Практичне заняття № 10

Мішані задачі для рівняння коливань струни з однорідними крайовими умовами третього роду. Метод Фур'є

Завдання: Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

де

- $l > 0,\ T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_0\beta_0 \le 0$, $\alpha_1\beta_1 \ge 0$,
- $\varphi, \psi \in L^2(0,l),\ f \in C([0,T]; L^2(0,l))$ – задані функції.

Розв'язування.
1-ий крок. Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0,\ \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{4}$$

а також позначення:

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, задача (1) – (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{5}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{6}$$

Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) – це слабкий розв'язок задачі (5),(6). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), використовуючи відомий процес знаходження слабкого розв'язку задачі (5), (6).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0,l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\ \text{причому}\ \lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \ne 0$, або $\beta_1 \ne 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad w'' + \lambda w = 0, \quad x \in (0,l), \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \tag{8}$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принагідно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A, яка полягає у відшуканні всеможливих значень параметра λ, при яких рівняння (7) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (8), і знаходження цих розв'язків, називають *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язують в просторі $C^2([0,l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l], \ t \in [0,T], \tag{9}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx, \quad \widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx, \quad t \in [0,T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{10}$$

коефіцієнти $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (10) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (1) і початкові умови (3) замість u (крайові умови (2) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (9)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \ \Rightarrow \ w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0,l], \ k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0, l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (11).

Дивлячись на рівності (11), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = \widehat{f}_k(t), \quad t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{12}$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (10) збігається в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin t, \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \tag{13}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \tag{14}$$

$$u|_{t=0} = x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \tag{15}$$

де $a > 0,\ l > 0,\ T > 0$ *– довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x, t) := x \sin t, \quad (x, t) \in Q, \qquad \varphi(x) := x + 1, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0, l].$$

і зведемо задачу (13) – (15) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор

$$A : D(A) \to L_2(0, l)$$

за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v(0) = 0,\ v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{16}$$

а також позначення:

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x, t),\ x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x, t),\ x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 A u = f(t), \quad t \in (0, T], \tag{17}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{18}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15), використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (17), (18).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0,l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (19) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (19), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{20}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{21}$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0,l], \tag{22}$$

і підставимо вирази (21) і (22) в крайові умови задачі (19):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (23) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (23) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{24}$$

З рівняння $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (21) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0,l], \tag{26}$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k|^2\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (C_2)^2\int\limits_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (C_2)^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(C_2)^2\int\limits_0^l (1-\cos\frac{-\pi+2\pi k}{l}x)\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(C_2)^2\Big(x-\frac{l}{-\pi+2\pi k}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{l}x\Big)\Big|_{x=0}^{x=l} = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad (C_2)^2\frac{l}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0,l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A, є такими:

$$\lambda_k = \Big(\frac{-\pi+2\pi k}{2l}\Big)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{-\pi+2\pi k}{2l}x, \quad x\in[0,l], \;\; k\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(t)w_k(x), \quad x\in[0,l],\; t\in[0,T], \tag{28}$$

де для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x)w_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{2l}{(-\pi+2\pi k)}\Big(1+(-1)^{k+1}\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big),$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x)w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2\cdot\sin t = a_k\cdot\sin t, \quad t\in[0,T],$$

$$\text{де}\quad a_k := (-1)^{k+1}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{2l}{-\pi+2\pi k}\Big)^2.$$

Тут ми використали результати розв'язування прикладу 7 практичного заняття №7.

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad (x,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{29}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases}\widehat{u}_k''(t)+a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t\in(0,T],\\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, & k\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{30}$$

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (30), бачимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (29)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases}z''+a^2\lambda_k z = a_k\sin t, & t\in(0,T],\\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k.\end{cases} \tag{31}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0. \tag{32}$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T], \quad A_k,\ B_k \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі},$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (32).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (31) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t, \ \ z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2\lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = a_k \ \Rightarrow$$

$$d_k := \frac{a_k}{a^2\lambda_k - 1} \tag{33}$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2\lambda_k - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$).

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T],$$

— повний загальний розв'язок рівняння задачі (31). Підставимо вираз повного загального розв'язку в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k,\ B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \cos t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) = a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t, \quad t \in [0,T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (13) – (15) є (див. (29)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{\varphi}_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\widehat{\psi}_k-d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda_k}t+d_k\sin t)\sin\sqrt{\lambda_k}x,\quad t\in[0,T],$$

де λ_k, $\widehat{\varphi}_k$, $\widehat{\psi}_k$, d_k для кожного $k\in\mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами.

$\square$

Приклад 2. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=(x-1)e^t,\quad (x,t)\in Q:=(0,l)\times(0,T],\tag{34}$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0,\quad t\in(0,T],\tag{35}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=2x+1,\quad x\in[0,l],\tag{36}$$

де $a>0, l>0,\ T>0$ *– довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x,t):=(x-1)e^t,\quad (x,t)\in Q,\qquad \varphi(x):=0,\quad \psi(x):=2x+1,\quad x\in[0,l].$$

і зведемо задачу (34) – (36) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A:D(A)\to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A):=\{v\in H^2(0,l)\mid v'(0)=0,\ v'(l)=0\},\quad Av=-v''\ \ \forall v\in D(A)\tag{37}$$

і позначення:

$$[0,T]\ni t\mapsto u(t):=u(x,t),\ x\in[0,l];\quad [0,T]\ni t\mapsto f(t):=f(x,t),\ x\in[0,l];$$

$$\varphi:=\varphi(x),\quad \psi:=\psi(x),\quad x\in[0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) є слабким розв'язком задачі

$$u''+a^2Au=f(t),\quad t\in(0,T],\tag{38}$$

$$u'(0)=\varphi,\quad u'(0)=\psi.\tag{39}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок даної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (38), (39).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw=\lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w\in C^2[0,l]$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases}-w''=\lambda w,\quad x\in(0,l),\\ w'(0)=0,\quad w'(l)=0.\end{cases}\tag{40}$$

Шукаємо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робимо точно так як в прикладі 8 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geq 0$ такі, що задача (40) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

1) Нехай $\lambda = 0$, тоді одержуємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$w(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in [0, l], \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (40), підставивши вираз повного загального розв'язку у крайові умови задачі (40). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$w_0(x) = C_2, \quad x \in [0, l],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_0(x)|^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_2)^2 \int\limits_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_2)^2 l = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{41}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{42}$$

2) Тепер нехай $\lambda > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (40), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{43}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{44}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{45}$$

і підставимо вирази (44) і (45) в крайові умови задачі (40):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (46) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (46) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{47}$$

З рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A.

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (44) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \tag{49}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1)^2 \int\limits_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1)^2 \int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi k}{l}x\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(C_1)^2 \int\limits_0^l \Big(1 + \cos 2\frac{\pi k}{l}x\Big)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1)^2\frac{l}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\sqrt{\lambda_k}x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi k}{l}x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

3-ий крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k(t) w_k(x), \ t \in [0, T], \tag{51}$$

де

$$\widehat{\varphi}_k = \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = 0\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\widehat{\psi}_0 := \int\limits_0^l \varphi(x) w_0(x)\,dx = \sqrt{\frac{1}{l}}\int\limits_0^l (2x + 1)\,dx = \sqrt{\frac{1}{l}}(l^2 + l) = \sqrt{l}(l + 1)\,,$$

$$\widehat{\psi}_k = \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\widehat{f}_0(t) := \int\limits_0^l f(x, t) w_0(x)\,dx = a_0 e^t\,, \quad \text{де} \ \ a_0 := \sqrt{l}\Big(\frac{l}{2} - 1\Big), \quad t \in [0, T],$$

$$\widehat{f}_k(t) = \int_0^l f(x,t)w_k(x)\,dx = a_k\cdot e^t\,, \quad \text{де } \ a_k := \sqrt{\frac{2}{l}}\Big(\frac{l}{\pi k}\Big)^2((-1)^k-1), \qquad t\in[0,T], \quad k\in\mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_k(t)w_k(x), \quad t\in[0,T], \tag{52}$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_0''(t) = \widehat{f}_0(t), \quad t\in(0,T], \\ \widehat{u}_0(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad \widehat{u}_0'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t\in(0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{54}$$

З (53) випливає, що функція $\widehat{u}_0$ (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' = a_0e^t, \quad t\in(0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \tag{55}$$

а з (53) випливає, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = a_ke^t, \quad t\in(0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0. \end{cases} \tag{56}$$

Розв'яжемо спершу задачу (55). Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі, проінтегрувавши рівняння двічі:

$$z = a_0e^t + A_0t + B_0, \quad t\in[0,T],$$

де A_0, B_0 – довільні сталі.

Підставимо цей вираз повного загального розв'язку рівняння даної задачі в її початкові умови для знаходження значень сталих $A_0,\ B_0$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = a_0e^t + A_0, \quad t\in[0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv a_0 + B_0 = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) \equiv a_0 + A_0 = \widehat{\psi}_0.$$

Звідси

$$A_0 = \widehat{\psi}_0 - a_0, \quad B_0 = \widehat{\varphi}_0 - a_0.$$

Отже,

$$\widehat{u}_0(t) = a_0e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0, \quad t\in[0,T].$$

Тепер розв'яжемо задачу (56) для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (56) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k e^t, \; z'' = d_k e^t \quad \Rightarrow \quad d_k e^t + a^2\lambda_k d_k e^t = a_k e^t \Rightarrow \quad (1 + a^2\lambda_k)d_k = a_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{a_k}{1 + a^2\lambda_k}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (56).

Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих $A_k, \; B_k$. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + a\sqrt{\lambda_k}B_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k}B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Звідси маємо

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t, \quad t \in [0,T].$$

Отож, сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є (див. (52)) сумою збіжного в просторі $C([0,T];L^2(0,l))$ ряду

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{l}}\big[a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0\big] +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(\widehat{\varphi}_k - d_k)\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k e^t\Big]\cos\sqrt{\lambda_k}x, \quad (x,t) \in [0,l]\times[0,T].$$

$\square$

Приклад 3. *Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{57}$$

$$(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{58}$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l], \tag{59}$$

де $a > 0$ $l > 0,\ T > 0,\ h_0 > 0$ *— довільно задані і фіксовані числа.*

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку позначимо

$$f(x,t) := 2x\cos t, \quad (x,t) \in Q, \qquad \varphi(x) := \cos x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0,l],$$

і зведемо задачу (57) – (59) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \to L_2(0,l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0,l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0,\ v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \ \ \forall v \in D(A), \tag{60}$$

і позначення

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) := u(x,t),\ x \in [0,l]; \quad [0,T] \ni t \mapsto f(t) := f(x,t),\ x \in [0,l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{61}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \tag{62}$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукання слабкого розв'язку задачі (61), (62).

2-ий крок. Всі власні значення оператора є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0,l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, \quad x \in (0,l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (63) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (63), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{64}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i, \quad i \text{ – уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (64) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \quad x \in [0, l], \tag{65}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x, \quad x \in [0, l], \tag{66}$$

і підставимо вирази (65) і (66) в крайові умови задачі (63):

$$\begin{cases} w'(0) - h_0 w(0) \equiv C_2 \sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases} \tag{67}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (67) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (67) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2. Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_0 & \sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda} l & \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_0 \sin \sqrt{\lambda} l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0, \tag{68}$$

звідки

$$-h_0 \sin \sqrt{\lambda} l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_0}. \tag{69}$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda} l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{l h_0}. \tag{70}$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{71}$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (67) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2. З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A, тобто власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля, підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (65) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \big), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{72}$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int\limits_0^l |w_k(x)|^2\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (C_1)^2\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\sqrt{\int\limits_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)^2\,dx}\right)^{-1}. \tag{73}$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A, що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_0}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big), \quad x \in [0,l], \tag{74}$$

де M_k визначено в (73).

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T], \tag{75}$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l \cos x\cdot\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x)\,dx = 0,$$

$$\widehat{f}_k(t) := \int_0^l f(x,t) w_k(x)\,dx = M_k\int_0^l (2x\cos t)\big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)\,dx =$$
$$= b_k\cos t, \quad t \in [0,T],$$

де

$$b_k := 2M_k\int_0^l \big(\cos\sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\big)x\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{76}$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2\lambda_k\widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), \quad t \in [0,T], \\ \widehat{u}_k(0) = \varphi_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{77}$$

З рівностей (77) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $\widehat{u}_k$ (відповідний коефіцієнт ряду (76)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2\lambda_k z = b_k\cos t, \quad t \in (0,T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \tag{78}$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2\lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \cos t, \;\; t \in [0, T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = -d_k \sin t, \;\; z'' = -d_k \cos t \quad \Rightarrow \quad -d_k \cos t + a^2\lambda_k d_k \cos t = a_k \cos t \Rightarrow \quad (a^2\lambda_k - 1)d_k = b_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k := \frac{b_k}{a^2\lambda_k - 1}.$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k} t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (78). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k, B_k. Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a\sqrt{\lambda_k} \sin a\sqrt{\lambda_k} t + a\sqrt{\lambda_k} B_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t - d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k,$$
$$z'(0) \equiv a\sqrt{\lambda_k} B_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{u}_k(t) := \big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k} t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

і сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є сумою збіжного в просторі $C([0,T]; L^2(0,l))$ ряду:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Big[\big(\widehat{\varphi}_k - d_k\big) \cos a\sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k} t +$$

$$+ d_k \sin t\Big] \Big(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x\Big), \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Нехай $l > 0,\ T > 0,\ h_0 > 0,\ h_1 > 0$ — довільні фіксовані сталі. Знайдіть сильно узагальнений розв'язок даної мішаної задачі для рівняння коливання струни:

1.
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = xe^{2t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 3, \quad x \in [0,l].$$

2.
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u_x|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l].$$

3.
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 3e^{3t}, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad x \in [0,l].$$

4.
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\cos 2t, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 3x, \quad u_t|_{t=0} = 4, \quad x \in [0,l].$$

5.
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2x + 3, \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T],$$
$$(u_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 3x, \quad x \in [0,l].$$