Практичне заняття № 15

Мішані задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску. Метод Фур'є

I. Довідковий матеріал

1. *Рівнянням Бесселя* називають рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

де $\nu = \text{const} \geqslant 0$, x — незалежна змінна, що приймає значення в $\mathbb{R}$.

Оскільки коефіцієнт рівняння (1) при y'' в точці $x = 0$ перетворюється в нуль, то його розв'язки можуть мати особливості при $x = 0$. Враховуючи це, а також те, що ліва частина рівняння (1) не змінюється при заміні x на $-x$, приходимо до висновку, що нам достатньо розглядати це рівняння на промені $(0, +\infty)$.

Розв'язки рівняння (1) шукають, враховуючи його вироджуваність при $x = 0$, у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2}$$

де $\rho \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розв'язками рівняння (1) є функції Бесселя

$$J_{\pm\nu}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\pm\nu + m + 1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m\pm\nu}, \quad x \in (0, +\infty), \tag{3}$$

ν-го порядку, причому, коли ν – не ціле (і, очевидно, що додатне), то функції J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними, а коли $\nu = n \in \mathbb{N}$, то $J_{-n} = (-1)^n J_n$, звідки, зокрема, випливає, що J_n і J_{-n} є лінійно залежними. Тому вводять в розгляд функцію Вебера

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $\nu > 0$ – не ціле, і

$$Y_n(x) := \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \tag{4}$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

якщо $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Твердження 1. *Повний загальний розв'язок рівняння* (1) *на промені* $(0, +\infty)$ *має вигляд*

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1, C_2 \; \text{— довільні сталі.}$$

Зауваження 1. *Сім'я функцій Бесселя J_ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, володіє, зокрема, такими властивостями:*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{зокрема}, \quad J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(x^\rho J_\rho(x))' = x^\rho J_{\rho-1}(x), \quad \textit{зокрема}, \quad J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

$$J_{\rho+1}(x) = \frac{2\rho}{x} J_\rho(x) - J_{\rho-1}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

2. Нехай
- $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 < l^2\}$ – круг радіуса l з центром в початку координат,
- $\Gamma := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 = l^2\}$ – коло радіуса l з центром в початку координат (воно обмежує Ω),
- $Q := \Omega \times (0, T]$ – циліндр з основою Ω і твірною, паралельною осі t,
- $\Sigma := \Gamma \times (0, T]$ – бічна поверхня циліндра Q.

Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{5}$$

крайову умову

$$\text{або} \;\; u\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = \mu, \quad \text{або} \;\; \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\Big)\Big|_\Sigma = \mu \tag{6}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

де $a > 0$, $h > 0$, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, $f : Q \to \mathbb{R}$ – задані, $\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$, ν – одинична зовнішня нормаль до Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – похідна u по нормалі ν.

Нас цікавить проблема ***знаходження*** *сильно узагальненого* розв'язку задачі (5) — (7), якщо

$$\varphi \in L_2(\Omega), \quad f \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Перейдемо в цій задачі до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{8}$$

У результаті, врахувавши, що якщо $\widetilde{u}(r, \theta) := u(x_1, x_2)$, то

$$\Delta u = \widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta},$$

отримаємо ***задачу***: знайти функцію $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\widetilde{u}_{\theta\theta}\big) = \widetilde{f}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in \widetilde{Q} := (0, l) \times \mathbb{R} \times (0, T], \tag{9}$$

крайові умови

$$\widetilde{u}(r, \theta + 2\pi, t) = \widetilde{u}(r, \theta, t), \quad (r, \theta, t) \in (0, l] \times \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,\theta,t) < \infty, \quad (\alpha_1 \widetilde{u}_r + \beta_1 \widetilde{u})|_{r=l} = 0, \quad (\theta,t) \in \mathbb{R} \times (0,T], \tag{10}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \tag{11}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\widetilde{\varphi} : [0,l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f} : (0,l) \times \mathbb{R} \times (0,T] \to \mathbb{R}$ – задані функції, причому
  $\widetilde{\varphi}(r,\theta+2\pi) = \widetilde{\varphi}(r,\theta), \quad (r,\theta) \in (0,l] \times \mathbb{R}$,
  $\widetilde{f}(r,\theta+2\pi,t) = \widetilde{f}(r,\theta,t), \quad (r,\theta,t) \in (0,l] \times \mathbb{R} \times [0,T]$.

Увага!!! Далі будемо розглядати випадок, коли задані функції $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ явно від змінної θ не залежать. Тоді від цієї змінної не буде залежати і розв'язок $\widetilde{u}$ отриманої задачі, а отже, задача матиме простіший вигляд. Для її розв'язування використовують ваговий простір $L_2(\rho;0,l)$, де $\rho(r) := r,\ r \in (0,l)$, складений з вимірних функцій $v : (0,l) \to \mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr < \infty$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком і породженою ним нормою:

$$(v,w)_{L_2(\rho;\,0,\,l)} := \int\limits_0^l r v(r) w(r)\,dr, \quad \|v\|_{L_2(\rho;\,0,\,l)} := \Big(\int\limits_0^l r|v(r)|^2\,dr\Big)^{1/2}, \quad v,w \in L_2(\rho;0,l).$$

3. Далі розглядаємо ***задачу***, розв'язування якої є метою нашого заняття.

Нехай $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому диску* полягає у знаходженні функції $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = f(r,t), \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{12}$$

крайові умови

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{13}$$

та початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r \in [0,l], \tag{14}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R},\ f : Q \to \mathbb{R}$ – задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (12) — (14), якщо

$$\varphi \in L_2(\rho;0,l), \quad f \in C([0,T]; L_2(\rho;0,l)).$$

Схема розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho;0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho;0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v \in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad (\alpha_1 v' + \beta_1 v)|_{r=l} = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}),$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, задача (12) – (14) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{15}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{16}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) – це слабкий розв'язок задачі (15), (16). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (15), (16).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу $\{w_k\}$ в $L_2(\rho;0,l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}$, які складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' - \frac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \tag{17}$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{18}$$

Як уже говорилося раніше, задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (17) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (18), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* (і фактично розв'язуємо в просторі $C^2((0,l])$).

Покажемо, що всі власні значення оператора A є додатними, якщо $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_1 = 0$. Для цього домножимо рівняння (17) на r і врахувавши, що $rw'' + w' = (rw')'$, запишемо:

$$-(rw')' = \lambda r w, \quad r \in (0,l), \tag{19}$$

Нехай w – ненульовий розв'язок задачі (17), (18), тобто власний елемент оператора A. Домножимо рівність (19) на w і проінтегруємо здобуту рівність по проміжку $(0,l)$:

$$-\int_0^l (rw')'w\,dr = \lambda \int_0^l r|w|^2\,dr \quad \Leftrightarrow \quad -rw'w\Big|_0^l + \int_0^l r|w'|^2\,dr = \lambda \int_0^l r|w|^2\,dr.$$

Відмітимо, що $-rw'w\Big|_0^l \geqslant 0$. Справді, якщо або $\alpha_1 = 0$, або $\beta_1 = 0$, то, відповідно, або $w(l) = 0$, або $w'(0) = 0$, а отже, $-lw'(l)w(l) = 0$, а якщо $\alpha_1\beta_1 > 0$, то $-lw'(l)w(l) = \dfrac{l\beta_1}{\alpha_1}|w(l)|^2 \geqslant 0$. Враховуючи сказане, отримуємо

$$\lambda \geqslant \int\limits_0^l r|w'|^2\,dr \Big/ \int\limits_0^l r|w|^2\,dr \geqslant 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w'(r) = 0 \ \ \forall r \in [0,l] \quad \Leftrightarrow \ w(r) = C \ \ \forall r \in [0,l], \ \ \text{де } C \text{ – стала.}$$

На підставі цього і другої з крайових умов (18) отримуємо, що якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\lambda > 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, то $\lambda \geqslant 0$, зокрема, 0 є власним значенням.

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так. Перш за все зауважимо, що коли $\lambda = 0$, то з рівняння (19) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси ще раз випливає, що коли $\beta_1 \neq 0$, то $w \equiv 0$, а якщо $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int\limits_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int\limits_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, коли $\beta_1 = 0$, тобто друга з крайових умов (18) має вигляд $w'(l) = 0$, то маємо

$$\lambda_0 = 0, \quad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \ \ r \in [0,l]. \tag{20}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння (17) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0, +\infty), \tag{21}$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{22}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \ \ x = \sqrt{\lambda} r,$$

то

$$w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty). \tag{23}$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі,} \tag{24}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (21) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l], \quad C_1,\ C_2 \ \text{– довільні сталі.} \tag{25}$$

Легко знайти, що

$$w' = C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \sqrt{\lambda} Y_0'(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l],$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Враховуючи це (тобто, що $\lim\limits_{r \to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$), з першої з крайових умов (18) отримаємо $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов (18) маємо

$$C_1 \big[\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l)\big] = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{– довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$\alpha_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) + \beta_1 J_0(\sqrt{\lambda} l) = 0\,. \tag{26}$$

Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$\alpha_1 \frac{\mu}{l} J_0'(\mu) + \beta_1 J_0(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{27}$$

Як відомо, рівняння (27) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k \to \infty}{\to} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2,\ k \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (25))

$$w_k(r) := M_k J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad r \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ стала $M_k > 0$ така, що $\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2\, dr = 1$, тобто

$$M_k := 1 / \Big(\int\limits_0^l r \big|J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big)\big|^2\, dr \Big)^{1/2}.$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0, l], \quad f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \quad r \in (0, l),\ t \in [0, T], \tag{30}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l rf(r,t)w_k(r)\,dr, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (12) – (14) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{31}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (31) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (12) і початкові умови (14) замість u (крайові умови (13) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (30)) і те, що

$$w_k''(r) + \frac{1}{r}w_k'(r) = -\lambda_k w_k(r), \quad r \in [0,l],\ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0)w_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (32).

Дивлячись на рівності (32), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Очевидно, що рівняння задачі (33) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0, \quad t \in (0,T], \tag{34}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (33).

Спочатку для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (34). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z' + a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z = 0 \Leftrightarrow \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)' = 0 \Leftrightarrow e^{a^2\lambda_k t}z = A_k, \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

де A_k – довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (34) має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0,T], \tag{36}$$

де A_k – довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (33), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{37}$$

де A_k – довільна стала. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (33), отримаємо

$$A_k + \overset{*}{z}(0) = \widehat{\varphi}_k \quad \Rightarrow \quad A_k = \widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t), \quad t \in [0,T], \tag{38}$$

а значить, розв'язок нашої задачі має вигляд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \big[(\widehat{\varphi}_k - \overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t} + \overset{*}{z}(t)\big] J_0\Big(\frac{\mu_k}{l} r\Big), \quad (r,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{39}$$

При наших умовах на φ і f ряд (39) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(\rho; 0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. □

Зауваження 2. *Якщо маємо задачу*

$$\widetilde{u}_t - a^2(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r) = \widetilde{f}(r,t), \quad (r,t) \in Q, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1\widetilde{u}_r + \beta_1\widetilde{u})|_{r=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{41}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r), \quad r \in [0,l], \tag{42}$$

де

- $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – *сталі такі, що* $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \ \alpha_1\beta_1 \geq 0$,
- $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}, \ f : Q \to \mathbb{R}, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$ — *задані функції, причому* $\mu_1 \neq 0$, *тобто друга з крайових умов* (13) *є неоднорідною, то спочатку робимо*

0-ий крок. *Шукаємо функцію* $h \in H^2(Q)$, *яка задовольняє крайову умову* (41), *тобто*

$$(\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{43}$$

Функцію h *можна шукати у вигляді*

$$h(r,t) = a(t)r + b(t), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{44}$$

де $a, b \in H^2(0,T)$ – *функції від змінної* t, *які вибирають такими, щоби виконувалася умова* (43).

Для знаходження a *і* b *шукають похідну* $h_r(r,t) = a(t)$ *і підставляють вирази* h *і* h_r *в умову* (43):

$$\alpha_1 a(t) + \beta_1(la(t) + b(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T].$$

Звідси знаходять a *і* b. *Оскільки маємо одне рівняння, а невідомих функцій – дві, то одна з функцій* a, b *може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нулеві.*

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (40) – (48) *роблять заміну*

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{45}$$

де u – нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2\big[(u+h)_{rr} + \frac{1}{r}(u+h)_r\big] = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+}(u+h) < \infty, \quad (\alpha_1(u+h)_r + \beta_1(u+h))|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(r).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) - a^2(h_{rr} + \frac{1}{r}h_r) = \widetilde{f}(r,t),$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) + \lim_{r\to 0+} h(r,t) < \infty, \; (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} + (\alpha_1 h_r + \beta_1 h)|_{r=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \varphi(r).$$

Отож, врахувавши (43), *для нової невідомої функції u отримаємо задачу*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,t), \quad (r,t)\in Q, \tag{46}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (\alpha_1 u_r + \beta_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t\in(0,T], \tag{47}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad r\in[0,l], \tag{48}$$

де $f(r,t) := \widetilde{f}(r,t) - h_t(r,t) + a^2(h_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}h_r(r,t)), \quad \varphi(r) := \widetilde{\varphi}(r) - h(r,0).$

Відмітимо, що коли $\mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (40) – (48) *маємо $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{f} = f$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$) і починаємо з 1-го кроку.*

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l)\times(0,T]$. Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в круговому диску*

$$u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = r^2\cos 2t, \quad (r,t)\in Q, \tag{49}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r|_{r=l} = 0, \quad t\in(0,T], \tag{50}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad r\in[0,l]. \tag{51}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Позначимо

$$f(r,t) := r^2\cos 2t, \quad (r,t)\in Q, \qquad \varphi(r) := 1, \quad r\in[0,l],$$

і зведемо задачу (49) – (51) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\rho;0,l)$, як замикання оператора $\widetilde{A} : C^2([0,l]) \to L_2(\rho;0,l)$, визначеного за правилом:

$$D(\widetilde{A}) := \{v\in C^2([0,l]) \mid v'(0) = 0, \quad v'(l) = 0\},$$

$$\widetilde{A}v = -\big(v'' + \frac{1}{r}v'\big), \quad v \in D(\widetilde{A}), \tag{52}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(r,t),\ r \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(r,t),\ r \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(r), \quad r \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{53}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{54}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (53), (54).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2((0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' - \dfrac{1}{r}w' = \lambda w, \quad r \in (0,l), \\ \lim\limits_{r\to 0+} w(r) < \infty, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geqslant 0$ такі, що задача (55) має ненульові розв'язки. Перш за все зауважимо, що у випадку $\lambda = 0$ з рівняння задачі (55) (після множення на $-r$) маємо

$$(rw')' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rw' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad w' = \frac{C_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = C_1 \ln r + C_2, \quad r \in (0,l).$$

Звідси та з крайових умов випливає, що $w_0(r) = C_2$, де C_2 – стала, яка визначається з умови нормування

$$\int_0^l r|w_0(r)|^2\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2 \int_0^l r\,dr = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |C_2|^2\frac{l^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 := \frac{\sqrt{2}}{l}.$$

Отож, маємо

$$\lambda_0 = 0, \qquad w_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad r \in [0,l]. \tag{56}$$

Тепер розглянемо випадок $\lambda > 0$. Тоді, помноживши рівняння задачі (55) на r^2 та перенісши в ліву частину те, що стоїть в правій, отримаємо рівняння

$$r^2 w'' + rw' + \lambda r^2 w = 0, \quad r \in (0,+\infty),$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = \sqrt{\lambda} r. \tag{57}$$

Тоді, якщо

$$y(x) := w(r) \quad \text{при} \;\; x = \sqrt{\lambda}\, r,$$

то

$$w(r) = y(x), \quad w'(r) = y'(x) \cdot \sqrt{\lambda}, \quad w''(r) = y''(x) \cdot \lambda,$$

а отже, отримаємо рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Повний загальний розв'язок цього рівняння на промені $(0, +\infty)$ має вигляд

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \;\; C_1, \; C_2 \; \text{– довільні сталі,} \tag{58}$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, а Y_0 – функція Вебера нульового порядку.

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (55) має вигляд

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \quad r \in (0, l], \;\; C_1, \; C_2 \; \text{– довільні сталі.} \tag{59}$$

Як відомо, функція Бесселя в точці 0 має скінчене значення, а функція Вебера в точці 0 не визначена, а при наближенні аргументу до точки 0 значення функції Y_0 прямує до ∞. Тоді з першої з крайових умов задачі (55), зважаючи на те, що $\lim\limits_{r \to 0+} Y_0(\sqrt{\lambda} r) = \infty$, отримаємо, що $C_2 = 0$, C_1 – довільна стала, а з другої з крайових умов задачі (55) маємо

$$C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{ – довільна стала.}$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$J_0'(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_1(\sqrt{\lambda} l) = 0 \tag{60}$$

(тут використана рівність $J_0'(x) = -J_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$). Зробивши в цьому рівнянні заміну $\mu := \sqrt{\lambda} l$, отримаємо рівняння

$$J_1(\mu) = 0\,, \quad \mu > 0. \tag{61}$$

Як відомо, рівняння (61) має зліченну кількість коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, які можна записати в порядку зростання так

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots, \quad \text{причому } \mu_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Отже, серед додатних чисел власними значеннями є

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{62}$$

а відповідними їм власними функціями є (див. (59))

$$w_k(r) := C_1 J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big), \quad r \in [0, l], \; C_1 \neq 0 \text{ — довільна стала,} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{63}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо значення C_1 таким, щоби функція w_k була нормованою, тобто виконувалась умова

$$\int\limits_0^l r |w_k(r)|^2 \, dr \equiv C_1^2 \int\limits_0^l r \big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l} r\big)\big|^2 \, dr = 1. \tag{64}$$

Маємо

$$\int\limits_0^l r\big|J_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big)\big|^2\,dr = \Big[x = \frac{\mu_k}{l}r, \quad r = \frac{l}{\mu_n}x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\,dx\Big] = \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 \int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx.$$

Далі нам будуть потрібні такі відомі для функцій Бесселя рівності

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (xJ_1(x))' = xJ_0(x), \quad (x^2J_2(x))' = x^2J_1(x),$$

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Враховуючи це та використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x|J_0(x)|^2\,dx = \int\limits_0^{\mu_k} |J_0(x)|^2\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}|J_0(x)|^2\Big|_0^{\mu_k} - \int\limits_0^{\mu_k} x^2J_0(x)J_0'(x)\,dx =$$

$$= \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} + \int\limits_0^{\mu_k} xJ_1(x)\,d(xJ_1(x)) = \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} + \frac{|xJ_1(x)|^2}{2}\Big|_0^{\mu_k} = \frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2}.$$

Звідси та з (64) знаходимо

$$C_1^2\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\frac{|\mu_kJ_0(\mu_k)|^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\sqrt{2}}{lJ_0(\mu_k)} =: M_k.$$

Отож, власними функціями є

$$w_k(r) := M_kJ_0\big(\frac{\mu_k}{l}r\big), \quad r \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_kw_k(r), \quad r \in [0, l], \quad f(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(r), \quad r \in (0, l), \ t \in [0, T], \tag{66}$$

де

$$\widehat{\varphi}_0 := \int_0^l r\varphi(r)w_0(r)\,dr \ = \frac{\sqrt{2}l}{2},$$

а для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l r\varphi(r)w_k(r)\,dr \ = M_k\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_k}{l}r)\,dr =$$

$$\Big[\text{заміна}: \quad x = \frac{\mu_k}{l}r, \quad r = \frac{l}{\mu_n}x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\,dx\Big]$$

$$= M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k} xJ_0(x)\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2\int\limits_0^{\mu_k}(xJ_1(x))'\,dx = M_k\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 xJ_1(x)\Big|_0^{\mu_k} = 0\,,$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int_0^l rf(r, t)w_0(r)\,dr = \frac{\sqrt{2}}{l}\int_0^l r^3\cos 2t\,dr = \frac{\sqrt{2}l^3}{4}\cos 2t = a_0\cos 2t, \quad a_0 := \frac{\sqrt{2}l^3}{4},$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l r f(r,t) w_k(r)\, dr = M_k \int_0^l r \cdot r^2 \cos 2t \cdot J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr = \cos 2t \cdot M_k \int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr =$$
$$= a_k \cos 2t, \quad t \in [0,T],$$

де

$$a_k := M_k \int_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k}{l} r)\, dr = \Big[\text{заміна}: \quad x = \frac{\mu_k}{l} r, \quad r = \frac{l}{\mu_n} x, \quad dr = \frac{l}{\mu_k}\, dx\Big] =$$
$$= M_k \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^4 \int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx.$$

Знаходимо

$$\int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx = \int\limits_0^{\mu_k} x^2 (x J_1(x))'\, dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^{\mu_k} - 2 \int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx =$$

$$= -2 \int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx = -2 \int\limits_0^{\mu_k} (x^2 J_2(x))'\, dx = -2x^2 J_2(x)\Big|_0^{\mu_k} = -2(\mu_k)^2 J_2(\mu_k) =$$

$$= -2(\mu_k)^2 \big(\frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) - J_0(\mu_k)\big) = 2(\mu_k)^2 J_0(\mu_k).$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (49) – (51) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(r), \quad (r,t) \in \overline{Q}, \tag{67}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{68}$$

Умови (68) на коефіцієнти ряду (67) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (49) і умови (51), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (66)) і те, що

$$A w_k = \lambda_k w_k \quad \Rightarrow \quad w_k''(r) + \frac{1}{r} w_k' = -\lambda_k w_k(r), \quad r \in [0,l], \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(r), \quad (r,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(r), \quad r \in [0,l].$$

Звідси випливають рівності (68).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Дивлячись на рівності (68), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (67)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos 2t, \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k \,. \end{cases} \tag{69}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Перш за все розглянемо випадок $k = 0$. Оскільки $\lambda_0 = 0$, то рівняння задачі (69) має вигляд $z' = a_0 \cos 2t$, повний загальний якого має вигляд $z = \frac{a_0}{2} \sin 2t + A_0$, де A_0 — довільна стала. Звідси та з початковою умовою задачі (69) матимемо $z(0) \equiv A_0 = \varphi_0$. Отож, ми отримали

$$\widehat{u}_0(t) := \frac{a_0}{2} \sin 2t + \varphi_0, \quad t \in [0, T]. \tag{70}$$

Тепер розглянемо випадок $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times \frac{dt}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k \, dt, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = -a^2\lambda_k \, t + \ln|A_k|, \;\; z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k t}, \quad t \in [0, T], \quad A_k \in \mathbb{R} - \text{довільна стала}, \tag{71}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0, T],$$

де c_k, d_k – сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-2c_k \sin 2t + 2d_k \cos 2t + a^2\lambda_k(2c_k \cos 2t + 2d_k \sin 2t) = a_k \cos 2t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos 2t & : & 2a^2\lambda_k c_k + 2d_k = a_k \\ \sin 2t & : & -2c_k + 2a^2\lambda_k d_k = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & 2 \\ -2 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 4(a^4\lambda_k^2 + 1),$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 2 \\ 0 & 2a^2\lambda_k \end{vmatrix} = 2a^2\lambda_k a_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2a^2\lambda_k & a_k \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a_k}{2(a^4\lambda_k^2 + 1)}. \tag{72}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T], \quad A_k \in \mathbb{R} \text{ – довільна стала,}$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (69). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (49) – (51) є (див. (67)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(\rho;0,l))$ ряду

$$u(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{l}\Big[\frac{a_0}{2}\sin 2t + \varphi_0\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k t} + c_k \cos 2t + d_k \sin 2t\Big] J_0\Big(\frac{\sqrt{\lambda}_k}{l}r\Big),\ (r,t) \in \overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, c_k, d_k для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

□

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0,\ h_1 > 0$ – довільно задані і фіксовані числа. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в круговому диску:

1.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = t^2, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 4, \quad r \in [0,l].$$

2.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = e^{2t}, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad u_r(l,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = r^2 + 2, \quad r \in [0,l],$$

3.

$$u_t - a^2\big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big) = (r^2 - 1)e^t, \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} u(r,t) < \infty, \quad (u_r + h_1 u)|_{r=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 1, \quad r \in [0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2(t+1), \quad (r,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r,t) < \infty, \quad \widetilde{u}(l,t) = t, \quad t \in (0,T],$$

$$u|_{t=0} = 2, \quad r \in [0, l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = 2t^3, \quad (r, t) \in Q := (0, l) \times (0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r, t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l, t) = 5, \quad t \in (0, T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = l^2 - r^2, \quad r \in [0, l].$$

6.

$$\widetilde{u}_t - a^2\big(\widetilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{u}_r\big) = r^2 t, \quad (r, t) \in Q := (0, l) \times (0, T],$$

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{u}(r, t) < \infty, \quad \widetilde{u}_r(l, t) + h_1\widetilde{u}(l, t) = t, \quad t \in (0, T],$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 7, \quad r \in [0, l].$$

(Завдання №6 бажано зробити, але не обов'язково)