Практичне заняття № 14

Мішані задачі для рівняння теплопровідності в стержні. Метод Фур'є

Нехай $l > 0$, $T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння теплопровідності в стержні* полягає у знаходженні функції $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_t - a^2 \widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$(\alpha_0 \widetilde{u}_x + \beta_0 \widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 \widetilde{u}_x + \beta_1 \widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

та початкову умову

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \leqslant 0$, $\alpha_1\beta_1 \geqslant 0$,
- $\mu_0, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (1) — (3), якщо

$$\mu_0,\ \mu_1 \in H^2(0,T), \quad \widetilde{\varphi} \in L^2(0,l), \quad \widetilde{f} \in C([0,T]; L^2(0,l)).$$

Розв'язування.

0-ий крок. Цей крок робимо, якщо або $\mu_0 \neq 0$, або $\mu_1 \neq 0$ (крайові умови неоднорідні). Спочатку шукаємо функцію $h \in H^2(Q)$, яка задовольняє крайові умови (2), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{5}$$

де $p, q, r \in H^2(0,T)$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (4). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази h і h_x в умови (4):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2 p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною і її беремо рівною, як правило, нульовою.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (1) — (3) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{6}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_t - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$
$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_t + h_t - a^2u_{xx} - a^2h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0u_x + \beta_0u)|_{x=0} + (\alpha_0h_x + \beta_0h)|_{x=0} = \mu_0(t), \ (\alpha_1u_x + \beta_1u)|_{x=l} + (\alpha_1h_x + \beta_1h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$
$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x).$$

Отож, врахувавши (4), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_t - a^2u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$(\alpha_0u_x + \beta_0u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1u_x + \beta_1u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{9}$$

де $f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_t(x,t) + a^2h_{xx}(x,t), \ (x,t) \in Q, \quad \varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0), \ x \in [0,l].$

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді у формулюванні задачі (7) — (9) маємо $u = \widetilde{u}, \ f = \widetilde{f}, \ \varphi = \widetilde{\varphi}$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності (7) — (9) є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0v'(0) + \beta_0v(0) = 0, \ \alpha_1v'(l) + \beta_1v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{10}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t), \ x \in [0,l]\,; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t), \ x \in (0,l),$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (7) — (9) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u' + a^2Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{12}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) — це слабкий розв'язок задачі (11), (12). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (11), (12).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{13}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{14}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (13) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (14), і знаходження цих розв'язків, називають *задачею Штурма-Ліувілля.*

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \ t \in [0,T], \tag{15}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad f_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{16}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (16) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (7) і початкові умови (9) замість u (крайові умови (8) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (15)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k'(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad x\in[0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (17).

Дивлячись на рівності (17), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'+a^2\lambda_k z=\widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що рівняння задачі (18) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z'+a^2\lambda_k z=0,\quad t\in(0,T], \tag{19}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (18).

Спочатку для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (19). Для цього помножимо це рівняння на $e^{a^2\lambda_k t}$ і проінтегруємо його:

$$e^{a^2\lambda_k t}z'+a^2\lambda_k e^{a^2\lambda_k t}z=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{a^2\lambda_k t}z\right)'=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{a^2\lambda_k t}z=A_k,\quad t\in[0,T], \tag{20}$$

де A_k — довільна стала. Отже, повний загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд

$$z=A_k e^{-a^2\lambda_k t},\quad t\in[0,T], \tag{21}$$

де A_k — довільна стала.

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z=A_k e^{-a^2\lambda_k t}+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T], \tag{22}$$

де A_k — довільна стала.

Для знаходження розв'язку задачі (18) підставимо вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (18). У результаті отримаємо

$$A_k+\overset{*}{z}(0)=\widehat{\varphi}_k \quad\Rightarrow\quad A_k=\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0).$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t):=(\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0))e^{-a^2\lambda_k t}+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T]. \tag{23}$$

Підставивши знайдені вирази $\widehat{u}_k$, $k\in\mathbb{N}$, у ряд (16), отримаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), оскільки при наших умовах на φ і f ряд (16) збігається в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функція u задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопрвідності. □

Зауваження 1. *Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі* (18) *методом неозначених коефіцієнтів.*

- *Якщо*

$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t,$$

де ω, a_k, b_k — *сталі (може бути* $a_k = 0$ *або* $b_k = 0$*), то частковий розв'язок шукають у вигляді*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos \omega t + d_k \sin \omega t,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у неоднорідне рівняння.*

- *Якщо ж* $f_k(t) = a_k t + b_k$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$

де c_k *і* d_k *знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (18).

- *Якщо* $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, *то*

$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$

де c_k *знаходять із лінійних алгебраїчного рівняння, яке отримують при підстановці проєкту часткового розв'язку у рівняння задачі* (18).

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай* $l > 0$, $T > 0$ — *довільно задані і фіксовані числа,* $Q := (0, l) \times (0, T]$. *Потрібно знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності в стержні*

$$\widetilde{u}_t - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x, t) \in Q, \tag{24}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T], \tag{25}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad x \in [0, l], \tag{26}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки крайові умови не є однорідними, то в задачі робимо заміну невідомої функції:

$$\widetilde{u}(x, t) = u(x, t) + h(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що

$$h|_{x=0} = \sin t, \quad h_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0, T]. \tag{27}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x, t) := p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (27), тобто

$$r(t) = \sin t, \quad 2lp(t) + q(t) = 1, \quad t \in [0, T].$$

Звідси, поклавши $p(t) = 0,\ t \in [0,T]$, знаходимо $r(t) = \sin t,\ q(t) = 1,\ t \in [0,T]$, тобто

$$h(x,t) := x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Маємо

$$u_t + \cos t - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} + \sin t = \sin t, \quad u_x|_{x=l} + 1 = 1, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} + x = x + 1, \quad x \in [0,l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції u:

$$u_t - a^2 u_{xx} = -\cos t + x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \tag{28}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{29}$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad x \in [0,l]. \tag{30}$$

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,t) := -\cos t + x \sin t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := 1, \quad x \in [0,l],$$

і зведемо задачу (28) — (30) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \qquad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{31}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in (0,l);$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30) є слабким розв'язком задачі

$$u' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{32}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{33}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (32), (33).

2-ий крок. Знаходимо власні значення і відповідні їм власні елементи оператора A, а для цього зауважимо, що на підставі означення оператора A отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (34) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (34), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{35}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i, \quad i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (35) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{36}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{37}$$

і підставимо вирази (36) і (37) в крайові умови задачі (34):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (38) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (38) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{39}$$

Розв'язавши рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ з врахуванням того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, отримаємо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

звідки визначаємо власні значення оператора A:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у формулу (36) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{41}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^l \sin^2\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\int_0^l \frac{1}{2}\big(1 - \cos\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\,dx = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_2^2\big(x - \frac{l}{-\pi + 2\pi k}\sin\frac{-\pi + 2\pi k}{l}x\big)\Big|_{x=0}^{x=l} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ складена з власних елементів оператора A, є такою:

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x, \quad x \in [0,l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \; t \in [0,T], \tag{43}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx \; = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l 1 \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx\,,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (-\cos t + x \sin t) \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx =$$

$$= -\cos t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx + \sin t \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l x \cdot \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx = a_k \cdot \sin t + b_k \cdot \sin t,$$

$$t \in [0,T]\,, \quad a_k := -\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx, \quad b_k := \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l x \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x\, dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (28) — (30) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{44}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ задовольняє рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Умови (45) на коефіцієнти ряду (44) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (28) і умови (30), врахувавши розвинення φ і f в ряди Фур'є (див. (43)) і те, що

$$A w_k = \lambda_k w_k \;\; \Rightarrow \;\; w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x),\, x \in [0,l],\; k \in \mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k'(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) \right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad x \in [0,l].$$

Звідси випливають рівності (45).

Знайдемо $\widehat{u}_k$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Дивлячись на рівності (45), бачимо, що функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (44)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z' + a^2\lambda_k z = a_k \cos t + b_k \sin t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k\,. \end{cases} \tag{46}$$

Розв'яжемо цю задачу. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є лінійним однорідним рівнянням першого порядку і рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dt} = -a^2\lambda_k z \,\Big|\times\frac{dt}{z} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z} = -a^2\lambda_k\,dt,\ \ z=0 \quad\Rightarrow\quad \ln|z| = -a^2\lambda_k\,t + \ln|A_k|,\ \ z=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad z = A_k e^{-a^2\lambda_k\,t}, \quad t\in[0,T], \quad A_k\in\mathbb{R} \text{ — довільна стала,} \tag{47}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = c_k\cos t + d_k \sin t, \quad t\in[0,T],$$

де c_k, d_k — сталі, значення якої знаходимо за умови, що ця функція є розв'язком нашого рівняння:

$$-c_k\sin t + d_k\cos t + a^2\lambda_k(c_k\cos t + d_k\sin t) = a_k\cos t + b_k\sin t \quad\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \cos t & : & a^2\lambda_k c_k + d_k = a_k \\ \sin t & : & -c_k + a^2\lambda_k d_k = b_k \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуємо методом Крамера. Для цього знаходимо визначники основної і допоміжних матриць:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & 1 \\ -1 & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^4\lambda_k^2 + 1,$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_k & 1 \\ b_k & a^2\lambda_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k a_k - b_k, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a^2\lambda_k & a_k \\ -1 & b_k \end{vmatrix} = a^2\lambda_k b_k + a_k.$$

Звідси отримуємо

$$c_k = \frac{\triangle_1}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k a_k - b_k}{a^4\lambda_k^2+1}, \quad d_k = \frac{\triangle_2}{\triangle} \equiv \frac{a^2\lambda_k b_k + a_k}{a^4\lambda_k^2+1}. \tag{48}$$

Отож, маємо

$$z = A_k e^{-a^2\lambda_k\,t} + c_k\cos t + d_k\sin t, \quad t\in[0,T], \quad A_k\in\mathbb{R} \text{ — довільна стала,}$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (46). Підставимо цей вираз в початкову умову даної задачі для знаходження значення сталої A_k. Тоді

$$z(0) = A_k + c_k = \widehat{\varphi}_k\,.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - c_k,$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k\, t} + c_k\cos t + d_k\sin t, \quad t\in[0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (24) — (26) є (див. (44)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$\widetilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\widehat{\varphi}_k - c_k)e^{-a^2\lambda_k\, t} + c_k\cos t + d_k\sin t\right]\sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x,t)\in\overline{Q},$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, c_k, d_k для кожного $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $l>0$, $T>0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q:=(0,l)\times(0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності в стержні:

1.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x^2t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = t-1, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x, \quad x\in[0,l].$$

2.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x-1)e^t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = e^t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 0, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad x\in[0,l].$$

3.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = e^xt^2, \quad (x,t)\in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = 2t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 2, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos x, \quad x\in[0,l].$$

4.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{2t}, \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = e^{2t}, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 0, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \sin 3x, \quad x\in[0,l].$$

5.

$$\widetilde{u}_t - a^2\widetilde{u}_{xx} = x\sin t, \quad (x,t)\in Q,$$
$$(\widetilde{u}_x - h_0\widetilde{u})|_{x=0} = \sin t, \quad (\widetilde{u}_x + h_1\widetilde{u})|_{x=l} = 2\sin t, \quad t\in(0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad x\in[0,l].$$