Практичне заняття № 11

Мішані задачі для рівняння коливання струни з неоднорідними крайовими умовами

I. Теоретичний матеріал

Задача: Нехай $l > 0$, $T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. *Мішана задача для рівняння коливання струни* полягає у знаходженні функції $\widetilde{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

крайові умови

$$(\alpha_0\widetilde{u}_x + \beta_0\widetilde{u})|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1\widetilde{u}_x + \beta_1\widetilde{u})|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

та початкові умови

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ — сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\mu_0, \mu_1 : (0,T] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Потрібно знайти *сильно узагальнений* розв'язок задачі (1) —- (3), якщо $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in L^2(0,l)$, $\widetilde{f} \in C([0,T]; L^2(0,l))$, $\mu_0, \mu_1 \in C^2([0,T])$, причому або $\mu_0 \ne 0$, або $\mu_1 \ne 0$.

Розв'язування.
0-ий крок. Шукаємо функцію $h \in H^2(Q)$, яка задовольняє крайові умови (2), тобто

$$(\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Функцію h можна шукати у вигляді

$$h(x,t) = p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{5}$$

де $p, q, r \in C^2([0,T])$ — функції від змінної t, які вибирають такими, щоби виконувалися умови (4). Для знаходження p, q, r шукають похідну

$$h_x(x,t) = 2p(t)x + q(t)$$

і підставляють вирази w і w_x в умови (4):

$$\begin{cases} \alpha_0 q(t) + \beta_0 r(t) = \mu_0(t), \\ \alpha_1(2lp(t) + q(t)) + \beta_1(l^2p(t) + lq(t) + r(t)) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \end{cases}$$

Звідси знаходять p, q і r. Оскільки маємо два рівняння, а невідомих функцій — три, то одна з функцій p, q або r може бути довільною, її покладемо рівною, наприклад, нулеві.

Якщо функцію h знайдено, то в задачі (1) — (3) роблять заміну

$$\widetilde{u} = u + h, \tag{6}$$

де u — нова невідома функція:

$$(u+h)_{tt} - a^2(u+h)_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0(u+h)_x + \beta_0(u+h))|_{x=0} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1(u+h)_x + \beta_1(u+h))|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$(u+h)|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad (u+h)_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Звідси, враховуючи лінійність операції диференціювання, маємо

$$u_{tt} + h_{tt} - a^2 u_{xx} - a^2 h_{xx} = \widetilde{f}(x,t),$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} + (\alpha_0 h_x + \beta_0 h)|_{x=0} = \mu_0(t), \; (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} + (\alpha_1 h_x + \beta_1 h)|_{x=l} = \mu_1(t),$$

$$u|_{t=0} + h|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad u_t|_{t=0} + h_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x).$$

Отож, врахувавши (4), для нової невідомої функції u отримаємо задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{9}$$

де $f(x,t) := \widetilde{f}(x,t) - h_{tt} + a^2 h_{xx}, \;\; \varphi(x) := \widetilde{\varphi}(x) - h(x,0), \;\; \psi(x) := \widetilde{\psi}(x) - h_t(x,0).$

Відмітимо, що коли $\mu_0 = \mu_1 = 0$, то $h = 0$ і 0-го кроку не робимо (тоді в задачі (7) — (9) маємо $\widetilde{u} = u, \; \widetilde{f} = f, \; \widetilde{\varphi} = \varphi, \; \widetilde{\psi} = \psi$) і починаємо з 1-го кроку.

1-ий крок. Згідно з означенням, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \; \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \;\; \forall v \in D(A), \tag{10}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := \widetilde{u}(x,t), \; x \in [0,l]\,; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := \widetilde{f}(x,t), \; x \in [0,l],$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (1) — (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{12}$$

Як було сказано, сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) — це слабкий розв'язок задачі (11),(12). Тому шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (11), (12).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \tag{13}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{14}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (13) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (14), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язуємо в просторі $C^2([0,l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \; x \in [0,l],$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in (0,l), \; t \in [0,T], \tag{15}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\, dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\, dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (7) — (9) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{16}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (16) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (7) і початкові умови (9) замість $\widetilde{u}$ (крайові умови (8) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ і $\widetilde{f}$ в ряди Фур'є (див. (15)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \; k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x),\quad x\in[0,l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (17).

Дивлячись на рівності (17), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z''+a^2\lambda_k z=\widehat{f}_k(t), & t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k, \quad z'(0)=\psi_k. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що рівняння задачі (18) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, а отже, його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z''+a^2\lambda_k z=0,\quad t\in(0,T], \tag{19}$$

і часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, що є рівнянням задачі (18).

Спочатку для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ знайдемо повний загальний розв'язок рівняння (19). Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2+a^2\lambda_k=0\quad\Rightarrow\quad \mu_{1,2}=\pm a\sqrt{\lambda_k}\,i.$$

Тоді

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}\,t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}\,t,\quad t\in[0,T],\quad A_k,\,B_k\in\mathbb{R}\text{ — довільні сталі},$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (19).

Частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18) шукаємо методом варіації сталих або методом неозначених коефіцієнтів. Якщо ми знайшли частковий розв'язок $\overset{*}{z}$ рівняння задачі (18), то його повний загальний розв'язок має вигляд

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}\,t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}\,t+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T], \tag{20}$$

де A_k, B_k — довільні сталі. Підставивши вираз повного загального розв'язку в початкову умову задачі (18), отримаємо

$$\begin{cases} A_k+\overset{*}{z}(0)=\widehat{\varphi}_k\\ B_k a\sqrt{\lambda_k}+\overset{*}{z}{}'(0)=\widehat{\psi}_k \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A_k=\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0)\\ B_k=\dfrac{\widehat{\psi}_k-\overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}}. \end{cases}$$

Отож, ми здобули

$$\widehat{u}_k(t):=\left(\widehat{\varphi}_k-\overset{*}{z}(0)\right)\cos a\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{\widehat{\psi}_k-\overset{*}{z}{}'(0)}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda_k}\,t+\overset{*}{z}(t),\quad t\in[0,T]. \tag{21}$$

!!! Розглянемо кілька випадків знаходження часткового розв'язку рівняння задачі (18) методом неозначених коефіцієнтів.

- Якщо
$$\widehat{f}_k(t) = a_k \cos\omega t + b_k \sin\omega t,$$
де ω — стала така, що $\omega \neq a\sqrt{\lambda_k}$ для кожного $k \in N$ (може бути $a_k = 0$ або $b_k = 0$) то частковий розв'язок шукають у вигляді

$$\overset{*}{z}(t) := c_k \cos\omega t + d_k \sin\omega t,$$

де c_k і d_k знаходять за формулами

$$c_k = \frac{a_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}, \quad d_k = \frac{b_k}{a^2\lambda_k - \omega^2}.$$

- Якщо ж $f_k(t) = a_k t + b_k$, то
$$\overset{*}{z}(t) := c_k t + d_k,$$
де $c_k = \dfrac{a_k}{a^2\lambda_k}, \quad d_k = \dfrac{b_k}{a^2\lambda_k}.$
- Якщо $f_k(t) = a_k e^{\omega t}$, то
$$\overset{*}{z}(t) := c_k e^{\omega t},$$
де $c_k = \dfrac{a_k}{\lambda_k a^2 + \omega^2}.$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (16) збігається в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$, а значить, функція $\widetilde{u}$ належить цьому ж простору, тобто функція $\widetilde{u}$ задовольняє умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань. Отож, сильно узагальненим розв'язком задачі (1) — (3) є функція

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x) + p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

де $\widehat{u}_k,\ k \in \mathbb{N},\ p, q, r$ знайдені вище. □

II. Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Нехай $l > 0,\ T > 0$ — довільно задані і фіксовані числа, $Q := (0,l) \times (0,T]$. Знайдіть сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2 \widetilde{u}_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{22}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \sin t, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 1, \quad t \in (0,T], \tag{23}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = x + 1, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{24}$$

Розв'язування.

0-ий крок. Оскільки $\mu_0 \neq 0$ і $\mu_1 \neq 0$, то в задачі робимо заміну невідомої функції:

$$\widetilde{u} = u + h,$$

де u — нова невідома функція, а h — відома допоміжна функція така, що

$$h|_{x=0} = \mu_0(t), \quad h_x|_{x=l} = \mu_1(t), \quad t \in (0,T]. \tag{25}$$

Шукаємо функцію h у вигляді

$$h(x,t) := p(t)x^2 + q(t)x + r(t), \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

де p, q, r такі, що виконуються рівності (25), тобто

$$r(t) = \mu_0(t), \quad 2lp(t) + q(t) = \mu_1(t), \quad t \in [0,T].$$

Звідси, поклавши $p(t) = 0,\ t \in [0,T]$, знаходимо $r(t) = \mu_0(t),\ q(t) = \mu_1(t),\ t \in [0,T]$, тобто

$$h(x,t) := x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Отож, в нашій задачі робимо заміну

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Маємо

$$u_{tt} - \sin t - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} + \sin t = \sin t, \quad u_x|_{x=l} + 1 = 1, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} + x = x + 1, \quad u_t|_{t=0} + 1 = 0, \quad x \in [0,l],$$

звідки отримуємо задачу для нової невідомої функції $\widetilde{u}$:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{26}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{27}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{28}$$

де

$$f(x,t) := (x+1)\sin t, \quad (x,t) \in Q; \qquad \varphi(x) := 1, \quad \psi(x) := -1, \quad x \in [0,l].$$

1-ий крок. Зведемо задачу (26) — (28) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{29}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (26) — (28) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{30}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{31}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (30), (31).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ..., \text{ причому } \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (32) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (32), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{33}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \ \ i \text{ — уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (33) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{34}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{35}$$

і підставимо вирази (34) і (35) в крайові умови задачі (32):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система (36) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (36) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{37}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ і врахування того, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (34) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \tag{39}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi+2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x\in[0,l], \;\; k\in\mathbb{N}. \quad (40)$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x\in[0,l],\; t\in[0,T], \quad (41)$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx \; = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l 1\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx\,,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (-1)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\sin t\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx =$$

$$= \sin t\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = a_k\cdot\sin t, \quad t\in[0,T]\,,$$

$$a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (x+1)\cdot\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (26) — (28) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in\overline{Q}, \quad (42)$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k,\end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}. \quad (43)$$

Умови (43) на коефіцієнти ряду (42) отримують так. Припустимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (26) і умови (28), врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (41)) і те, що

$$w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x\in[0,l],\; k\in\mathbb{N}.$$

У результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widehat{u}_k''(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t)\right]w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k'(0)w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x),\quad x\in[0,l].$$

Звідси випливають рівності (43).

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (43), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (42)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z''+a^2\lambda_k z=a_k\sin t,\quad t\in(0,T],\\ z(0)=\widehat{\varphi}_k,\quad z'(0)=\widehat{\psi}_k.\end{cases}\tag{44}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z''+a^2\lambda_k z=0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2+a^2\lambda_k=0\quad\Rightarrow\quad \mu_{1,2}=\pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}t,\quad t\in[0,T],\quad A_k,\,B_k\in\mathbb{R}\text{ — довільні сталі,}$$

— повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z=d_k\sin t,\quad t\in[0,T],$$

де d_k — стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z'=d_k\cos t,\ \ z''=-d_k\sin t\quad\Rightarrow\quad -d_k\sin t+a^2\lambda_k d_k\sin t=a_k\sin t\Rightarrow\quad (a^2\lambda_k-1)d_k=a_k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad d_k:=\frac{a_k}{a^2\lambda_k-1}.\tag{45}$$

Отож, маємо

$$z=A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\sin t,\quad t\in[0,T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (44). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z'=-A_k a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+a\sqrt{\lambda_k}B_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\cos t,\quad t\in[0,T].$$

Тоді
$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$
Звідси
$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$
а значить,
$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (22) — (24) є (див. (42)) сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду
$$\widetilde{u}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}\, t + d_k \sin t\right] \sin\sqrt{\lambda_k}x + x + \sin t, \quad (x,t) \in \overline{Q},$$
де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

III. Завдання для самостійної роботи

Нехай $a > 0,\ l > 0,\ T > 0$ — довільно задані сталі. Розв'язати мішані задачі для рівняння коливання струни:

1.
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = (x+2)e^{3t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{x=0} = 4e^{3t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = \cos 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l].$$

2.
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 2\cos 3t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4\cos 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \sin x, \quad x \in [0,l].$$

3.
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3\sin 2t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{u}_x|_{x=0} = 1, \quad \widetilde{u}_x|_{x=l} = 4\sin 3t, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = x+2, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = \cos 2x, \quad x \in [0,l].$$

4.
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(\widetilde{u}_x - 2\widetilde{u})|_{x=0} = 2e^{2t}, \quad \widetilde{u}|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 3x, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$

5.
$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\widetilde{u}_{xx} = 3xt, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$\widetilde{(u_x - 2u)}|_{x=0} = 2t, \quad (\widetilde{u}_x + 3\widetilde{u})|_{x=l} = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$\widetilde{u}|_{t=0} = 2x+3, \quad \widetilde{u}_t|_{t=0} = 2, \quad x \in [0,l].$$