) := H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A).$$

Тоді отримаємо задачу

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (0,l), \tag{6}$$

$$u(0) < \infty, \quad \alpha_1 u_r(l) + \beta_1 u(l) = \psi, \tag{7}$$

де умова $u(0) < \infty$ означає, що

$$\overline{\lim_{r\to 0+}} \|u(r)\|_{L_{2,2\pi}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Задача (6), (7) є узагальненням задачі (4), (5). Сильно узагальнений розв'язок задачі () — () будемо шукати як слабкий розв'язок задачі (6), (7), використовуючи метод Фур'є.

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Покажемо, що $\lambda \geqslant 0$. Справді, якщо функція $w \neq 0$ є розв'язком задачі (8) при деякому значенні λ, то домноживши рівність (9) на w, проінтегруємо отриману рівність по θ від 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} w''(\theta)w(\theta)\,d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta = 0.$$

Звідси, інтегруючи частинами та враховуючи 2π-періодичність функції w, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\,d\theta = \lambda \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta,$$

звідки

$$\lambda = \int_0^{2\pi} |w'(\theta)|^2\,d\theta \Big/ \int_0^{2\pi} |w^2(\theta)|^2\,d\theta \geqslant 0.$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (9) при $\lambda = 0$. Підставимо отриманий вираз повного загального розв'язку в умову періодичності:

$$C_1(\theta + 2\pi) + C_2 = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 - \text{довільна стала}.$$

Звідси випливає, що нуль є власним значенням, а відповідні йому власні функції мають вигляд $w = C_2$, $r \in (0, l]$. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\,d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\,d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

– відповідно власне значення і відповідна йому нормована власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Характеристичне рівняння для рівняння (9) має вигляд

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$w = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\big[\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] + C_2\big[\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Звідси, після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$[C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta] \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, а це означає, що

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (13) у рівність (12). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (11) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$, у вигляді

$$w(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (14) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (14), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Зі сказанного вище випливає, що ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta, \dots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \dots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{15}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, складеною з власних значень оператора A і для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \dots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \dots\ .$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\psi(\theta) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{\psi}_k w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^\infty \widehat{\psi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$f(r,\theta) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^\infty \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{18}$$

$r \in (0,l)$, $\theta \in \mathbb{R}$, де

$$\widehat{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \, d\theta,$$

$$\widehat{\psi}_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad \widehat{\psi}_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin m\theta \, d\theta, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \, d\theta,$$

$$\widehat{f}_{2m}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad \widehat{f}_{2m+1}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin m\theta \, d\theta, \quad r \in (0,l), \ m \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Сильно узагальнений розв'язок задачі () – () шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{19}$$

$r \in (0,l], \ \theta \in \mathbb{R}$,
де коефіцієнти ряду (19) визначаються рівностями та умовами

$$\widehat{u}_1(r)'' + \frac{1}{r}\widehat{u}_1(r)' = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0,l), \tag{20}$$

$$\widehat{u}_1(r)(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}_1(r)'(l) + \beta_1 \widehat{u}_1(r)(l) = \widehat{\psi}_1; \tag{21}$$

$$\widehat{u}''_{2m}(r) + \frac{1}{r}\widehat{u}'_{2m}(r) - \frac{m^2}{r^2}\widehat{u}_{2m}(r) = \widehat{f}_{2m}(r), \quad r \in (0,l), \tag{22}$$

$$\widehat{u}_{2m}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m}(l) = \widehat{\psi}_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}; \tag{23}$$

$$\widehat{u}''_{2m+1}(r) + \frac{1}{r}\widehat{u}'_{2m+1}(r) - \frac{m^2}{r^2}\widehat{u}_{2m+1}(r) = \widehat{f}_{2m+1}(r), \quad r \in (0,l), \tag{24}$$

$$\widehat{u}_{2m+1}(0) < \infty, \qquad \alpha_1 \widehat{u}'_{2m+1}(l) + \beta_1 \widehat{u}_{2m+1}(l) = \widehat{\psi}_{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Відмітимо, що рівності і умови (20) – (25) безпосередньо випливають з таких міркувань: формально підставляємо ряд (19) в рівняння () та умови () і використовуємо рівності (16) та лінійну незалежність системи функцій $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Як легко переконатися, коефіцієнти ряду (19) мають бути (див. (20) – (25)) розв'язками задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{26}$$

$$z(0) < \infty, \qquad \alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{27}$$

де $k \in \mathbb{N}, \ m := [k/2]$. Тут і далі $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$.

Розв'яжемо задачу (26), (27). Очевидно, що, враховуючи лінійність рівняння (26), потрібно знайти вираз повного загального розв'язку цього рівння (він буде містити дві довільні сталі) і, підставивши цей вираз у крайові умови (27), визначити відповідні сталі.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (26). Для цього помножимо це рівняння на r^2:

$$r^2 z'' + rz' - m^2 z = r^2 \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{28}$$

Очевидно, що рівняння (28) є рівнянням Ейлера. Зводимо його до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною змінних: $r = e^t,\ r \in [0, +\infty),\ t \in \mathbb{R}$. Для цього запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\mu(\mu - 1) + \mu - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0.$$

Тоді, як випливає з теорії рівнянь Ейлера, для функції $p(t) = z(r)$ при $r = e^t$ отримаємо рівняння

$$p'' - m^2 p = q_k(t), \quad \text{де} \ \ q_k(t) := e^{2t}\widehat{f}_k(e^t). \tag{29}$$

Це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами і його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння

$$p'' - m^2 p = 0 \tag{30}$$

і часткового розв'язку даного рівняння. Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (30). Оскільки

$$\mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\, m, \ \text{якщо} \ m \in \mathbb{N}, \ \text{і} \ \mu_1 = 0, \ \text{якщо} \ m = 0,$$

то маємо повний загальний розв'язок рівняння (30) у вигляді

$$p = A + Bt, \quad \text{якщо} \ m = 0,$$

$$p = Ae^{mt} + Be^{-mt}, \quad \text{якщо} \ m \in \mathbb{N},$$

де A, B – довільні сталі.

Далі шукаємо частковий розв'язок $\overset{*}{p}_k$ рівняння (29) або методом варіації сталих або, якщо вільний член даного рівняння є квазімногочленом, методом неозначених коефіцієнтів.

Тоді повний загальний розв'язок рівняння (29) має вигляд

$$p = A_1 + B_1 t + \overset{*}{p}_1(t), \quad \text{якщо} \ k = 1,$$

$$p = A_k e^{mt} + B_k e^{-mt} + \overset{*}{p}_k(t), \quad \text{якщо} \ k > 1,$$

де A_k, B_k – довільні сталі, $k \in \mathbb{N}$.

Звідси, вертаючись до змінної r (зауважимо, що $e^{\lambda t} = (e^t)^\lambda = r^\lambda$) і позначаючи $\overset{*}{z}_k(r) := \overset{*}{p}_k(\ln r),\ r \in (0, l)$, отримаємо

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо} \ k = 1,$$

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad \text{якщо} \ k > 1,$$

– повний загальний розв'язок рівняння (26).

Тоді з крайових умов (27) маємо

$$z(0) < \infty \quad \Rightarrow \quad B_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

$$\alpha_1 z'(l) + \beta_1 z(l) = \widehat{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) + \beta_1(A_1 + \overset{*}{z}_1(l)) = \widehat{\psi}_1, \quad \alpha_1(A_k m l^{m-1} + \overset{*}{z}{}_k'(l)) + \beta_1(A_k l^m + \overset{*}{z}_k(l)) = \widehat{\psi}_k, \quad k > 1,$$

звідки

$$A_1 = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_1'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_1(l)\big]/\beta_1, \quad A_k = \big[\widehat{\psi}_k - \alpha_1 \overset{*}{z}{}_k'(l) - \beta_1 \overset{*}{z}_k(l)\big]\big/\big[\alpha_1 m l^{m-1} + \beta_1 l^m\big]. \quad (32)$$

Отже, ми знайшли розв'язок $z = A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0,l]$, задачі (26), (27), звідки

$$\widehat{u}_k(r) := A_k r^m + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0,l],$$

для довільного $k \in \mathbb{N},\ m = [k/2]$.

Тоді для отримання сильно узагальненого розв'язку задачі () – () потрібно підставити отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (19).

Зауваження 1. З вище сказаного очевидно випливає, що коли $\widehat{f}_k = 0$ і $\widehat{\psi}_k = 0$, то розв'язком задачі (26), (27) є тільки функція $z = 0,\ r \in (0,l]$.

Зауваження 2. Відмітимо, що повний загальний розв'язок рівняння (26), яке є лінійним другого порядку, можна знайти безпосередньо, не роблячи заміни змінних. Для цього нагадаємо, що повний загальний розв'язок цього рівняння є сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = 0, \quad r \in (0,l), \tag{33}$$

і часткового розв'язку даного неоднорідного рівняння.

Знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (33). Спочатку розглянемо випадок $m \in \mathbb{N}$. Відшукаємо фундаментальну систему розв'язків даного рівняння, тобто будемо шукати два лінійно незалежних його розв'язки. Ці розв'язки спробуємо знайти у вигляді $z = r^\mu$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Для знаходженя значень μ обчислимо $z' = \mu r^{\mu-1},\ z'' = \mu(\mu-1) r^{\mu-2}$ і підставимо отримані вирази у рівняння (33):

$$\mu(\mu-1) r^{\mu-2} + \mu r^{\mu-2} - m^2 \mu r^{\mu-2} = 0 \quad \forall r \in (0,l) \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\, m.$$

Отже, функції $z = r^m$, $z = r^{-m},\ r \in (0,l]$, є лінійно незалежними розв'язками рівняння (33), а тому

$$z = A r^m + B r^{-m}, \quad r \in (0,l], \quad A, B \text{ – довільні сталі}, \tag{34}$$

– повний загальний розв'язок цього рівняння.

Тепер розглянемо випадок $m = 0$, тобто рівняння

$$z'' + \frac{1}{r} z' = 0, \quad r \in (0,l). \tag{35}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну: $y := z'$. Отримаємо

$$y' + \frac{1}{r} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dr} = -\frac{y}{r} \ \Big| \times \frac{dr}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r},\ y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y = -\ln r + \ln|B|,\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = B/r, \quad B \text{ – довільна стала.}$$

Звідси маємо $z' = B/r$, а отже,

$$z = A + B \ln r, \quad r \in (0,l], \quad A, B \text{ – довільні сталі}, \tag{36}$$

– повний загальний розв'язок рівняння (35).

Частковий розв'язок рівняння (26) можна шукати методом варіації сталих. Спочатку розглянемо випадок $k > 1$. Дивлячись на (34), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (26):

$$z = a_k(r)r^m + b_k(r)r^{-m}, \quad r \in (0, l], \tag{37}$$

де a_k, b_k – функції, які знаходимо за умови, що функція (37) є розв'язком рівняння (26). Вирази a_k, b_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(r) \\ b_k'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0, l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(r)$ і $b_k'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0, l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} r^m & r^{-m} \\ mr^{m-1} & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -2mr^{-1},$$

$$\triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & r^{-m} \\ \widehat{f}_k(r) & -mr^{-m-1} \end{vmatrix} = -r^{-m}\widehat{f}_k(r),$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} r^m & 0 \\ mr^{m-1} & \widehat{f}_k(r) \end{vmatrix} = r^m\widehat{f}_k(r), \quad r \in (0, l].$$

Звідси маємо

$$a_k'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = \frac{1}{2m}r^{-m+1}\widehat{f}_k(r); \quad a_k(r) = -\frac{1}{2m}\int\limits_r^l s^{-m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0, l];$$

$$b_k'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = -\frac{1}{2m}r^{m+1}\widehat{f}_k(r); \quad b_k(r) = -\frac{1}{2m}\int\limits_0^r s^{m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0, l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_k(r)$, $r \in (0, l]$, де

$$\overset{*}{z}_k(r) := -\frac{1}{2m}r^m\int\limits_r^l s^{-m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2m}r^{-m}\int\limits_0^r s^{m+1}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad r \in (0, l],$$

– частковий розв'язок рівняння (26).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (26) у випадку $k > 1$ має вигляд

$$z = A_k r^m + B_k r^{-m} + \overset{*}{z}_k(r), \quad r \in (0, l], \quad A_k, B_k \text{ – довільні сталі.} \tag{38}$$

Тепер розглянемо випадок $k = 1$ (тоді $m = 0$). Дивлячись на (36), запишемо проєкт часткового розв'язку рівняння (26):

$$z = a_1(r) + b_1(r)\ln r, \quad r \in (0, l], \tag{39}$$

де a_1, b_1 – функції, які знаходимо за умови, що функція (39) є розв'язком рівняння (26). Вирази a_1, b_1 знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'(r) \\ b_1'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_1(r) \end{pmatrix}, \quad r \in (0, l].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0'(r)$ і $b_0'(r)$ для довільного фіксованого $r \in (0,l]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle(r) = \begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & r^{-1} \end{vmatrix} = r^{-1}, \quad \triangle_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \ln r \\ \widehat{f}_1(r) & r^{-1} \end{vmatrix} = -\widehat{f}_1(r)\ln r,$$

$$\triangle_2(r) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{f}_1(r) \end{vmatrix} = \widehat{f}_1(r), \quad r \in (0,l].$$

Звідси маємо

$$a_1'(r) = \frac{\triangle_1(r)}{\triangle(r)} = -\widehat{f}_1(r) r \ln r; \quad a_0(r) = \int\limits_r^l h(s) s \ln s \, ds;$$

$$b_1'(r) = \frac{\triangle_2(r)}{\triangle(r)} = r\widehat{f}_1(r); \quad b_1(r) = \int\limits_0^r \widehat{f}_1(r) s \, ds, \quad r \in (0,l],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}_1(r)$, $r \in (0,l]$, де

$$\overset{*}{z}_1(r) := \int\limits_r^l \widehat{f}_1(s) s \ln s \, ds + \int\limits_0^r \widehat{f}_1(s) s \, ds \cdot \ln r, \quad r \in (0,l],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (26) при $k = 1$.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (26) у випадку $k = 1$ має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + \overset{*}{z}_1(r), \qquad r \in (0,l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.} \tag{40}$$

Зауваження 3. Частковий розв'язок рівняння (26), коли

$$\widehat{f}_k(r) = a_k r^\rho, \ r \in (0,l), \quad \text{де} \ \ \rho \in \mathbb{R}, \ \rho \neq \pm m - 2,$$

можна шукати методом неозначених коефіцієнтів у вигляді

$$z = b_k r^{\rho+2}, \quad r \in (0,l],$$

де b_k – неозначений коефіцієнт. Справді, обчисливши $z' = b_k(\rho+2)r^{\rho+1}$, $z'' = b_k(\rho+2)(\rho+1)r^\rho$ і підставивши ці вирази в рівняння (26), отримаємо

$$b_k(\rho+2)(\rho+1)r^\rho + b_k(\rho+2)r^\rho - m^2 b_k r^\rho = a_k r^\rho, \ \ r \in (0,l), \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\rho+2)^2 - m^2) b_k = a_k \quad \Leftrightarrow \quad b_k = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2},$$

тобто частковий розв'язок матиме вигляд

$$z = \frac{a_k}{(\rho+2)^2 - m^2} r^\rho, \quad r \in (0,l].$$

Аналогічно як вище наведено розв'язують і такі завдання:

Завдання №2: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > l^2\} \ \text{— зовнішність круга радіуса } l>0,$$
$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l^2\} \ \text{— межа } \Omega \text{ — коло радіуса } l,$$
$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона поза кругом***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$
$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$
$$w \text{ – обмежена},$$

де
$$p \in C(\partial\Omega), \quad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R},\ \alpha_0\beta_0 \geqslant 0,\ |\alpha_0| + |\beta_0| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l,+\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$
$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \quad r \in [l,+\infty), \quad \theta \in \mathbb{R},$$
$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l} = \psi(\theta), \quad u\big|_{r=+\infty} < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Тут і далі під умовою $u\big|_{r=+\infty} < \infty$ розумітимемо обмеженість функції u в околі нескінченності.

Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r,\theta) = f(r,\theta+2\pi), \quad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Завдання №3: Нехай

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, l_1^2 < x^2+y^2 < l_2^2\} \ \text{— кільце, обмежене колами радіусів } l_1>0, l_2>0,$$
$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ \text{— межа } \Omega,$$
$$\Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l_1^2\} \ \text{— коло радіуса } l_1,$$
$$\Gamma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = l_2^2\} \ \text{— коло радіуса } l_2,$$
$$\nu \ \text{— одиничний вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega.$$

Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок $w \in L_2(\Omega)$ ***крайової задачі для рівняння Пуассона в кільці***:

$$\Delta w = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$
$$\alpha_0 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_0 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1,$$
$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\nu} w(x,y) + \beta_1 w(x,y) = p_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2,$$

де

$$p_1 \in C(\Gamma_1),\, p_2 \in C(\Gamma_2), \qquad g \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega),$$

$$\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R},\; \alpha_0\beta_0 \leqslant 0,\; |\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\; \alpha_1\beta_1 \geqslant 0,\; |\alpha_1| + |\beta_1| > 0.$$

В полярній системі координат ця задача записується так:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r, \theta), \quad r \in (l_1, l_2), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad r \in [l_1, l_2], \quad \theta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha_0 u_r + \beta_0 u)\big|_{r=l_1} = \varphi(\theta), \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)\big|_{r=l_2} = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi), \quad \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi), \quad r \in (l_1, l_2),\; \theta \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Приклади розв'язування крайових задач для рівняння Пуассона в кругових областях

Приклад № 1. Розв'язати задачу:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r,\theta),\quad r\in(0,l),\ \theta\in\mathbb{R}, \tag{41}$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi),\quad \theta\in\mathbb{R}, \tag{42}$$

$$u\big|_{r=0}<\infty,\quad u(l,\theta)=\psi(\theta),\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{43}$$

де $l>0$;

$$f(r,\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}r^{1/2},\quad r\in(0,l),\ \theta\in\mathbb{R};\quad \psi(\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta+\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Розв'язування.

1-ий крок. Визначимо оператор

$$A: D(A)\to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A)=H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A),$$

та введемо позначення

$$(0,l]\ni r\to u(r):=u(r,\cdot)\in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),\quad (0,l)\ni r\to f(r):=f(r,\cdot)\in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\psi:=\psi(\cdot)\in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (41) – (43) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u''+\frac{1}{r}u'-\frac{1}{r^2}Au=f(r),\quad r\in(0,l), \tag{44}$$

з крайовими умовами

$$u(0)<\infty,\quad u(l)=\psi. \tag{45}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k=\lambda_k w_k,\ k\in\mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw=\lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w''=\lambda w,\quad w(\theta)=w(\theta+2\pi),\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{46}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w''+\lambda w=0,\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{47}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda=0$; 2) $\lambda>0$.

Спочатку розглянемо перший випадок $\lambda=0$. Тоді

$$w''=0\quad\Leftrightarrow\quad w'=C_1\quad\Leftrightarrow\quad w=C_1\theta+C_2,\quad \theta\in\mathbb{R},\quad C_1,C_2-\text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (47) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2 \, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (47):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (47) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{49}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1(\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) + C_2(\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$(C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta) \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (51) у рівність (50). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (49) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{52}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (52) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (52), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta) \, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{53}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots\ . \tag{54}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 5\theta =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m}\cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1}\sin m\theta, \tag{55}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0$, якщо $k \notin \{6, 11\}$, і $\widehat{\psi}_6 = 2,\ \widehat{\psi}_{11} = 5$;

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}r^{1/2} =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_1(r) = 2r^{1/2},\ \widehat{f}_k(r) = 0,\ r \in (0,l),\ k > 1.$

4-ий крок. Розв'язок задачі (41) – (43) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r)\cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r)\sin m\theta, \tag{56}$$

$r \in (0,l],\ \theta \in \mathbb{R}$, де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (56) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{m^2}{r^2}z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0,l), \tag{57}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = \widehat{\psi}_k, \tag{58}$$

де $m := [k/2]$ — ціла частина числа $k/2$.

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{f}_k, \widehat{\psi}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_1,\ \widehat{\psi}_6,\ \widehat{\psi}_{11}$, то *тільки* коефіцієнти $\widehat{u}_1,\ \widehat{u}_6,\ \widehat{u}_{11}$ ряду (56) є відмінними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_1$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 2r^{1/2}, \quad r \in (0,l), \tag{59}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 0, \tag{60}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_6$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{61}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 2, \tag{62}$$

а коефіцієнт $\widehat{u}_{11}$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{25}{r^2}z = 0, \quad r \in (0, l), \tag{63}$$

$$z(0) < \infty, \quad z(l) = 5. \tag{64}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (59), (60). Повний загальний розв'язок відповідного рівнянню (59) однорідного рівняння має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r, \quad r \in (0, l], \quad A_1, B_1 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_1 r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (59):

$$(5/2)(3/2)b_1 r^{1/2} + 5/2 b_1 r^{1/2} = 2r^{1/2} \;\Big|\; : r^{1/2} \;\Big|\; \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad 10b_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 0,8.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (59) має вигляд $z = 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0, l]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (59) має вигляд

$$z = A_1 + B_1 \ln r + 0,8r^{5/2}, \quad r \in (0, l].$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_1, B_1:

$$B_1 = 0, \quad A_1 + 0,8l^{5/2} = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = -0,8l^{5/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_1(r) = -0,8l^{5/2} + 0,8r^{5/2} \equiv 0,8(r^{5/2} - l^{5/2}), \quad r \in (0, l].$$

Тепер розв'яжемо задачу (61), (62). Повний загальний розв'язок рівняння (61) має вигляд

$$z = A_6 r^3 + B_6 r^{-3}, \quad r \in (0, l], \quad A_6, B_6 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (62), отримаємо

$$B_6 = 0, \quad A_6 l^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A_6 = 2l^{-3}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_6(r) = 2l^{-3}r^3, \quad r \in (0, l].$$

Залишилося розв'язати задачу (63), (64). Повний загальний розв'язок рівняння (63) має вигляд

$$z = A_{11} r^5 + B_{11} r^{-5}, \quad r \in (0, l], \quad A_{11},\, B_{11} \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (62), отримаємо

$$B_{11} = 0, \quad A_{11} l^5 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad A_{11} = 5l^{-5}.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_{11}(r) = 5l^{-5}r^5, \quad r \in (0, l].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (56). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (41) – (43):

$$u(r,\theta) = \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}}(r^{5/2} - l^{5/2}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^3 \cos 3\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^5 \sin 5\theta, \quad r \in (0, l],\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Приклад № 2. Розв'язати задачу:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{65}$$

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{66}$$

$$u(l,\theta) = \varphi(\theta), \quad u|_{r=+\infty} < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{67}$$

де $l > 0$;

$$f(r,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{-3/2} \cos\theta, \quad r \in (l, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}} \sin 3\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо позначення

$$[l, +\infty) \ni r \to u(r) := u(r, \cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad (l, +\infty) \ni r \to f(r) := f(r, \cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\varphi := \varphi(\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (65) – (67) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (l, +\infty), \tag{68}$$

з крайовими умовами

$$u(l) = \varphi, \quad u(+\infty) < \infty. \tag{69}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k,\ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{70}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{71}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (71) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2 \, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2 \, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{72}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (71):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (71) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{73}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1(\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) + C_2(\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{74}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$(C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta) \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{75}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (75) у рівність (74). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (73) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{76}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (76) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (76), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta) \, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{77}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots\ . \tag{78}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{5}{\sqrt{\pi}} \sin 3\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1} \sin m\theta, \tag{79}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 4$, і $\widehat{\varphi}_7 = 5$;

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi}} r^{-5/2} \cos\theta =: f(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta,$$

$r \in (l, +\infty),\ \theta \in \mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_2(r) = (3/4) r^{-5/2},\ \widehat{f}_k(r) = 0,\ r \in (l, +\infty),\ k \neq 2$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (65) – (67) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{80}$$

$r \in (0, l],\ \theta \in \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (80) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (0, l), \tag{81}$$

$$z(l) = \widehat{\varphi}_k, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{82}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k,\ \widehat{f}_k,\ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_2,\ \widehat{\varphi}_7$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_2,\ \widehat{u}_7$ ряду (80) є відміними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_2$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{1}{r^2} z = \frac{3}{4} r^{-5/2}, \quad r \in (l, +\infty), \tag{83}$$

$$z(l) = 0, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{84}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_7$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{9}{r^2}z = 0, \quad r \in (l, +\infty), \tag{85}$$

$$z(l) = 5, \quad z(+\infty) < \infty, \tag{86}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (83), (84). Повний загальний розв'язок рівняння (83) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1}, \quad r \in [l, +\infty), \quad A_2, B_2 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_2 r^{-1/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (83):

$$(-1/2)(-3/2)b_2 r^{-5/2} - 1/2 b_2 r^{-5/2} - b_2 r^{-5/2} = \frac{3}{4}r^{-5/2} \,\Big|\, : r^{-5/2} \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 = -1.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (83) має вигляд $z = -r^{-1/2}, \ \ r \in [l, +\infty)$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (83) має вигляд

$$z = A_2 r + B_2 r^{-1} - r^{-1/2}, \ \ r \in [l, +\infty).$$

Знаходимо, підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, значення A_2, B_2:

$$A_2 = 0, \quad B_2 l^{-1} - l^{-1/2} = 0 \ \Rightarrow \ B_2 = l^{1/2},$$

тобто

$$\widehat{u}_2(r) = l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}, \ \ r \in [l, +\infty).$$

Тепер розв'яжемо задачу (85), (86). Повний загальний розв'язок рівняння (85) має вигляд

$$z = A_7 r^3 + B_7 r^{-3}, \quad r \in [l, +\infty), \quad A_7, B_7 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (86), отримаємо

$$z(+\infty) < \infty \quad \Rightarrow \quad A_7 = 0, \quad z(l) = 5 \quad \Rightarrow \quad B_7 l^{-3} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad B_7 = 5l^3.$$

Отже, маємо

$$\widehat{u}_7(r) = 5l^3 r^{-3}, \quad r \in [l, +\infty).$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k, \ k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (80). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (65) – (67):

$$u(r, \theta) = \frac{l^{1/2} r^{-1} - r^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\theta + \frac{5}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{l}{r}\right)^3 \sin 3\theta, \quad r \in [l, +\infty), \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Приклад № 3. Розв'язати задачу:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r,\theta), \quad r \in (l_1, l_2),\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{87}$$

$$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \quad r \in [l_1, l_2],\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{88}$$

$$u(l_1,\theta) = \varphi(\theta), \quad u_r(l_2,\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{89}$$

де $0 < l_1 < l_2 < +\infty$;

$$f(r,\theta) = \frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2}\cos 2\theta, \quad r \in (l_1, l_2),\ \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi(\theta) = \frac{7}{\sqrt{\pi}}\sin 4\theta, \quad \psi(\theta) = 0, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розв'язування.
1-ий крок. Визначимо оператор

$$A : D(A) \to L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$$

за правилом

$$D(A) = H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A),$$

та введемо позначення

$$[l_1, l_2] \ni r \to u(r) := u(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}), \quad (l_1, l_2) \ni r \to f(r) := f(r,\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}),$$

$$\varphi := \varphi(\cdot),\ \psi := \psi(\cdot) \in L_{2,2\pi}(\mathbb{R}).$$

Тоді сильно узагальнений розв'язок задачі (87) – (89) шукаємо як слабкий розв'язок крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}Au = f(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{90}$$

з крайовими умовами

$$u(l_1) = \varphi, \quad u'(l_2) = \psi. \tag{91}$$

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$ і числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені з власних елементів і власних значень оператора A так, що $Aw_k = \lambda_k w_k,\ k \in \mathbb{N}$. Для цього зауважимо, що операторне рівняння $Aw = \lambda w$ еквівалентне задачі

$$-w'' = \lambda w, \quad w(\theta) = w(\theta + 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{92}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ, при яких існують ненульові 2π-періодичні розв'язки рівняння

$$w'' + \lambda w = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{93}$$

Оскільки значення λ можуть бути тільки невід'ємними, то розглянемо два випадки: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

Спочатку розглянемо перший випадок. Отож, нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$w'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1\theta + C_2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок рівняння (93) при $\lambda = 0$.

З умови періодичності отримуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тобто нуль є власним значенням. Визначимо C_2, використовуючи умову нормування $\int_0^{2\pi} |w(\theta)|^2\, d\theta = 1$. Отже, маємо $\int_0^{2\pi} |C_2|^2\, d\theta = 1$, звідки $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тобто

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{94}$$

відповідно, власне значення і відповідна йому власна функція.

Тепер нехай $\lambda > 0$. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння для рівняння (93):

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i\,.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння (93) має вигляд

$$w(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{95}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З умови періодичності маємо

$$C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\big[\cos\sqrt{\lambda}\theta - \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] + C_2\big[\sin\sqrt{\lambda}\theta - \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)\big] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{96}$$

Після спрощення з використанням тригонометричних формул, отримаємо

$$[C_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta] \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

що рівносильно рівнянню $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, звідки маємо

$$\sqrt{\lambda}\pi = m\pi \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m^2, \;\; m \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\lambda_m^* := m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{97}$$

– власні значення оператора A.

Підставимо знайдені власні значення (97) у рівність (96). З отриманого співвідношення для знаходження C_1, C_2 бачимо, що значення шуканих величин C_1, C_2 можуть бути довільними. Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (95) отримаємо сім'ю всеможливих власних елементів оператора A, що відповідають власному значенню $\lambda_m^* = m^2$ у вигляді

$$w(x) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta, \;\; \theta \in \mathbb{R}, \tag{98}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З (98) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ власний підпростір, що відповідає власному значенню λ_m^*, є двовимірним і ортонормованою базою в ньому є функції

$$w_{2m}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

які ми отримаємо з (98), відповідно, при $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = 0$ і $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Множник $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ отримуємо з умови нормування $\int_0^{2\pi} w^2(\theta)\, d\theta = 1$. Приймемо

$$\lambda_{2m} := m^2, \quad \lambda_{2m+1} := m^2.$$

Зауважимо, що тоді

$$w''_{2m}(\theta) = -\lambda_{2m} w_{2m}(\theta), \quad w''_{2m+1}(\theta) = -\lambda_{2m+1} w_{2m+1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Як легко переконатися, ортонормованою базою в $L_{2,2\pi}(\mathbb{R})$, складеною з власних елементів оператора A, є функції

$$\begin{gathered} w_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad w_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\theta, \quad w_3(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta, \ldots, \\ w_{2m}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta, \quad w_{2m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m\theta, \ldots, \quad \theta \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{99}$$

а числовою послідовністю $\{\lambda_k\}$, складеною з власних значень оператора A, для якої

$$w''_k = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

є така:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1, \ldots, \lambda_{2m} = m^2, \quad \lambda_{2m+1} = m^2, \ldots \ . \tag{100}$$

3-ій крок. Розвинемо в ряди Фур'є вхідні дані за ортонормованою базою $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\frac{7}{\sqrt{\pi}} \sin 4\theta =: \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\varphi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\varphi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{101}$$

де $\widehat{\varphi}_k = 0$, якщо $k \neq 9$, і $\widehat{\varphi}_9 = 7$;

$$0 =: \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{2m} \cos m\theta + \widehat{\psi}_{2m+1} \sin m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{102}$$

де $\widehat{\psi}_k = 0, \ k \in \mathbb{N}$;

$$\frac{9}{\sqrt{\pi}} r^{1/2} \cos 2\theta =: f(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{f}_{2m+1}(r) \sin m\theta,$$

$r \in (l_1, l_2), \ \theta \in \mathbb{R}$,
де $\widehat{f}_4(r) = 9r^{1/2}, \ \widehat{f}_k(r) = 0, \ r \in (l_1, l_2), \ k \neq 4$.

4-ий крок. Розв'язок задачі (87) – (89) шукаємо у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(r) w_k(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{u}_1(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{u}_{2m}(r) \cos m\theta + \widehat{u}_{2m+1}(r) \sin m\theta, \tag{103}$$

$r \in (l_1, l_2), \ \theta \in \mathbb{R}$,
де для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнт $\widehat{u}_k$ ряду (103) є розв'язком задачі

$$z'' + \frac{1}{r} z' - \frac{m^2}{r^2} z = \widehat{f}_k(r), \quad r \in (l_1, l_2), \tag{104}$$

$$z(l_1) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(l_2) = \widehat{\psi}_k, \tag{105}$$

де $m := [k/2]$ (як відомо, $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$).

Оскільки серед коефіцієнтів $\widehat{\varphi}_k, \widehat{\psi}_k, \ \widehat{f}_k, \ k \in \mathbb{N}$, розвинення вхідних даних ненульовими є тільки $\widehat{f}_4, \ \widehat{\varphi}_9$, то тільки коефіцієнти $\widehat{u}_4, \ \widehat{u}_9$ ряду (103) є відміними від нуля.

Отож, коефіцієнт $\widehat{u}_4$ знаходимо як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{4}{r^2}z = 9r^{1/2}, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{106}$$

$$z(l_1) = 0, \quad z'(l_2) = 0, \tag{107}$$

коефіцієнт $\widehat{u}_9$ – як розв'язок задачі

$$z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{16}{r^2}z = 0, \quad r \in (l_1, l_2), \tag{108}$$

$$z(l_1) = 7, \quad z'(l_2) = 0. \tag{109}$$

Розв'яжемо ці задачі. Почнемо із задачі (106), (107). Повний загальний розв'язок рівняння (106) має вигляд

$$z = A_4 r^2 + B_4 r^{-2}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_4, B_4 \text{ – довільні сталі.}$$

Знайдемо частковий розв'язок даного рівняння методом неозначених коефіцієнтів, записавши проєкт часткового розв'язку у вигляді

$$z = b_4 r^{5/2}.$$

Підставимо цей проєкт у рівняння (106):

$$(5/2)(3/2)b_4 r^{1/2} + 5/2 b_4 r^{1/2} - 4b_4 r^{1/2} = 9r^{1/2} \;\Big|\; : r^{1/2} \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad b_4 = 4.$$

Отож, частковий розв'язок рівняння (106) має вигляд $z = 4r^{5/2}$, $r \in [l_1, l_2]$, а значить, повний загальний розв'язок рівняння (106) має вигляд

$$z = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку в крайові умови, отримуємо систему рівнянь для знаходження значень A_4, B_4:

$$A_4 l_1^2 + B_4 l_1^{-2} + 4l_1^{5/2} = 0, \quad 2A_4 l_1 - 2B_4 l_2^{-3} + 10 l_2^{3/2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad l_1^2 A_4 + l_1^{-2} B_4 = -4 l_1^{5/2}, \quad 2l_1 A_4 - 2l_2^{-3} B_4 = -10 l_2^{3/2}.$$

Звідси знаходимо значення A_4, B_4 і записуємо

$$\widehat{u}_4(r) = A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Тепер розв'язуємо задачу (108), (109). Повний загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$z = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2], \quad A_9, B_9 \text{ – довільні сталі.}$$

Підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови (109), отримаємо

$$A_9 l_1^4 + B_9 l_1^{-4} = 7, \quad 4A_9 l_2^3 - 4B_9 l_2^{-5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_1^4 A_9 + l_1^{-4} B_9 = 7, \quad 4l_2^3 A_9 - 4l_2^{-5} B_9 = 0.$$

Звідси знаходимо значення A_9, B_9 і записуємо

$$\widehat{u}_9(r) = A_9 r^4 + B_9 r^{-4}, \quad r \in [l_1, l_2].$$

Підставимо отримані вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, у ряд Фур'є (103). У результаті одержимо класичний розв'язок задачі (87) – (89):

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(A_4 r^2 + B_4 r^{-2} + 4r^{5/2})\cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(A_9 r^4 + B_9 r^{-4}\big)\sin 4\theta, \quad r \in [l_1, l_2], \; \theta \in \mathbb{R}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати крайові задачі для рівнянь еліптичного типу:

1) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

2) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad u_r\,|_{r=l} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin^3\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

3) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty,\quad (u_r + 2u)\,|_{r=l} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cos 4\theta,\quad r \in (0,l),\ \theta \in \mathbb{R}.$

4) $\Delta u = 0\,;\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l_1} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sin 2\theta,\quad u\,|_{r=l_2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\cos^2\theta,\quad r \in (l_1,l_2),\ \theta \in \mathbb{R}.$

5) $\Delta u = 0\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta,\quad u\,|_{r=+\infty} < \infty,\qquad r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$

6) $\Delta u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{1/2}\cos 2\theta\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^4\theta,\quad u\,|_{r=+\infty} < \infty,$
$r \in (l,+\infty),\ \theta \in \mathbb{R}.$

7) $\Delta u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r^{1/2}\cos 2\theta\,;\quad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi),\quad u\,|_{r=0} < \infty, u\,|_{r=l} = \psi(\theta),$
$r \in (0,l)$, $\theta \in \mathbb{R}$, де $\psi \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, причому $\psi(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$, якщо $\theta \in [0,2\pi]$.