Практичне заняття № 17

Крайові задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області. Метод Фур'є

Завдання: Нехай $p > 0,\ q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{2}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$

- $\omega, \sigma \in L_2(0,q),\ \varphi, \psi \in L_2(0,p),\ f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Крайову задачу для рівняння Пуассона далі коротко називатимемо задачею (1), (2).

Зауважимо, що крайові умови (2) задані на межі області Ω, яка є прямокутником, тобто на сторонах прямокутника. Цих умов є чотири (відповідно до сторін прямокутника) і ми будемо розрізняти дві пари крайових умов: перша – умови на вертикальних сторонах, тобто при $x = 0$ та $x = p$ (вони записані в першому рядку формулювання умов (2)), друга – умови на горизонтальних сторонах, тобто при $y = 0$ та $y = q$ (вони записані в другому рядку формулювання умов (2)). Для безпосереднього застосування методу рядів Фур'є потрібно, щоби одна з пар крайових умов була однорідною, тобто або $\omega = 0$ і $\sigma = 0$, або $\varphi = 0$ і $\psi = 0$. Якщо це не так, то потрібно або зробити заміну шуканої функції на іншу, для якої задача буде ідентичною до даної, але з парою однорідних умов, або розбити дану задачу на дві ідентичні з даною, але які мають хоча би одній парі однорідних крайових умов. Детальніше про це скажемо пізніше, а зараз розглянемо задачу (1), (2), коли $\omega = 0, \sigma = 0$, і покажемо як її розв'язувати.

Завдання I: Нехай $p > 0,\ q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0,p], \end{cases} \tag{4}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0\ ,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0\ ,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$

- $\varphi, \psi \in L_2(0,p),\ f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(p) + \beta_1 v(p) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{5}$$

а також позначення:

$$[0,q] \ni y \mapsto u(y) := u(x,y),\ x \in [0,p]; \quad (0,q) \ni y \mapsto f(y) := f(x,y),\ x \in (0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,p].$$

Отже, задача (3), (4) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y \in (0,q), \tag{6}$$

$$\gamma_0 u'(0) + \delta_0 u(0) = \varphi, \quad \gamma_1 u'(q) + \delta_1 u(q) = \psi. \tag{7}$$

Сильно узагальнений розв'язок задачі (3), (4) будемо шукати за схемою відшукання слабкого розв'язку задачі (6), (7).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,p)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,p), \tag{8}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(p) + \beta_1 w(p) = 0. \tag{9}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (8), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (9), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2([0,p])$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p], \tag{11}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{12}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^p \varphi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^p \psi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{f}_k(y) := \int_0^p f(x,y) w_k(x)\,dx,\ y \in (0,q). \tag{13}$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (3), (4) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \overline{\Omega} = [0,p] \times [0,q], \tag{14}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y) = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (14) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (3) і другу пару крайових умов (4) замість u (перша пара крайових умов (4) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (11) — (13)) і рівності (10), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(y) - \lambda_k \widehat{u}_k(y)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_0 \widehat{u}_k'(0) + \delta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\gamma_1 \widehat{u}_k'(p) + \delta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (15).

Дивлячись на рівності (15), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(y), \quad y \in (0,q), \\ \gamma_0 z'(0) + \delta_0 z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \gamma_1 z'(q) + \delta_1 z(q) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{16}$$

Розв'язуємо задачу (16) при довільно вибраному і зафіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (16) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{17}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (16).

Рівняння (17) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння: $\mu^2 - \lambda_k = 0$. Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}y}, \quad y \in [0,q], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k y + B_k, \quad y \in [0,q], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (16). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(y) e^{-\sqrt{\lambda_k}y} + b_k(y) e^{\sqrt{\lambda_k}y}, \quad y \in [0,q],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(y) \\ b_k'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(y) \end{pmatrix}, \quad y \in [0,q].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(y)$ і $b_k'(y)$ для довільного фіксованого $y \in [0,q]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(y) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k}y} \\ \widehat{f}_k(y) & \sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}y} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k}y}\widehat{f}_k(y),$$

$$\triangle_{2,k}(y) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}y} & \widehat{f}_k(y) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}y}\widehat{f}_k(y), \quad y \in [0,q].$$

Звідси маємо

$$a_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^y e^{\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad b_k(y) = \frac{\triangle_{1,k}(y)}{\triangle_k(y)} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_y^q e^{-\sqrt{\lambda_k}s}\widehat{f}_k(s)\,ds,$$

$y \in [0,q]$, а значить, функція $z = \overset{*}{z}(y)$, $y \in [0,q]$, де

$$\overset{*}{z}(y) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^y e^{-\sqrt{\lambda_k}(y-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_y^q e^{\sqrt{\lambda_k}(y-s)}\widehat{f}_k(s)\,ds, \quad y \in [0,q],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (16). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (16) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}(y), \quad y \in [0, q]. \tag{18}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} y} + \overset{*}{z}{}'(y), \quad y \in [0, q]. \tag{19}$$

З крайових умов задачі (16), врахувавши (18), (19), маємо

$$\gamma_0 \big(- A_k \sqrt{\lambda_k} + B_k \sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0) \big) + \delta_0 \big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0) \big) = \widehat{\varphi}_k,$$

$$\gamma_1 \big(- A_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}{}'(q) \big) + \delta_1 \big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} + \overset{*}{z}(q) \big) = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k} A_k + d_{1,k} B_k = P_k \\ c_{2,k} A_k + d_{2,k} B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Підставивши (20) в (18), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, коефіцієнтів ряду (14). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (14) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. □

Завдання II: Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0, p) \times (0, q)$. Знайти *сильно узагальнений* розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{21}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in [0, q], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad x \in (0, p), \end{cases} \tag{22}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| > 0$, $|\gamma_1| + |\delta_1| > 0$,
  $\alpha_0 \beta_0 \leq 0$, $\alpha_1 \beta_1 \geq 0$, $\gamma_0 \delta_0 \leq 0$, $\gamma_1 \delta_1 \geq 0$,

- $\omega, \sigma \in L_2(0, q)$, $f \in L_2(\Omega)$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Для знаходження сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області зводимо її до крайової задачі для відповідного диференціально-операторного рівняння і знаходимо слабкий розв'язок цієї задачі. Запишемо ту крайову задачу для диференціально-операторного рівняння, до якої зводиться дана задача. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,q)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,q) \mid \gamma_0 v'(0) + \delta_0 v(0) = 0,\ \gamma_1 v'(q) + \delta_1 v(q) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{23}$$

а також позначення:

$$[0,p] \ni x \mapsto u(x) := u(x,y),\ y \in [0,q]; \quad (0,p) \ni x \mapsto f(x) := f(x,y),\ y \in (0,q);$$

$$\omega := \omega(y), \quad \sigma := \sigma(y), \quad x \in [0,q].$$

Отже, задача (21), (22) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(x), \quad x \in (0,p), \tag{24}$$

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \omega, \quad \alpha_1 u'(p) + \beta_1 u(p) = \sigma. \tag{25}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (21), (22), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (24), (25).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,q)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\delta_0 \neq 0$, або $\delta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\delta_0 = 0$ і $\delta_1 = 0$.

Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,q)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad y \in (0,q), \tag{26}$$

з крайовими умовами

$$\gamma_0 w'(0) + \delta_0 w(0) = 0, \quad \gamma_1 w'(q) + \delta_1 w(q) = 0. \tag{27}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (26), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0,$$

має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (27), а також шукаємо ці розв'язки, фактично, в просторі $C^2([0,q])$. Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7. Відмітимо, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\omega(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(y), \quad \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(y), \quad y \in [0,q], \tag{29}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{30}$$

де для кожного k маємо

$$\widehat{\omega}_k := \int_0^q \omega(y) w_k(y)\, dy, \quad \widehat{\sigma}_k := \int_0^q \sigma(y) w_k(y)\, dy, \quad \widehat{f}_k(x) := \int_0^q f(x,y) w_k(y)\, dy,\ x \in (0,p).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (21), (22) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{31}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x) = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p) = \widehat{\sigma}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (31) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (21) і першу пару крайових умов (22) замість u (друга пара крайових умов (22) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення ω, σ і f в ряди Фур'є (див. (29), (30)) і рівності (28), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(x) - \lambda_k \widehat{u}_k(x)\right] w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(x) w_k(y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_0 \widehat{u}_k'(0) + \beta_0 \widehat{u}_k(0)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\omega}_k w_k(y), \quad y \in [0,q],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_1 \widehat{u}_k'(p) + \beta_1 \widehat{u}_k(p)\big) w_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\sigma}_k w_k(y), \quad y \in [0,q].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (55).

Дивлячись на рівності (55), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' - \lambda_k z = \widehat{f}_k(x), \quad x \in (0,p), \\ \alpha_0 z'(0) + \beta_0 z(0) = \widehat{\omega}_k, \quad \alpha_1 z'(p) + \beta_1 z(p) = \widehat{\sigma}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Розв'язуємо задачу (33) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k \in \mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки рівняння задачі (33) є лінійним рівнянням, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z'' - \lambda_k z = 0, \tag{34}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (33).

Рівняння (34) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння: $\mu^2 - \lambda_k = 0$. Коренями характеристичного рівняння є числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, якщо $\lambda_k > 0$, і $\mu_1 = 0$, якщо $\lambda_k = 0$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k > 0,$$

і

$$z = A_k x + B_k, \quad x \in [0,p], \quad \text{якщо } \lambda_k = 0,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Далі знаходимо частковий розв'язок рівняння задачі (33). Використаємо метод варіації сталих, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$z = a_k(x) e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + b_k(x) e^{\sqrt{\lambda_k}x}, \quad x \in [0,p],$$

де a_k, b_k – функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \sqrt{\lambda_k} e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k'(x) \\ b_k'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{f}_k(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0,p].$$

Потрактувавши цю систему як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k'(x)$ і $b_k'(x)$ для довільного фіксованого $x \in [0,p]$, розв'яжемо її методом Крамера:

$$\triangle_k(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda_k},$$

$$\triangle_{1,k}(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{\lambda_k}x} \\ \widehat{f}_k(x) & \omega_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{\lambda_k}x} \widehat{f}_k(x),$$

$$\triangle_{2,k}(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} & \widehat{f}_k(x) \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}x} \widehat{f}_k(x), \quad x \in [0,p].$$

Звідси маємо

$$a_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{\sqrt{\lambda_k}s} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad b_k(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{-\sqrt{\lambda_k}s} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad x \in [0,p],$$

а значить, функція $z = \overset{*}{z}(x),\ x \in [0,p]$, де

$$\overset{*}{z}(x) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^x e^{-\sqrt{\lambda_k}(x-s)} \widehat{f}_k(s)\, ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_x^q e^{\sqrt{\lambda_k}(x-s)} \widehat{f}_k(s)\, ds, \quad x \in [0,p],$$

– частковий розв'язок рівняння задачі (33). Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (33) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \overset{*}{z}(x), \quad x \in [0, p]. \tag{35}$$

Знайдемо

$$z' = -A_k\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + B_k\sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \overset{*}{z}{}'(x), \quad x \in [0, p]. \tag{36}$$

З крайових умов задачі (33), врахувавши (35), (36), маємо

$$\gamma_0\big(- A_k\sqrt{\lambda_k} + B_k\sqrt{\lambda_k} + \overset{*}{z}{}'(0)\big) + \delta_0\big(A_k + B_k + \overset{*}{z}(0)\big) = \widehat{\omega}_k,$$

$$\gamma_1\big(- A_k\sqrt{\lambda_k}e^{-\sqrt{\lambda_k}p} + B_k\sqrt{\lambda_k}e^{\sqrt{\lambda_k}p} + \overset{*}{z}{}'(p)\big) + \delta_1\big(A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k}p} + \overset{*}{z}(p)\big) = \widehat{\sigma}_k.$$

Звідси після спрощень і відповідних перепозначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих A_k, B_k:

$$\begin{cases} c_{1,k}A_k + d_{1,k}B_k = P_k \\ c_{2,k}A_k + d_{2,k}B_k = R_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} c_{1,k} & d_{1,k} \\ c_{2,k} & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{1,k} = \begin{vmatrix} P_k & d_{1,k} \\ R_k & d_{2,k} \end{vmatrix}, \quad \triangle_{2,k} = \begin{vmatrix} c_{1,k} & P_k \\ c_{2,k} & R_k \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k}, \quad B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Підставивши (37) в (35), отримаємо вирази $\widehat{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнтів ряду (54). При наших умовах на φ, ψ і f ряд (54) збігається в просторі $L_2(\Omega)$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона. □

Примітка. Якщо в задачі (1), (2) нема жодної пари однорідних умов, тобто котрась із функцій φ або ψ і яка-небудь із функцій ω або σ відмінні від нуля, то можна зробити одне із двох: 1) ввести нову невідому функцію $\widetilde{u}$ за правилом $u = \widetilde{u} + \widetilde{w}$, де $\widetilde{w}$ – задана функція, що задовольняє одну з пар крайових умов (ця функція вибирається цілком аналогічно як на практичному занятті №14); 2) подати розв'язок даної задачі як суму розв'язків подібних задач, але з потрібними для реалізації методу рядів Фур'є крайовими умовами, а точніше, шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u = u_1 + u_2,$$

де u_1 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{1,xx} + u_{1,yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{1,x} + \beta_0 u_1)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_{1,x} + \beta_1 u_1)|_{x=p} = 0, \quad y \in (0, q), \\ (\gamma_0 u_{1,y} + \delta_0 u_1)|_{y=0} = \varphi(x), \quad (\gamma_1 u_{1,y} + \delta_1 u_1)|_{y=q} = \psi(x), \quad x \in [0, p], \end{cases}$$

а u_2 – *сильно узагальнений* розв'язок задачі

$$u_{2,xx} + u_{2,yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_{2,x} + \beta_0 u_2)|_{x=0} = \omega(y), \quad (\alpha_1 u_{2,x} + \beta_1 u_2)|_{x=p} = \sigma(y), \quad y \in (0, q), \\ (\gamma_0 u_{2,y} + \delta_0 u_2)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_{2,y} + \delta_1 u_2)|_{y=q} = 0, \quad x \in [0, p]. \end{cases}$$

Приклад розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $p > 0$, $q > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p) \times (0,q)$. Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона в прямокутній області $\Omega := (0,p) \times (0,q)$:*

$$u_{xx} + u_{yy} = x\cos 2y, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{38}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad y \in (0,q), \\ u|_{y=0} = x+1, \quad u|_{y=q} = 2, \quad x \in [0,p]. \end{cases} \tag{39}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(x,y) := x\cos 2y, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad \varphi(x) := x+1, \quad \psi(x) := 2, \quad x \in [0,p],$$

і зведемо задачу (38), (39) до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,p)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,p) \mid v(0) = 0, \ v'(p) = 0\},$$

$$Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \tag{40}$$

а також позначення:

$$[0,q] \ni y \mapsto u(y) := u(x,y), \ x \in [0,p]; \quad (0,q) \ni y \mapsto f(y) := f(x,y), \ x \in (0,p);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,p].$$

Отже, задача (38), (39) зводиться до крайової задачі для диференціально-операторного рівняння

$$u'' - Au = f(y), \quad y \in (0,q), \tag{41}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(q) = \psi. \tag{42}$$

Будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (38) – (39), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (41), (42).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(0,p)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,p)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,p), \\ w(0) = 0, \quad w'(p) = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення параметра λ такі, що задача (43) має ненульові розв'язки в просторі $C^2([0,p])$. Як відомо, ці значення можуть бути тільки серед додатних чисел. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (43), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{44}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння, врахувавши, що $\lambda > 0$:

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (44) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, p], \tag{45}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, p], \tag{46}$$

і підставимо вирази (45) і (46) в крайові умови задачі (43):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(p) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}p + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}p = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (47) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (47) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}p = 0. \tag{48}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}p = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{49}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (45) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, p], \tag{50}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^p |w_k|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, p)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}x, \quad x \in [0, p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Очевидно, що

$$w_k'' = -\lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p], \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,p],$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(y) w_k(x), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{53}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int\limits_0^p \varphi(x) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p (x+1) \sin\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x\,dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \Big((x+1)\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x \Big|_0^p - \int\limits_0^p \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x\,dx \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2l}{(-\pi+2\pi k)} \Big(-1 - \frac{2p}{-\pi+2\pi k} \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x \Big|_0^p \Big) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \Big(-1 - (-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi+2\pi k} \Big) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \Big(1 + (-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi+2\pi k} \Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^p \psi(x) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p 2 \cdot \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x\,dx =$$

$$= -2\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x \Big|_0^p = 2\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)},$$

$$\widehat{f}_k(y) := \int_0^p f(x,y) w_k(x)\,dx = \int_0^p f(x,y) w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^l x \cos 2y \cdot \sin\sqrt{\lambda_k} x\,dx =$$

$$= \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^p x \sin\sqrt{\lambda_k} x\,dx = \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \int\limits_0^l x \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x\,dx =$$

$$= -\cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \Big(x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x \Big|_0^p - \int\limits_0^p \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2l} x\,dx \Big) =$$

$$= -\cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} \Big(0 - \frac{2p}{-\pi+2\pi k} \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p} x \Big|_0^p \Big) =$$

$$= \cos 2y \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2p}{(-\pi+2\pi k)} ((-1)^{k+1} \frac{2p}{-\pi+2\pi k}) = (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{p}} \Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k} \Big)^2 \cdot \cos 2y =$$

$$= a_k \cdot \cos 2y, \quad y \in (0,q), \quad \text{де} \quad a_k := (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{p}} \Big(\frac{2p}{-\pi+2\pi k} \Big)^2.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (38), (39) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(y)w_k(x), \quad (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{54}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(y)-\lambda_k\widehat{u}_k(y)=\widehat{f}_k(y), \quad y\in(0,q),\\ \widehat{u}_k(0)=\widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k(q)=\widehat{\psi}_k,\end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{55}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (54) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (21) і другу пару крайових умов (22) замість u (перша пара крайових умов (22) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k\in\mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (29)) і рівності (52), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(y)-\lambda_k\widehat{u}_k(y)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(y)w_k(x), \quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x\in[0,p],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(q)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x\in[0,p].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (55).

Дивлячись на рівності (55) і вираз $\widehat{f}_k$, бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases}z''-\lambda_k z=a_k\cos 2y, \quad y\in(0,q),\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k, \quad z(q)=\widehat{\psi}_k.\end{cases} \tag{56}$$

Розв'яжемо задачу (56) при довільно вибраному і фіксованому значенню $k\in\mathbb{N}$. Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (56). Оскільки це рівняння є лінійним, то його повний загальний розв'язок буде сумою повного загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$z''-\lambda_k z=0, \tag{57}$$

і часткового розв'язку рівняння задачі (56).

Рівняння (57) є лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а тому для знаходження повного загального розв'язку цього рівняння нам потрібно розв'язати його характеристичне рівняння:

$$\mu^2-\lambda_k=0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2}=\pm\lambda_k.$$

Отож, повний загальний розв'язок рівняння задачі (56) має вигляд

$$z=A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}y}+B_k e^{\sqrt{\lambda_k}y}, \quad y\in[0,q],$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Знайдемо частковий розв'язок рівняння задачі (56). Оскільки вільний член цього рівняння є квазімногочленом, то використаємо метод неозначених коефіцієнтів. Отож, записуємо проєкт часткового розв'язку рівняння задачі (56) у вигляді

$$z = b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{58}$$

де b_k – поки що неозначений коефіцієнт, значення якого знаходимо за умови, що дана функція є розв'язком нашого рівняння. Для знаходження значення b_k підставимо проєкт розв'язку в рівняння задачі (56):

$$-4b_k \cos 2y - \lambda_k b_k \cos 2y = a_k \cos 2y \quad \Rightarrow \quad -(\lambda_k + 4)b_k = a_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_k = -\frac{a_k}{\lambda_k + 4}.$$

Підставивши знайдене значення b_k у вираз (58), отримаємо частковий розв'язок рівняння задачі (56).

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (56) має вигляд

$$z = A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + b_k \cos 2y, \quad y \in [0, q]. \tag{59}$$

З крайових умов задачі (56) маємо

$$z(0) = \widehat{\varphi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k + B_k = \widehat{\varphi}_k - b_k,$$

$$z(q) = \widehat{\psi}_k \;\; \Rightarrow \;\; A_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q} + B_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} = \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Введемо позначення:

$$P_k := \widehat{\varphi}_k - b_k, \quad R_k := \widehat{\psi}_k - b_k \cos 2q.$$

Отже, значення A_k і B_k знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_k + B_k = P_k \\ e^{-\omega_k T} A_k + e^{\omega_k T} B_k = R_k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ R_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера. Знаходимо

$$\triangle_k := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda_k} q} - e^{-\sqrt{\lambda_k} q} = e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big) \neq 0 \;\; \text{оскільки} \sqrt{\lambda_k} \neq 0,$$

$$\triangle_{1,k} := \begin{vmatrix} P_k & 1 \\ R_k & e^{\sqrt{\lambda_k} q} \end{vmatrix} = P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k, \quad \triangle_{2,k} := \begin{vmatrix} 1 & P_k \\ e^{-\sqrt{\lambda_k} q} & R_k \end{vmatrix} = R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}.$$

Отже,

$$A_k = \frac{\triangle_{1,k}}{\triangle_k} = \frac{P_k e^{\sqrt{\lambda_k} q} - R_k}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}}, \tag{60}$$

$$B_k = \frac{\triangle_{2,k}}{\triangle_k} = \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{e^{\sqrt{\lambda_k} q}\big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}\big)} \equiv \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

На підставі (60) і (61) з (59) отримаємо

$$\widehat{u}_k(y) = \frac{P_k - R_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k} y} + \frac{R_k - P_k e^{-\sqrt{\lambda_k} q}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_k} q}} e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)} - \frac{a_k}{\lambda_k + 4} \cos 2y, \quad y \in [0, q], \tag{62}$$

– коефіцієнт ряду (54).

Отже, сильно узагальнений розв'язок крайової задачі (38), (39) (див. (54)) є сумою збіжного в просторі $L^2(\Omega)$ ряду

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{P_k-R_ke^{-\sqrt{\lambda_k}q}}{1-e^{-2\sqrt{\lambda_k}q}}e^{-\sqrt{\lambda_k}y}+\frac{R_k-P_ke^{-\sqrt{\lambda_k}q}}{1-e^{-2\sqrt{\lambda_k}q}}e^{-\sqrt{\lambda_k}(q-y)}-\frac{a_k}{\lambda_k+4}\cos 2y\Big]\sin\sqrt{\lambda_k}x, \tag{63}$$

$(x,y)\in\overline{\Omega}$, де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, a_k, P_k, R_k для кожних $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. □

Завдання для самостійної роботи

Нехай $p>0$, $q>0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p)\times(0,q)$. Знайти сильно узагальнені розв'язки крайових задач для рівняння Пуассона в прямокутній області:

1.

$$u_{xx}+u_{yy}=x^2+y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0}=2y, \quad u|_{x=p}=y, \quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=q}=0, \quad x\in[0,p];\end{cases}$$

2.

$$u_{xx}+u_{yy}=2x\cos 3y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=p}=0, \quad y\in(0,q),\\ u_y|_{y=0}=5\sin x, \quad u_y|_{y=q}=2x+1, \quad x\in[0,p];\end{cases}$$

3.

$$u_{xx}+u_{yy}=2xe^y,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=2y, \quad u|_{x=p}=\sin y, \quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=3\sin x, \quad u_y|_{y=q}=2, \quad x\in[0,p];\end{cases}$$

4.

$$u_{xx}+u_{yy}=2xy+1,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\begin{cases} (u_x-u)|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=p}=0, \quad y\in(0,q),\\ u|_{y=0}=2x+1, \quad u_y|_{y=q}=\cos x, \quad x\in[0,p].\end{cases}$$