Практичне заняття № 1
Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь у загальному випадку

Нехай $n \geqslant 2$ – довільне натуральне число, $x = (x_1, ..., x_n)$ – точка простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x), \tag{1}$$

де $a_0, a_i, a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, – сталі коефіцієнти, а f – вільний член рівняння, який заданий в $\mathbb{R}^n$, а u – невідома функція.

Виникає питання: як знайти таку (невироджену) заміну незалежних змінних, при якій рівняння (1) матиме найпростіший (канонічний) вигляд? Відповідь отримаємо в два етапи.

1 етап. Спочатку розглядаємо квадратичну форму

$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Нехай стала матриця $P := \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n1} & ... & p_{nn} \end{pmatrix}$ така, що при заміні змінних

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \tau_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ ... \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n1} & ... & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ ... \\ \tau_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad t = P\tau,$$

$$t = (t_1, ..., t_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \tau = (\tau_1, ..., \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

форма $S(t)$ переходить у форму $\widetilde{S}(\tau)$ канонічного вигляду

$$\widetilde{S}(\tau) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \tau_k^2, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

де $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$ (як випливає із закону інерції для квадратичних форм, кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють 1, і кількість коефіцієнтів γ_k, які дорівнюють -1, не залежать від перетворення).

2 етап. Робимо в рівнянні (1) заміну змінних

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{n1} \\ ... & ... & ... \\ p_{1n} & ... & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = P^\top x, \tag{5}$$

де $P^\top$ – транспонована по відношенню до P матриця. У результаті цього рівняння (1) переходить в рівняння канонічного вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{a}_i \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} + \widehat{a}_0 \widetilde{u} = \widehat{f}(\xi), \tag{6}$$

де γ_k ті ж самі, що в (4).

Залежно від значень γ_k у рівнянні (6) або, що те саме, у формі (4) кажуть, що рівняння (1) в точці x^0 є
а) *еліптичним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і однакового знаку, тобто $\gamma_k = 1,\ k = \overline{1,n}$, або $\gamma_k = -1,\ k = \overline{1,n}$.
б) *гіперболічним*, якщо всі коефіцієнти γ_k відмінні від нуля і один з них має протилежний знак до всіх інших, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 1$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = -1$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$;
в) *параболічним*, якщо один з коефіцієнтів γ_k дорівнює нулеві, а решта – відмінні від нуля і одного знаку, тобто (з точністю до нумерації змінних τ_k) маємо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = 1,\ k = \overline{2,n}$, або $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = -1,\ k = \overline{2,n}$;
г) *безтипним* в інших випадках.

Якщо рівняння (1) є еліптичним, або гіперболічним, або параболічним, або безтипним в кожній точці області Ω, то його називають відповідно *еліптичним*, *гіперболічним*, *параболічним* або *безтипним* рівнянням в області Ω.

Увага! Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду використовують різні методи, але найпоширенішим з них є *метод виділення повних квадратів*. Опишемо його.

Нехай

$$S(t) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

– довільна квадратична форма, $a_{ij} = a_{ji} = const$, $i, j = \overline{1,n}$. Можливі такі два випадки:
1) $a_{ii} = 0$ для всіх $i \in \{1, ..., n\}$.
2) $a_{ii} \neq 0$ хоча б одного значення $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Розглянемо *перший випадок*. Він легко зводиться до другого так. Оскільки квадратична форма ненульова, то існує хоча би один з її коефіцієнтів відмінний від нуля. Припустимо, не зменшуючи загальності, що $a_{12} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$t_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad t_2 = \alpha_1 + \alpha_1, \quad t_i = \alpha_i, \quad i = 3, ..., n.$$

У результаті приходимо до квадратичної форми, в якій є відмінний від нуля коефіцієнт при квадраті змінної. А далі робимо так, як в другому випадку.

Розглянемо *другий випадок*. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $a_{11} \neq 0$. Випишемо всі члени нашої квадратичної форми, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за правилом

$$a_{11} t_1^2 + 2a_{12} t_1 t_2 + ... + 2a_{1n} t_1 t_n =$$
$$= \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 - \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} t_i t_j.$$

Підставивши отриманий вираз у вихідну форму і спростивши подібні члени, прийдемо до зображення вихідної форми у вигляді

$$S(t) = \frac{1}{a_{11}} [a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + ... + a_{1n} t_n]^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j.$$

Тепер зауважимо, що вираз $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a''_{ij} t_i t_j$ являє собою квадратичну форму від $n - 1$ (або менше) змінних. Перетворивши цю форму аналогічно вихідній, отримаємо зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми двох квадратів лінійних виразів від змінних

$t_1, ..., t_n$ і квадратичної форми від $n-2$ (або менше) змінних. Продовжуючи діяти аналогічно, через скінченну кількість кроків прийдемо до зображення вихідної квадратичної форми у вигляді суми квадратів лінійних виразів від змінних $t_1, ..., t_n$:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [b_{k1}t_1 + b_{k2}t_2 + ... + b_{kn}t_n]^2,$$

де для деяких k може бути $\lambda_k = 0$, але якщо $\lambda_k \neq 0$, то хоча би для одного значення j коефіцієнт $b_{kj} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$\tau_k = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_k|}(b_{k1}t_1 + b_{k2}t_2 + ... + b_{kn}t_n), & \text{якщо} \quad \lambda_k \neq 0, \\ t_k, & \text{якщо} \quad \lambda_k = 0, \end{cases} \quad k = 1, ..., n.$$

У результаті приходимо до канонічного вигляду (4), де $\gamma_k = 1$, якщо $\lambda_k > 0$, $\gamma_k = -1$, якщо $\lambda_k < 0$, і $\gamma_k = 0$, якщо $\lambda_k = 0$.

Приклад 1.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yz} - u_{zz} + u_z - u = y.$$

Розв'язування.
1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := 4t_1^2 + 4t_1t_2 + 2t_2t_3 - t_3^2, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів. Оскільки коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом

$$4t_1^2 + 4t_1t_2 = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2.$$

Підставимо отриманий вираз у вихідну форму:

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - t_2^2 + 2t_2t_3 - t_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$-t_2^2 + 2t_2t_3 = -(-t_2 + t_3)^2 + t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз вихідної квадратичної форми у вигляді

$$S(t) = \frac{1}{4}(4t_1 + 2t_2)^2 - (-t_2 + t_3)^2 = (2t_1 + t_2)^2 - (t_2 - t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \tau_1 = 2t_1 + t_2 \\ \tau_2 = t_2 - t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases}.$$

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau), \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, де

$$\widetilde{S}(\tau) := \tau_1^2 - \tau_2^2.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом вихідної форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"змінні τ:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{2}\tau_3 \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3 \\ t_3 = \tau_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2 етап. Потрібну заміну змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"змінні $(x, y, z)^\top$)) маємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = 1/2x \\ \eta = -1/2x + y \\ \zeta = -1/2x + y + z \end{cases}.$$

Далі використаємо позначення

$$\partial_\xi := \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\eta := \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \partial_\zeta := \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\xi} := \partial_\xi \partial_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi}, \quad \partial^2_{\eta\eta} := \partial_\eta \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta}, \quad \partial^2_{\zeta\zeta} := \partial_\zeta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta},$$

$$\partial^2_{\xi\eta} := \partial_\xi \partial_\eta = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \partial^2_{\xi\zeta} := \partial_\xi \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad \partial^2_{\eta\zeta} := \partial_\eta \partial_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta},$$

а також формулу

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
-1 \,\big|\, & u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta), \\
+0 \,\big|\, & u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot \frac{1}{2} + \widetilde{u}_\eta \cdot (-\frac{1}{2}) + \widetilde{u}_\zeta \cdot (-\frac{1}{2}) = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\widetilde{u}, \\
+0 \,\big|\, & u_y = \widetilde{u}_\eta + \widetilde{u}_\zeta = (\partial_\eta + \partial_\zeta)\widetilde{u}, \\
+1 \,\big|\, & u_z = \partial_\zeta \widetilde{u}, \\
+4 \,\big|\, & u_{xx} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)^2\widetilde{u} = \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\xi\xi} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{4}\widetilde{u}_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta}, \\
-1 \,\big|\, & u_{zz} = \partial_\zeta \partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+4 \,\big|\, & u_{xy} = \big(\frac{1}{2}\,\partial_\xi - \frac{1}{2}\,\partial_\eta - \frac{1}{2}\,\partial_\zeta\big)\big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\widetilde{u} = \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\eta\zeta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
+2 \,\big|\, & u_{yz} = \big(\partial_\eta + \partial_\zeta\big)\partial_\zeta \widetilde{u} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставимо вирази похідних функції u у вихідне рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}]+\widetilde{u}_{\eta\eta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\zeta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot(-\frac{1}{2})+2\cdot1+(-1)\cdot1]+\widetilde{u}_{\xi\eta}\cdot[4(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+$$

$$+\widetilde{u}_{\xi\zeta}\cdot[4\cdot(-\frac{1}{2})+4\cdot\frac{1}{2}]+\widetilde{u}_{\eta\zeta}\cdot[4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot(-\frac{1}{2})]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\xi}\cdot[0]+\widetilde{u}_{\zeta}\cdot[1\cdot1]+\widetilde{u}\cdot[-1\cdot1]=\xi+\eta.$$

Після спрощення прийдемо до канонічного вигляду заданого рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}-\widetilde{u}_{\eta\eta}+\widetilde{u}_{\zeta}-\widetilde{u}=\xi+\eta.$$

$\square$

Приклад 2.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}+u_{yy}+2u_{zz}-2u_{xz}-2u_{yz}+u_x-2u_z=0.$$

Розв'язування.
1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t)=t_1^2+t_2^2+2t_3^2-2t_1t_3-2t_2t_3,\quad t=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3.$$

і зведемо її до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів.

Врахувавши, що коефіцієнт при t_1^2 відмінний від нуля, випишемо всі члени, які містять змінну t_1, і виділимо повний квадрат за вказаним вище правилом:

$$t_1^2-2t_1t_3=(t_1-t_3)^2-t_3^2.$$

Отриманий вираз підставимо у вихідну форму:

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+t_2^2+t_3^2-2t_2t_3.$$

Тепер, оскільки коефіцієнт при t_2^2 відмінний від нуля, перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну t_2:

$$t_2^2-2t_2t_3=(t_2-t_3)^2-t_3^2.$$

У результаті вказаних перетворень отримаємо вираз форми $S(t)$ вигляді

$$S(t)=(t_1-t_3)^2+(t_2-t_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases}\tau_1=t_1-t_3\\ \tau_2=t_2-t_3\\ \tau_3=t_3\end{cases}.$$

Тоді $S(t)=\widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau)=\tau_1^2+\tau_2^2,\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Це означає, що дане рівняння є параболічним. Виразимо "старі"змінні t через "нові"τ:

$$\begin{cases}t_1=\tau_1+\tau_3\\ t_2=\tau_2+\tau_3\\ t_3=\tau_3\end{cases}.$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 етап. Отож, в рівнянні робимо заміну змінних

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \\ \zeta = x + y + z \end{cases}.$$

Тоді, оскільки $u(x, y, z) = \widetilde{u}(\xi, \eta, \zeta)$, то

$$\begin{aligned}
&+1|\ u_x = \widetilde{u}_\xi \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
&+0|\ u_y = \widetilde{u}_\eta \cdot 1 + \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
&-2|\ u_z = \widetilde{u}_\zeta \cdot 1, \\
&+1|\ u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
&+1|\ u_{yy} = \widetilde{u}_{\eta\eta} + 2\widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
&+2|\ u_{zz} = \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
&-2|\ u_{xz} = \widetilde{u}_{\xi\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}, \\
&-2|\ u_{yz} = \widetilde{u}_{\eta\zeta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta}.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\eta\eta} \cdot [1] + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} \cdot [1 + 1 + 2 - 2 - 2] + \widetilde{u}_{\xi\eta} \cdot [0] + \widetilde{u}_{\xi\zeta} \cdot [2 - 2] + \widetilde{u}_{\eta\zeta} \cdot [2 - 2] +$$

$$+ \widetilde{u}_\xi \cdot [1] + \widetilde{u}_\eta \cdot [0] + \widetilde{u}_\zeta \cdot [1 - 2] = 0,$$

звідки маємо

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\zeta = 0$$

- канонічний вигляд заданого рівняння. □

Приклад 3.

Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xy} + 2u_{yz} + u_z - u = x + y.$$

Розв'язування.

1 етап. Випишемо відповідну даному рівнянню квадратичну форму

$$S(t) := t_1 t_2 + 2t_2 t_3, \quad t := (t_1, t_2, t_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Перш ніж виділяти повні квадрати, зробимо в цій формі заміну змінних

$$\begin{cases} t_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ t_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ t_3 = \alpha_3 \end{cases}.$$

У результаті отримаємо $S(t) = \widehat{S}(\alpha)$, де

$$\widehat{S}(\alpha) := \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Оскільки коефіцієнт при α_1^2 відмінний від нуля, то випишемо всі члени, які містять змінну α_1, і виділимо повний квадрат за вказаним у зауваженні 1.3 правилом:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_3^2.$$

Підставимо отриманий вираз у форму $\widehat{S}(\alpha)$:

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2.$$

Тепер перетворимо аналогічним чином суму членів даної форми, які містять змінну α_2:

$$-\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 = -(-\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \alpha_3^2.$$

В результаті отримаємо

$$\widehat{S}(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_3) - (-\alpha_2 + \alpha_3)^2.$$

Зробимо заміну змінних $\begin{cases} \tau_1 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ \tau_2 = -\alpha_2 + \alpha_3 \\ \tau_3 = \alpha_3 \end{cases}$.

Тоді $S(t) = \widetilde{S}(\tau)$, де

$$\widetilde{S}(\tau) = \tau_1^2 - \tau_2^2, \quad \tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^\top \in \mathbb{R}^3.$$

Форма $\widetilde{S}(\tau)$ є канонічним виглядом форми $S(t)$. Отже, дане рівняння є безтипним. Приведемо його до канонічного вигляду. Для знаходження відповідної заміни виразимо "старі"змінні t через "нові"τ (виразивши спочатку змінні α через змінні τ і підставивши їх у співвідношення між змінними α і t):

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3 \\ t_2 = \tau_1 - \tau_2 \\ t_3 = \tau_3, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 етап. Потрібна заміна змінних у вихідному рівнянні ("нові"змінні $(\xi, \eta, \zeta)^\top$ виражаються через "старі"$(x, y, z)^\top$) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = -x + y \\ \zeta = -2x + z \end{cases}.$$

Обчисливши похідні і підставивши їх вирази у вихідне рівняння, після спрощення прийдемо до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\zeta - u = \xi.$$

□

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння (загальний випадок):

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$;
б) $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$;
в) $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + 3u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_{zz} - 8u = 0$;
г) $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + 4u_{yz} + u_{zz} + 2u = 0$;

Відповіді:

1. а) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\zeta\zeta} = 0; \quad \xi = x, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = 2x - 2y + z$;
б) $\widetilde{u}_{\xi\xi} - \widetilde{u}_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2\widetilde{u}_{\eta} = 0; \quad \xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = -x - y + z$;
в) $\widetilde{u}_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 8\widetilde{u} = 0; \quad \xi = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \quad \eta = -\frac{1}{2}(y + z), \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - z)$;
г) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u} = 0; \quad \xi = x, \quad \eta = -2x + y, \quad \zeta = -x + z$.