Практичне заняття № 12

Мішані задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани. Метод Фур'є

Завдання: Нехай

- $p > 0,\ q > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\Omega := (0,p) \times (0,q), \quad Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ (\gamma_0 u_y + \delta_0 u)|_{y=0} = 0, \quad (\gamma_1 u_y + \delta_1 u)|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що
  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\gamma_0| + |\delta_0| > 0,\ |\gamma_1| + |\delta_1| > 0,$
  $\alpha_0\beta_0 \le 0\ ,\ \alpha_1\beta_1 \ge 0,\ \gamma_0\delta_0 \le 0\ ,\ \gamma_1\delta_1 \ge 0,$
- $\varphi, \psi \in L_2(\Omega),\ f \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Як відомо, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань – це слабкий розв'язок задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \alpha_0 v_x(0,y) + \beta_0 v(0,y) = 0,\ \alpha_1 v_x(p,y) + \beta_1 v(p,y) = 0,$$

$$\gamma_0 v_y(x,0) + \delta_0 v(x,0) = 0, \quad \gamma_1 v_y(x,q) + \delta_1 v(x,q) = 0\},$$

$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{4}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, задача (1) – (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{5}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{6}$$

Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) – це слабкий розв'язок задачі (5), (6). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (5), (6).

2-ий крок. Знайдемо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 w_x(0, y) + \beta_0 w(0, y) = 0, \quad \alpha_1 w_x(p, y) + \beta_1 w(p, y) = 0, \quad y \in (0, q), \\ \\ \gamma_0 w_y(x, 0) + \delta_0 w(x, 0) = 0, \quad \gamma_1 w_y(x, q) + \delta_1 w(x, q) = 0 \quad x \in [0, p]. \end{cases} \tag{8}$$

Нагадаємо, що ми шукаємо всеможливі значення параметра λ, при яких рівняння (7) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (8), а також шукаємо ці розв'язки (фактично, в просторі $C^2(\overline{\Omega})$).

Розв'язки задачі (7), (8) шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = X(x)Y(y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{9}$$

Для знаходження X і Y підставимо вираз w вигляду (9) у рівняння (7) і умови (8):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0)Y(y) + \beta_0 X(0)Y(y) = 0, \quad \alpha_1 X'(p)Y(y) + \beta_1 X(p)Y(y) = 0, \\ \\ \gamma_0 X(x)Y'(0) + \delta_0 X(x)Y(0) = 0, \quad \gamma_1 X(x)Y'(q) + \delta_1 X(x)Y(q) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Поділимо рівність (10) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda. \tag{12}$$

Оскільки ліва і права частина рівності (12) залежать від різних незалежних змінних (відповідно, x та y), то ці частини є сталими і однаковими, тобто існує стала ν така, що

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu, \quad x \in [0, p], \ y \in [0, q].$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{13}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (13) отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \\ \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, \quad \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 X'(p) + \beta_1 X(p) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ \gamma_0 Y'(0) + \delta_0 Y(0) = 0, \quad \gamma_1 Y'(q) + \delta_1 Y(q) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

які пов'язані із задачею (7), (8) співвідношеннями (9) і

$$\lambda = \nu + \omega. \tag{16}$$

Спочатку знаходимо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (14), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le ... \le \nu_k \le ..., \quad \text{причому } \ \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Потім знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (15), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_m \le ..., \quad \text{причому } \ \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тоді вводимо позначення:

$$w_{k,m}(x,y) := X_k(x) Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k,m \in \mathbb{N}.$$

Відомо, що система $\{w_{k,m} \,|\, k,m \in \mathbb{N}\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \ \text{ в } \ \Omega, \quad k,m \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\,m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k=1,\,m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \tag{18}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \ t \in [0,T], \tag{19}$$

де для кожних $k,m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_{k,m} := \int_\Omega \varphi(x,y) w_{k,m}(x,y)\, dxdy, \quad \widehat{\psi}_{k,m} := \int_\Omega \psi(x,y) w_{k,m}(x,y)\, dxdy,$$

$$\widehat{f}_{k,m}(t) := \int_\Omega f(x,y,t) w_{k,m}(x,y)\, dxdy, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(t) w_k(x,y), \quad (x,y,t) \in \overline{Q}, \tag{20}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_{k,m}\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t) = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ \\ \widehat{u}_{k,m}(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad \widehat{u}'_{k,m}(0) = \widehat{\psi}_{k,m}, \end{cases} \qquad k,\, m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (20) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (1) і початкові умови (3) замість u (крайові умови (2) для суми ряду виконуються за рахунок належності $w_{k,m}$ до $D(A)$, $k,m \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (18), (19)) і рівності (17), у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t)\right] w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t) \in \Omega \times (0,T],$$

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k,\,m=1}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_{k,m}\}$, маємо рівності (21).

Дивлячись на рівності (21), бачимо, що для кожних $k,m \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_{k,m} z = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \psi_{k,m}. \end{cases} \tag{22}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (20) збігається в просторі $C([0,T]; L_2(\Omega))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $p > 0$, $q > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,* $\Omega := (0,p) \times (0,q)$, $Q := \Omega \times (0,T]$.

Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q, \tag{23}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases} \tag{24}$$

$$u|_{t=0} = xy + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{25}$$

Розв'язування.

1-ий крок. Введемо позначення

$$f(x,y,t) := (x+y)\cos t, \quad (x,y,t) \in Q; \quad \varphi(x,y) := xy+1, \quad \psi(x,y) := 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

і зведемо задачу (23) – (25) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(\Omega) \mid v(0,y) = 0,\ v_x(p,y) = 0,\ v_y(x,0) = 0,\ v_y(x,q) = 0\},$$

$$Av = -(v_{xx} + v_{yy}) \equiv -\Delta v \quad \forall v \in D(A), \tag{26}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,y,t),\ (x,y) \in \overline{\Omega}; \quad (0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$\varphi := \varphi(x,y), \quad \psi := \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (23) – (25) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{27}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{28}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (27), (28).

2-ий крок. Знаходимо ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$, складену з власних елементів оператора A. Для цього зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w,$$

яке визначає власні значення і власні елементи оператора A, еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(\Omega)$ крайової задачі для еліптичного рівняння

$$-\Delta w = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad \Delta w + \lambda w = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{29}$$

з крайовими умовами

$$w(0,y) = 0, \quad w_x(p,y) = 0, \quad w_y(x,0) = 0, \quad w_y(x,q) = 0. \tag{30}$$

Розв'язки задачі (29), (30) шукаємо у вигляді

$$w(x,y) = X(x)Y(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{31}$$

Підставимо вираз w у рівняння (29) і крайові умови (30):

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, \tag{32}$$

$$\begin{cases} X(0)Y(y) = 0, \quad X'(p)Y(y) = 0, \\ X(x)Y'(0) = 0, \quad X(x)Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Поділимо рівність (32) на XY:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\nu \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ Y'' + \omega Y = 0, \end{cases} \tag{34}$$

де ν, $\omega := \lambda - \nu \in \mathbb{R}$.

З (33) маємо

$$\begin{cases} X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases}$$

Отож, маємо дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \nu X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(p) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} Y'' + \omega Y = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(q) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Знайдемо послідовності $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних функцій і власних значень задачі (35), такі, що послідовність $\{X_k\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0,p)$ і

$$X_k'' = -\nu_k X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq ... \leq \nu_k \leq ..., \quad \nu_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всеможливі значення $\nu > 0$ такі, що задача (35) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (35). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\nu \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu}\, i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння задачі (35) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\nu}x + C_2 \sin\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{37}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$X'(x) = -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}x + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}x, \quad x \in [0,p], \tag{38}$$

і підставимо вирази (37) і (38) в крайові умови задачі (35):

$$\begin{cases} X(0) \equiv C_1 = 0, \\ X'(l) \equiv -C_1\sqrt{\nu}\sin\sqrt{\nu}p + C_2\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}p = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\nu > 0$, при яких система рівнянь (39) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (39) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\nu}p = 0. \tag{40}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\nu}p = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\nu}p > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\nu}p = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \nu_k = \left(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ν, C_1, C_2 у вираз (37) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$X_k(x) = C_2 \sin \sqrt{\nu_k} x, \quad x \in [0, p], \tag{42}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^p |X_k|^2 \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2 \sqrt{\nu_k} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^p \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x \, dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2 \frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{p}} \, .$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{X_k\}$ в $L^2(0, p)$ і числова послідовність $\{\nu_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\nu_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2p} \Big)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \sqrt{\nu_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2p} x, \quad x \in [0, p], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Тепер знаходимо послідовності $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ і $\{\omega_m\}_{m=1}^\infty$, складені, відповідно, з власних функцій та власних елементів задачі (36), такі, що послідовність $\{Y_m\}$ утворює ортонормовану базу в $L_2(0, q)$ і

$$Y_m'' = -\omega_m Y_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_m \le ..., \quad \text{причому} \;\; \omega_m \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Отож, нам потрібно знайти всі значення $\omega \ge 0$ такі, що задача (36) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\omega = 0$; 2) $\omega > 0$.
1) Нехай $\omega = 0$, тоді маємо рівняння

$$Y'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$Y(y) = C_1 y + C_2, \quad y \in [0, q], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (36), підставивши цей вираз у крайові умови цієї задачі. Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$Y_0(y) = C_2, \quad y \in [0, q],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^q |Y_0(y)|^2 \, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^q dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 q = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{q}} \, .$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\omega_0 = 0 \tag{44}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad x \in [0, q]. \tag{45}$$

2) Тепер розглянемо випадок $\omega > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (36). Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\omega \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння задачі (36) має вигляд

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega}y + C_2 \sin\sqrt{\omega}y, \quad y \in [0, q], \tag{46}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$Y'(y) = -C_1\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}y + C_2\sqrt{\omega}\cos\sqrt{\omega}y, \quad y \in [0, q], \tag{47}$$

і підставимо вирази (46) і (47) в крайові умови задачі (36):

$$\begin{cases} Y'(0) \equiv C_2\sqrt{\omega} = 0, \\ Y'(q) \equiv -C_1\sqrt{\omega}\sin\sqrt{\omega}q + C_2\sqrt{\omega}\cos\sqrt{\omega}q = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\omega > 0$, при яких система рівнянь (48) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (48) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\omega}q = 0. \tag{49}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\omega}q = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\omega}q > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\omega}q = \pi m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення ω, C_1, C_2 у вираз (46) і для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$Y_m(y) = C_1 \cos\sqrt{\omega_m}y, \quad y \in [0, q], \tag{51}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |Y_m(y)|^2\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2\sqrt{\omega_m}y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 \int\limits_0^q \cos^2\frac{\pi k}{q}y\, dy = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^2 \int\limits_0^q \left(1 + \cos 2\frac{\pi k}{q}y\right) dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2\frac{q}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{q}}\,.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{Y_m\}_{m=0}^{\infty}$ в $L_2(0, q)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$Y_0(y) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\sqrt{\omega_m}y \equiv \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\frac{\pi m}{q}y, \quad y \in [0, q], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Введемо позначення:

$$w_{k,m}(x,y) := X_k(x)Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda_{k,m} := \nu_k + \omega_m, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Відомо, що система $\bigl\{w_{k,m} \bigm| k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\}$ утворює ортонормовану базі в $L_2(\Omega)$. Зауважимо, що зі сказаного вище маємо

$$-\Delta w_{k,m} = \lambda_{k,m} w_{k,m} \text{ в } \Omega, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{53}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_{k,m}\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{k,\, m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{54}$$

$$f(x,y,t) = \sum_{k=1,\, m=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,m}(t) w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T], \tag{55}$$

де для кожних $k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$\widehat{\varphi}_{k,m} := \int_\Omega \varphi(x,y) \cdot w_{k,m}(x,y)\, dxdy = \int_\Omega (xy+1) \cdot X_k(x)Y_m(y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^p xX_k(x)\, dx \int_0^q yY_m(y)\, dy + \int_0^p X_k(x)\, dx \int_0^q Y_m(y)\, dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^p x \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\, dx \int_0^q y \cos\frac{\pi m}{q} y\, dy +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\, dx \int_0^q \cos\frac{\pi m}{q} y\, dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Bigl(\frac{2p}{-\pi+2\pi k}\Bigl[-x\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Bigr|_0^p + \int_0^p \cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\, dx\Bigr] + \frac{q}{\pi m}\Bigl[y \sin\frac{\pi m}{q}y\Bigr|_0^q -$$

$$- \int_0^q \sin\frac{\pi m}{q}y\, dy\Bigr] - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}\cos\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Bigr|_0^p \cdot \frac{q}{\pi m}\sin\frac{\pi m}{q}y\Bigr|_0^q\Bigr) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Bigl(\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\Bigr|_0^p + \frac{q^2}{\pi^2 m^2}\cos\frac{\pi m}{q}y\Bigr|_0^q - \frac{2p}{-\pi+2\pi k}(0-1)\cdot\frac{q}{\pi m}(0-0)\Bigr) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\Bigl((-1)^{k+1}\frac{4p^2}{(-\pi+2\pi k)^2} + ((-1)^m - 1)\frac{q^2}{\pi^2 m^2}\Bigr), \quad k, m \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\varphi}_{k,0} := \int_\Omega \varphi(x,y) \cdot w_{k,0}(x,y)\, dxdy = \int_\Omega (xy+1) \cdot X_k(x)Y_0(y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^p xX_k(x)\, dx \int_0^q yY_0(y)\, dy + \int_0^p X_k(x)\, dx \int_0^q Y_0(y)\, dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p x \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\, dx \int_0^q y\, dy +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{pq}} \int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\, dx \int_0^q dy = \ldots, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{\psi}_{k,m} := \int_\Omega \psi(x,y)\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = \int_\Omega 0\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy = 0, \quad k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0,$$

$$\widehat{f}_{k,m}(t) := \int_\Omega f(x,y,t)\cdot w_{k,m}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{2}{q}}\int_\Omega (x+y)\cos t\cdot \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\cos\frac{\pi m}{q}y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\cos t\cdot\int_\Omega (x+y)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\cos\frac{\pi m}{q}y\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}}\cos t\cdot\Big[\int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q \cos\frac{\pi m}{q}y\,dy +$$

$$+\int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q y\cos\frac{\pi m}{q}y\,dy\Big] = \ldots = a_{k,m}\cos t, \quad t\in[0,T],\ k,m\in\mathbb{N},$$

$$\widehat{f}_{k,0}(t) := \int_\Omega f(x,y,t)\cdot w_{k,0}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\int_\Omega (x+y)\cos t\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\cos t\cdot\int_\Omega (x+y)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{pq}}\cos t\cdot\Big[\int_0^p x\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q dy +$$

$$+\int_0^p \sin\frac{-\pi+2\pi k}{2p}x\,dx\int_0^q y\,dy\Big] = \ldots = a_{k,0}\cos t, \quad t\in[0,T],\ k\in\mathbb{N},$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (23) – (25) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{u}_{k,m}(t)w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t)\in\overline{Q}, \tag{56}$$

де функції $\{\widehat{u}_{k,m}\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t) = \widehat{f}_{k,m}(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_{k,m}(0) = \varphi_{k,m}, \quad \widehat{u}'_{k,m}(0) = \psi_{k,m} \quad k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0.\end{cases} \tag{57}$$

Умови (57) на коефіцієнти ряду (56) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (23) і умови (25), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (54)) і рівність (53). У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\left[\widehat{u}''_{k,m}(t) + a^2\lambda_{k,m}\widehat{u}_{k,m}(t)\right]w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{f}_{k,m}(t)w_{k,m}(x,y), \quad (x,y,t)\in Q,$$

$$\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{u}_{k,m}(0)w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_{k,m}w_{k,m}(x,y), \quad (x,y)\in\overline{\Omega},$$

$$\sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{u}'_{k,m}(0) w_{k,m}(x,y) = \sum_{k=1,m=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{k,m} w_{k,m}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Звідси випливають рівності (57).

Знайдемо $\{\widehat{u}_{k,m}\}$. Дивлячись на рівності (57), бачимо, що для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ функція $\widehat{u}_{k,m}$ (відповідний коефіцієнт ряду (56)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_{k,m} z = a_{k,m} \cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_{k,m}, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_{k,m}. \end{cases} \tag{58}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільних фіксованих $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2 \lambda_{k,m} z = 0. \tag{59}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2 \lambda_{k,m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a \sqrt{\lambda_{k,m}} i.$$

Тоді

$$z = A_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}} t + B_{k,m} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}} t, \quad t \in [0,T], \quad A_{k,m},\ B_{k,m} \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (59).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (58) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_{k,m} \cos t, \quad t \in [0,T],$$

де $d_{k,m}$ – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_{k,m} \sin t, \quad z'' = -d_{k,m} \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_{k,m} \cos t + a^2 \lambda_{k,m} d_{k,m} \cos t = a_{k,m} \cos t \Rightarrow$$

$$(a^2 \lambda_{k,m} - 1) d_{k,m} = a_{k,m} \ \Rightarrow d_{k,m} := \frac{a_{k,m}}{a^2 \lambda_{k,m} - 1}, \quad k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{60}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2 \lambda_{k,m} - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$).

Отож, маємо

$$z = A_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}} t + B_{k,m} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}} t + d_{k,m} \cos t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (58). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_{k,m},\ B_{k,m}$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_{k,m} a\sqrt{\lambda_{k,m}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,m}} t + a\sqrt{\lambda_{k,m}} B_{k,m} \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}} t - d_{k,m} \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_{k,m} + d_{k,m} = \widehat{\varphi}_{k,m},$$

$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_{k,m}}B_{k,m} = \widehat{\psi}_{k,m}.$$

Звідси

$$A_{k,m} = \widehat{\varphi}_{k,m} - d_{k,m}, \quad B_{k,m} = \frac{\widehat{\psi}_{k,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,m}}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_{k,m}(t) = \big(\widehat{\varphi}_{k,m} - d_{k,m}\big)\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,m}}}\sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + d_{k,m}\cos t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (23) – (25) (див. (56)) є сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(\Omega))$ ряду

$$u(x,y,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1,\,m=0}^{\infty}\Big[\big(\widehat{\varphi}_{k,m} - d_{k,m}\big)\cos a\sqrt{\lambda_{k,m}}t + \frac{\widehat{\psi}_{k,m}}{a\sqrt{\lambda_{k,m}}}\sin a\sqrt{\lambda_{k,m}}t +$$

$$+ d_{k,m}\cos t\Big]X_k(x)Y_m(y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \ t \in [0,T],$$

де $\lambda_{k,m}$, $\widehat{\varphi}_{k,m}$, $\widehat{\psi}_{k,m}$, $d_{k,m}, X_k, Y_m$ для кожних $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $p > 0, q > 0, \ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа, $\Omega := (0,p)\times(0,q)$, $Q := \Omega \times (0,T]$. Знайти сильно узагальнені розв'язки мішаних задач для рівняння коливань прямокутної мембрани:

1.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x^2 + y)\cos 2t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q)\times(0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 2xy, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

2.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (2x + y)\cos 3t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q)\times(0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 5x + y, \quad u_t|_{t=0} = 2x, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

3.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (2x + y)\sin 2t, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q)\times(0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p]\times(0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 3x + 2y, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

4.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = (x^2 + y)e^{2t}, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \quad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 3x - y, \quad u_t|_{t=0} = 3xy, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

5.

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 2xyt + 1, \quad (x,y,t) \in Q,$$

$$\begin{cases} (u_x - u)|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0, \quad (y,t) \in (0,q) \times (0,T], \\ u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=q} = 0, \qquad\qquad (x,t) \in [0,p] \times (0,T], \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = 2x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 3y, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$