Розділ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну.

Рівняння 1.1, нерозв'язане відносно похідної, називають неявним. Диференціальне рівняння першого порядку, крім того, може бути записане в одній із таких форм:

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{1.3}$$

Рівняння 1.2 — рівняння, розв'язане відносно похідної або в нормальній формі, рівняння 1.3 — у диференціальній формі.

Розв'язком диференціального рівняння називають таку диференційовну функцію $y = \varphi(x)$, яка у разі підстановки в рівняння замість невідомої функції перетворює його на тотожність. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають *інтегруванням* диференціального рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку в області D називають функцію $y = \varphi(x, C)$, яка містить довільну сталу C та задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння за будь-якого значення сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0, y_0) \in D$ можна знайти таке значення $C = C_0$, за якого функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$, добутий із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ за конкретного значення сталої $C = C_0$, називають *частинним розв'язком.*

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом диференціального рівняння.* Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом рівняння.*

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє задану початкову умову, називають *задачею Коші.*

Теорема Коші *(про існування та єдиність розв'язку).* Якщо функція $f(x,y)$ та її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені та неперервні у відкритій області D і точка $(x_0,y_0)\in D$, то існує єдиний розв'язок диференціального рівняння 1.2, який задовольняє початкову умову 1.4.

Особливим розв'язком називають розв'язок диференціального рівняння, у кожній точці якого порушуються умови теореми існування та єдиності розв'язку. Особливі розв'язки неможливо одержати із загального розв'язку диференціального рівняння ні за яких значень довільної сталої C.

Приклад 1.1. Перевірити, чи є функція $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ розв'язком диференціального рівняння $y'\sin x=y\ln y$.

Розв'язання. Диференціюємо задану функцію:

$$y'=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Підставляємо y' та y в задане рівняння:

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\sin x=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\ln e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\;\Leftrightarrow\;\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

У результаті одержуємо $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\equiv\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Відповідь. Функція $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ є розв'язком заданого рівняння.

Приклад 1.2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих $y^2=2Cx$.

Розв'язання. Диференціюємо задану неявну функцію: $2yy'=2C$, звідки $C=yy'$. Підставляємо знайдене значення C у вихідне рівняння:

$$y^2=2xyy',$$

звідки одержуємо шукане диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих $y-2y'x=0$.

Приклад 1.3. Знайти криву сім'ї $y=x+Ce^y$, для якої $y(4)=0$.

Розв'язання. Підставляємо у вихідне рівняння значення $x=4$ та $y=0$ з початкової умови:

$$0=4+Ce^0\quad\Leftrightarrow\quad C=-4.$$

Тоді рівняння шуканої кривої набуде вигляду $y=x-4e^y$.

Завдання для самостійного розв'язання

Перевірити, чи задовольняють диференціальні рівняння вказані функції.

1. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$ **2.** $y' = y \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} x, \quad y = 3 + 4 \operatorname{tg} x.$
3. $xy' - y \ln y = 0, \quad y = e^{Cx}.$ **4.** $xy^2y' = x^2 + y^3, \quad y = x^3.$

Показати, що для заданих диференціальних рівнянь зазначені співвідношення є інтегралами.

5. $(x - 2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 - C^2 = 0.$
6. $2yy' + 3x^2 + \sin 2x = 0, \quad x^3 + \sin^2 + y^2 - C = 0.$

Скласти диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих (C — довільна стала).

7. $y = Cx.$ **8.** $y^2 = 2Cx.$ **9.** $y = Ce^x.$ **10.** $x^3 = C(x^2 - y^2).$

Відповіді
1. Так. **2.** Ні. **3.** Так. **4.** Ні. **7.** $y - xy' = 0.$ **8.** $y - 2xy' = 0.$
9. $y' - y = 0.$ **10.** $3y^2 - x^2 = 2xyy'.$

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Виділимо основні типи рівнянь, коли можлива процедура відокремлення змінних із подальшим інтегруванням вихідного рівняння.

1. Рівняння вигляду

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{1.5}$$

є найбільш просте диференціальне рівняння першого порядку. Загальний інтеграл можна одержати, якщо проінтегрувати його почленно:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.$$

Приклад 1.4. Знайти загальний розв'язок рівняння $x\,dx - y\,dy = 0$.

Розв'язання. Інтегруємо почленно: $\int x\,dx - \int y\,dy = C_1$ або $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = C_1$. Позначимо $\dfrac{C}{2} = C_1$. Тоді $x^2 - y^2 = C$ — загальний інтеграл вихідного рівняння.

2. Рівняння вигляду

$$P_1(x)\,Q_1(y)\,dx + P_2(x)\,Q_2(y)\,dy = 0 \tag{1.6}$$

легко звести до рівняння 1.5 шляхом почленного ділення його на $Q_1(y)\,P_2(x) \neq 0$. Одержимо:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0, \quad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = C$$

— загальний інтеграл. У процесі проведення почленного ділення на $Q_1(y)P_2(x)$ можна втратити деякі розв'язки. Тому треба окремо розв'язати рівняння $Q_1(y)P_2(x) = 0$ та установити розв'язки, які не можуть бути одержані з загального розв'язку, тобто особливі розв'язки.

Приклад 1.5. Розв'язати рівняння $(y + xy)\,dx + (x - xy)\,dy = 0$.

Розв'язання. Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$y(1 + x)\,dx + x(1 - y)\,dy = 0,$$

то воно є рівняння з відокремлюваними змінними. Поділимо обидві його частини на $xy \neq 0$:

$$\frac{1 + x}{x}\,dx + \frac{1 - y}{y}\,dy = 0.$$

Інтегруємо:

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = C.$$

Одержимо загальний інтеграл

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C, \text{ тобто } \ln|xy| + x - y = C.$$

Рівняння $Q_1(y)P_2(x) = 0$ має вигляд $xy = 0$. Його розв'язки $x = 0$, $y = 0$ є розв'язками вихідного рівняння, але не входять в загальний інтеграл. Отже, розв'язки $x = 0$, $y = 0$ є особливі.

3. Рівняння

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{1.7}$$

також є рівняння з відокремлюваними змінними. Достатньо замінити $y' = \dfrac{dy}{dx}$ та відокремити змінні:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\,f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx, \quad \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Приклад 1.6. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{\cos 2x}{y^2}$.

Розв'язання. Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2x}{y^2}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на y^2dx:

$$y^2dy = \cos 2xdx.$$

Інтегруємо:

$$\int y^2dy = \int \cos 2xdx + C_1.$$

Одержимо загальний інтеграл

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1.$$

Звідси $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sin 2x + C}$, де $C = 3C_1$.

4. Рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \tag{1.8}$$

де a, b, c — числа, можна звести до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними заміною $ax + by + c = u$. Взявши похідну u по змінній x, одержимо:

$$\frac{du}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx}, \quad \text{тобто} \quad \frac{du}{dx} = a + b\,f(u),$$

звідки випливає $\dfrac{du}{a + b\,f(u)} = dx$. Інтегруючи це рівняння та заміняючи u на $ax + by + c$, одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння.

Приклад 1.7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = (x + y)^2$.

Розв'язання. Уводимо заміну: $u = x+y$. Тоді $\dfrac{du}{dx} = 1+\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{du}{dx} = 1+u^2$. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{du}{1 + u^2} = dx, \quad \int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx + C, \quad \operatorname{arctg} u = x + C.$$

Заміняючи u на $x + y$, одержуємо загальний інтеграл

$$\operatorname{arctg}(x + y) = x + C.$$

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 1.8. Знайти частинний інтеграл рівняння $y' \cos x = \dfrac{y}{\ln y}$, який би задовольняв початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння з урахуванням $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\cos x\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}, \quad \frac{\ln y}{y}dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C, \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Скориставшись умовою $y = 1$, якщо $x = 0$, знайдемо $C = 0$. Остаточно одержуємо

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад 1.9. Знайти розв'язок рівняння $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$, який би задовольняв початкову умову $y(0) = 0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння наступним чином:

$$y' = e^x e^y + \frac{e^x}{e^y}, \qquad \frac{dy}{dx} = e^x \, \frac{e^{2y} + 1}{e^y}.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{e^y dy}{e^{2y} + 1} = e^x dx, \qquad \int \frac{e^y dy}{e^{2y} + 1} = \int e^x dx + C, \qquad \operatorname{arctg} e^y = e^x + C.$$

Скориставшись умовою $y = 0$, якщо $x = 0$, знайдемо $C = \dfrac{\pi}{4} - 1$. Остаточно одержуємо

$$\operatorname{arctg} e^y = e^x + \frac{\pi}{4} - 1 \quad \text{або} \quad y = \ln \operatorname{tg}\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right).$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні інтеграли або розв'язки диференціальних рівнянь.

11. $xy' - y = 0$.

12. $y^2 dx + x dy = 0$.

13. $xyy' = 1 - x^2$.

14. $yy' = \dfrac{1 - 2x}{y}$.

15. $y' = (2y + 1)\operatorname{tg} x$.

16. $y' \operatorname{tg} x - y = a$.

17. $xy' + y = y^2$.

18. $xy' - y \ln y = 0$.

19. $(x^2 y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx$.

20. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$.

21. $(y^2 + 3)dx - \dfrac{e^x}{x} y dy = 0$.

22. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0$.

23. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$.

24. $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.

25. $y' = 10^{x+y}$.

26. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$.

27. $y' = \cos(x - y)$.

28. $y' = 3x - 2y + 5$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

29. $\left(1-e^{y^2}\right)dy=\dfrac{dx}{2y}, \quad y(0)=0.$ **30.** $\dfrac{y}{y'}=\ln y, \quad y(2)=1.$

31. $\dfrac{dx}{x(y-1)}+\dfrac{dy}{y(x+2)}=0, \quad y(1)=1.$

32. $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy=e^xdx, \quad y(0)=0.$

33. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y), \quad y(0)=\dfrac{\pi}{4}.$

34. $\sin x dy-(\cos x-\sin x)(y+1)dx=0, \quad y(\dfrac{\pi}{2})=0.$

35. $y'\sin x=y\ln y, \quad y(\dfrac{\pi}{2})=e.$

36. $\sin y\cos x dy=\cos y\sin x dx, \quad y(0)=\dfrac{\pi}{4}.$

Відповіді

11. $y=Cx$. **12.** $\ln Cx-\dfrac{1}{y}=0.$ **13.** $y=\pm\sqrt{\ln x^2-x^2+C}.$

14. $y^3=3x-3x^2+C.$ **15.** $\sqrt{2y+1}=\dfrac{C}{\cos x}.$ **16.** $y=C\sin x-a.$

17. $\dfrac{y-1}{y}=Cx.$ **18.** $y=e^{Cx}.$ **19.** $\dfrac{x+y}{xy}=\ln\dfrac{x}{y}+C.$ **20.** $y^2+1=C(1-x^2).$

21. $\ln(y^2+3)=2(C-xe^{-x}-e^{-x}).$ **22.** $\ln|\sin y|=C+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x.$

23. $\dfrac{1}{2}y^2-2y+\ln|y|=\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C.$ **24.** $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C.$

25. $10^x+10^{-y}=C.$ **26.** $\ln|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}|=C-2\sin\dfrac{x}{2}.$ **27.** $x+\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=C.$

28. $4y-6x-7=Ce^{-2x}.$ **29.** $e^{y^2}-y^2+x=1.$ **30.** $2(x-2)=\ln^2 y$

31. $x+y+2\ln x-\ln y=2.$ **32.** $\dfrac{1}{3}y^3=\operatorname{arctg}e^x-\dfrac{\pi}{4}.$ **33.** $\ln|\operatorname{tg}y|=4(1-\cos x).$

34. $\ln\left|\dfrac{y+1}{\sin x}\right|+x=\dfrac{\pi}{2}.$ **35.** $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$ **36.** $\cos x=\sqrt{2}\cos y.$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння

Функцію $f(x,y)$ називають *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінниїх x та y, якщо для довільного $t\neq 0$ виконується умова

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$y'=f(x,y) \tag{1.9}$$

називають *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідна функція нульового виміру.

Якщо покласти $t = \dfrac{1}{x}$, то однорідне рівняння 1.9 можна звести до вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.10}$$

Рівняння 1.10 перетвориться на рівняння з відокремлюваними змінними у разі застосування заміни $\dfrac{y}{x} = u$. Підставляючи $y = ux$ та $y' = u'x + u$ у рівняння 1.10, одержимо $u'x + u = \varphi(u)$ або $x\dfrac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, тобто рівняння з відокремлюваними змінними. Відшукавши загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) цього рівняння, замінимо в ньому u на $\dfrac{y}{x}$.

Приклад 1.10. Знайти загальний інтеграл рівняння $y' = \dfrac{y^2 + xy}{2x^2 + xy}$.

Розв'язання. Задане рівняння однорідне, оскільки права частина цього рівняння $f(x, y) = \dfrac{y^2 + xy}{2x^2 + xy}$ є однорідна функція нульового виміру:

$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2 + txty}{2(tx)^2 + txty} = \frac{t^2(y^2 + xy)}{t^2(2x^2 + xy)} = \frac{y^2 + xy}{2x^2 + xy} = f(x, y).$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$ та перетворимо вихідне рівняння до вигляду

$$y' = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x}}{2 + \dfrac{y}{x}}.$$

Застосовуючи підстановку $\dfrac{y}{x} = u$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = \frac{u^2 + u}{2 + u}, \qquad u'x = \frac{u^2 + u}{2 + u} - u, \qquad x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2 + u}.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{(2 + u)du}{u} = -\frac{dx}{x}, \quad \int\left(\frac{2}{u} + 1\right)du = -\int\frac{dx}{x} + C_1, \quad 2\ln u + u = -\ln x + \ln C.$$

Останній вираз можна переписати у вигляді $u = \ln\dfrac{C}{xu^2}$. Підставляємо $\dfrac{y}{x}$ замість u:

$$\frac{y}{x} = \ln\frac{Cx}{y^2} \quad \text{або} \quad y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}.$$

Диференціальне рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.11}$$

буде однорідним, якщо $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ — однорідні функції одного й того ж виміру. Поклавши $y = ux$, рівняння 1.11 зведемо також до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1.11. Знайти загальний інтеграл рівняння $(x^2-y^2)dx+2xydy = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння однорідне, оскільки функції $P(x, y) = x^2-y^2$ та $Q(x, y) = 2xy$ — однорідні функції другого порядку. Нехай $y = ux$. Тоді $dy = xdu + udx$. Підставляємо y та dy у вихідне рівняння:

$$(x^2 - u^2x^2)dx + 2x(ux)(xdu + udx) = 0, \qquad x^2(1 - u^2 + 2u^2)dx + 2ux^3du = 0,$$

$$(1 + u^2)dx + 2uxdu = 0, \qquad \frac{dx}{x} + \frac{2udu}{1 + u^2} = 0, \qquad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{1 + u^2} = C_1,$$

$$\ln|x| + \ln|1 + u^2| = \ln C \ (C_1 = \ln C), \qquad x(1 + u^2) = C.$$

Підставляючи $\dfrac{y}{x}$ замість u, остаточно отримуємо $x^2 + y^2 = Cx$ — загальний інтеграл вихідного рівняння.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

37. $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$.

38. $y' = -\dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + xy}$.

39. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

40. $xdy - ydx = ydy$.

41. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

42. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

43. $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$.

44. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

45. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

46. $xy' = y \ln\dfrac{y}{x}$.

47. $xy' - y = x \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

48. $xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0$.

49. $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 2$.

50. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$.

Відповіді

37. $2y^2-2xy+x^2 = C$. **38.** $2y^2x^2+4x^3y+x^4 = C$. **39.** $\ln|x+y|+\dfrac{x}{x+y} = C$. **40.** $\ln|y| + \dfrac{x}{y} = C$. **41.** $\dfrac{y - 2x}{y + x} = Cx^3$. **42.** $x^2 + y^2 = Cy$. **43.** $Cx = e^{\cos\frac{y}{x}}$. **44.** $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. **45.** $Cy = e^{y/x}$. **46.** $y = xe^{1+Cx}$. **47.** $y = x \arcsin x$. **48.** $y = -x\ln|1 - \ln x|$. **49.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x} - 2\ln|x| = \dfrac{\pi}{4}$. **50.** $y^3 = y^2 - x^2$.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду
$$y' + p(x)y = g(x), \tag{1.12}$$
де $p(x)$ та $g(x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Розглянемо два методи інтегрування рівняння 1.12 — метод Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод Бернуллі

Розв'язок рівняння 1.12 шукають як добуток $y = uv$, де u і v — невідомі функції, причому одна з них довільна (але не рівна тотожно нулю). Підставляючи y та y' у вихідне рівняння, одержимо
$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x) \quad \text{або} \quad v(u' + p(x)u) + uv' = g(x).$$
Доберемо функцію u так, щоб
$$u' + p(x)u = 0, \tag{1.13}$$
тоді
$$uv' = g(x). \tag{1.14}$$
Розв'яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні 1.13 змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок:
$$\frac{du}{dx} = -p(x)u, \qquad \int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx, \qquad u = C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$
Візьмемо за u будь-який частинний розв'язок рівняння 1.13, наприклад
$$u = e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.15}$$
Знаючи функцію u, з рівняння 1.14 знаходимо функцію v:
$$v = \int g(x)e^{\int p(x)dx} + C. \tag{1.16}$$
Підставляючи функції 1.15 і 1.16 в $y = uv$, знаходимо загальний розв'язок рівняння 1.12:
$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx} + C\right).$$

Приклад 1.12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + 2xy = 2x$.

Розв'язання. Це лінійне рівняння вигляду 1.12, в якому $p(x) = 2x$, $g(x) = 2x$. Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо
$$u'v + uv' + 2xuv = 2x \quad \text{або} \quad v(u' + 2xu) + uv' = 2x.$$

Доберемо функцію u так, щоб $u' + 2xu = 0$, тоді $uv' = 2x$. Інтегруючи перше з рівнянь, одержуємо

$$\frac{du}{u} = -2xdx; \qquad \ln|u| = -\frac{2x^2}{2}; \qquad u = e^{-x^2}.$$

Підставивши значення u у друге рівняння, маємо

$$v'e^{-x^2} = 2x; \qquad \frac{dv}{dx} = 2xe^{x^2}; \qquad v = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду

$$y = uv = e^{-x^2}(e^{x^2} + C) = 1 + Ce^{-x^2}.$$

Метод Лагранжа (метод варіації сталої)

Якщо в рівнянні 1.12 $g(x) \neq 0$, то рівняння називають лінійним неоднорідним, а якщо $g(x) \equiv 0$ — лінійним однорідним. За методом Лагранжа спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'+p(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx;$$
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C; \quad y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

де C — довільна стала, загальний же розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знаходимо, варіюючи довільну сталу, тобто припускаючи $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ — деяка диференційовна функція, яку необхідно знайти. Після підстановки y у вихідне рівняння 1.12 та відповідних перетворень одержуємо наступне рівняння:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

звідки

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + A,$$

де A — довільна стала. Тоді шуканий загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + A\right).$$

Приклад 1.13. Методом варіації довільної сталої знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = x^3$.

Розв'язання. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C; \quad y = \frac{C}{x}.$$

Замінимо C на $C(x)$, тобто розв'язок вихідного рівняння будемо шукати як $y = \dfrac{C(x)}{x}$. Знаходимо $y' = \dfrac{C'(x)}{x} - \dfrac{C(x)}{x^2}$ та підставляємо y та y' у вихідне рівняння:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^3; \quad C'(x) = x^4; \quad C(x) = \frac{x^5}{5} + A.$$

Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^5}{5} + A\right) = \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x}.$$

Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = g(x)y^m,$$

де $m \neq 0, m \neq 1$, називають рівнянням Бернуллі. Його можна перетворити на лінійне рівняння шляхом підстановки $z = y^{1-m}$. А втім на практиці зручніше відразу застосовувати один із розглянутих методів інтегрування лінійних рівнянь без попередніх перетворень.

Приклад 1.14. Знайти розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = xy^3$, який би задовольняв умову $y(1) = 2$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок заданого рівняння у вигляді $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у вихідне рівняння:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = xu^3v^3 \quad \text{або} \quad v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = xu^3v^3.$$

Доберемо функцію u так, щоб $u' + \dfrac{u}{x}$, тоді $uv' = xu^3v^3$. Інтегруємо перше рівняння:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|u| = -\ln|x|; \qquad u = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо значення u у друге рівняння:

$$\frac{1}{x}v' = \frac{xv^3}{x^3}; \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v^3}{x}; \qquad \frac{dv}{v^3} = \frac{dx}{x}; \qquad -\frac{1}{2v^2} = \ln x - \frac{\ln C}{2}; \qquad \frac{1}{v^2} = \ln\frac{C}{x^2}.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного рівняння можна записати у вигляді

$$y = uv; \qquad \frac{1}{y^2} = \frac{1}{u^2v^2} = x^2 \ln\frac{C}{x^2}.$$

Скориставшись початковою умовою $y = 2$, якщо $x = 1$, знайдемо значення C:

$$\frac{1}{4} = \ln C; \qquad C = \sqrt[4]{e}.$$

Остаточно одержуємо частинний інтеграл у вигляді $\dfrac{1}{y^2} = x^2 \ln \dfrac{\sqrt[4]{e}}{x^2}$.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

51. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

52. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$.

53. $y' + 2\operatorname{ctg} x \cdot y = \dfrac{1}{\sin x}$.

54. $y' + \dfrac{2x^2}{x^3+1} \cdot y = x^2$.

55. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} \cdot y = 1$.

56. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

57. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x; \quad y(1) = 0$.

58. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x; \quad y(0) = 0$.

59. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

60. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

61. $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x} + y$.

62. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

63. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0; \quad y(0) = 1$.

64. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}; \quad y(0) = \dfrac{9}{4}$.

Відповіді

51. $y = e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + C\right)$. **52.** $y = \dfrac{1}{x^2}\left(\ln|x| + C\right)$.

53. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}(C - \cos x)$. **54.** $y = (x^3+1)^{-2/3}\left((x^3+1)^{1/3} + C\right)$.

55. $y = x^2 + Cx^2 e^{1/x}$. **56.** $y = (x+C)(1+x^2)$. **57.** $y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$.

58. $y = \dfrac{1}{3\cos x}(6\sin x - 2\sin^3 x)$. **59.** $xy(\ln^2 x + C) + 2 = 0$.

60. $y = \dfrac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$. **61.** $y = e^x\sqrt{x^2 + C}$. **62.** $y = \dfrac{1}{4}x^4(C + \ln x)^2$.

63. $y = \dfrac{1}{\cos x(x+1)}$. **64.** $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

1.5. Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

де $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, називають *рівнянням у повних диференціалах*, тобто ліва частина такого рівняння є повний диференціал деякої функції $u(x,y)$:

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad \text{де} \quad du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд

$$u(x,y) = C. \tag{1.17}$$

Інтегрування рівнянь у повних диференціалах можна здійснити таким чином.

1. Оскільки $P(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, то

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = F(x,y) + \varphi(y),$$

де $F(x,y)$ — первісна функції $P(x,y)$, а $\varphi(y)$ — невідома функція, яку необхідно відшукати.

2. Ураховуючи, що $Q(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$,

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y) + \varphi(y)) \quad \text{або} \quad Q(x,y) = F'_y(x,y) + \varphi'(y).$$

Із останнього рівняння знаходимо $\varphi(y)$, після чого загальний інтеграл вихідного рівняння можна записати у вигляді 1.17.

Приклад 1.15. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0.$$

Розв'язання. У даному випадку

$$P(x,y) = e^x + y + \sin y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y;$$
$$Q(x,y) = e^y + x + x\cos y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y.$$

Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то ліва частина рівняння є повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = e^x + y + \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = e^y + x + x\cos y.$$

Проінтегруємо $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u(x,y)=\int(e^x+y+\sin y)dx+\varphi(y)=e^x+xy+x\sin y+\varphi(y).$$

Знайдемо функцію $\varphi(y)$, диференціюючи останній вираз по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+\varphi'(y).$$

Прирівняємо до $Q(x,y)$, одержимо рівняння

$$x+x\cos y+\varphi'(y)=e^y+x+x\cos y,\text{ звідки }\varphi'(y)=e^y,\text{ тобто }\varphi(y)=e^y+C_1.$$

Таким чином, загальний інтеграл вихідного рівняння набуває вигляду

$$e^x+xy+x\sin y+e^y=C.$$

В іншому випадку, якщо умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ не виконується, у деяких випадках таке рівняння можна звести до рівняння в повних диференціалах множенням його на так званий *інтегрувальний множник*, який у загальному випадку є функцією від x і y: $\mu(x,y)$.

Розглянемо два окремі випадки, коли інтегрувальний множник залежить тільки від x, тобто $\mu=\mu(x)$, або тільки від y, тобто $\mu=\mu(y)$.

1. Якщо вираз

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

залежить тільки від x, то інтегрувальний множник визначаємо за формулою

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx\right).$$

2. Якщо вираз

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

залежить тільки від y, то інтегрувальний множник визначатимемо за формулою

$$\mu(y)=\exp\left(\int\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}dy\right).$$

Приклад 1.16. Розв'язати рівняння $(x^2y^2-1)dx+2x^3ydy=0$.
Розв'язання. У даному випадку

$$P(x,y)=x^2y^2-1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y;$$
$$Q(x,y)=2x^3y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Задане рівняння не являє собою рівняння у повних диференціалах, оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Але

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2x^2y-6x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x},$$

тобто цей вираз залежить тільки від x. Тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x. Знайдемо цей інтегрувальний множник:

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx\right)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}.$$

Помножимо обидві частини заданого рівняння на цей множник. Одержимо рівняння

$$\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+2xydy=0.$$

Це рівняння є рівняння в повних диференціалах. Дійсно,

$$P_1(x,y)=y^2-\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial y}=2y;$$
$$Q_1(x,y)=2xy, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x}=2y.$$

Отже, ліва частина отриманого рівняння має вигляд $du(x,y)$. Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P_1(x,y)=y^2-\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q_1(x,y)=2xy.$$

Інтегруючи першу з цих рівностей по x, маємо

$$u(x,y)=\int\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=xy^2+\frac{1}{x}+\varphi(y).$$

Відтак знаходимо похідну по y від одержаної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+\varphi'(y).$$

Прирівнюємо $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ до $Q_1(x,y)$, одержуємо рівняння

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy, \quad \text{звідки} \quad \varphi'(y) = 0, \quad \text{тобто} \quad \varphi(y) = C_1.$$

Отже, загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд $xy^2 + \dfrac{1}{x} = C$.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

65. $(3x^2y + 2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0.$
66. $(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0.$
67. $(2x\cos x^2 + e^y)dx + (e^y x + \cos y)dy = 0.$
68. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$
69. $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy - \sin 2y)dy = 0.$
70. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$
71. $\dfrac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx, \quad y(1) = 1.$
72. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \dfrac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$
73. $(2y^3 + 3xy^2)dx + (3y^2x + 2yx^2)dy = 0.$
74. $(2xy^2 + 3x^2y)dx + (3yx^2 + 2x^3)dy = 0.$
75. $ydx - (x + y^2)dy = 0.$
76. $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$
77. $(x^2\cos x - y)dx + xdy = 0.$
78. $y(1 + xy)dx - xdy = 0.$

Відповіді

65. $x^3y + 2x + y^3 = C.$ **66.** $x^2y - 5x + y^3 = C.$ **67.** $\sin x^2 + e^y x + \sin y = C.$
68. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$ **69.** $x^3 + 2y^2x + \cos^2 y = C.$ **70.** $xe^y - y^2 = C.$
71. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + x = \dfrac{\pi}{4} + 1.$ **72.** $ye^{x^2} + x\ln y = 1.$ **73.** $x^2y^3 + x^3y^2 = C,\ \mu(x) = x.$
74. $x^2y^3 + x^3y^2 = C,\ \mu(y) = y.$ **75.** $x = y(C + y),\ \mu(y) = \dfrac{1}{y^2}.$
76. $x - \dfrac{y}{x} = C,\ \mu(x) = \dfrac{1}{x^2}.$ **77.** $y = x(C - \sin x),\ \mu(x) = \dfrac{1}{x^2}.$
78. $x^2 + \dfrac{2x}{y} = C,\ \mu(y) = \dfrac{1}{y^2}.$

1.6. Диференціальні рівняння, нерозв'язані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Розглянемо декілька типів рівнянь, нерозв'язаних відносно похідної.

1. Рівняння вигляду $F(y')=0$.

Якщо алгебричне рівняння $F(t)=0$ має хоча б один дійсний корінь $t=a$, то $y'=a,\ y=ax+C$, де C — довільна стала. Тоді загальний інтеграл диференціального рівняння можна записати у вигляді

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0,$$

Приклад 1.17. Розв'язати рівняння $(y')^2+y'-2=0$.

Розв'язання. Розглянемо алгебричне рівняння $t^2+t-2=0$. Воно має два дійсні корені $t=-2$ і $t=1$. Тоді останнє рівняння можна переписати у вигляді $(t+2)(t-1)=0$. Отже, загальний інтеграл заданого диференціального рівняння буде мати вигляд

$$\left(\frac{y-C}{x}+2\right)\left(\frac{y-C}{x}-1\right)=0, \quad \text{або} \quad (y+2x-C)(y-x-C)=0.$$

2. Рівняння вигляду $x=\varphi(y')$.

Це рівняння легко інтегрувати в параметричній формі, якщо покласти $y'=p$ та взяти p за параметр, через який треба виразити як x, так і y. Дійсно, підставляючи $y'=p$ у рівняння, одразу одержимо вираз для x через параметр p: $x=\varphi(p)$. Звідси $dx=\varphi'(p)dp$. Оскільки $dy=y'dx=pdx$, то $dy=p\varphi'(p)dp$. Отже, y знаходимо інтегруванням: $y=\int p\varphi'(p)dp+C$.

Таким чином, розв'язок рівняння $x=\varphi(y')$ можна записати в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=\varphi(p), \\ y=\int p\varphi'(p)dp+C. \end{cases}$$

Якщо можливо визначити параметр p із одного з цих рівнянь, то підставляємо p в інше рівняння та знаходимо загальний інтеграл вихідного рівняння.

Приклад 1.18. Розв'язати рівняння $x=y'+\ln y'$.

Розв'язання. Покладемо $y'=p$. Тоді

$$x=p+\ln p, \quad dx=\left(1+\frac{1}{p}\right)dp,$$

$$dy=y'dx=p\,dx, \quad dy=p\left(1+\frac{1}{p}\right)dp, \quad y=\int(p+1)dp=\frac{(p+1)^2}{2}+C.$$

Загальний розв'язок рівняння запишемо в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=p+\ln p, \\ y=\dfrac{(p+1)^2}{2}+C. \end{cases}$$

Із другого рівняння одержимо $p = \sqrt{2(y-C)} - 1$ ($p > 0$ і тому перед коренем треба взяти знак плюс). Тоді загальний розв'язок рівняння набуде вигляду

$$x = \sqrt{2(y-C)} - 1 + \ln\left(\sqrt{2(y-C)} - 1\right).$$

3. Рівняння вигляду $y = \varphi(y')$.

Таке рівняння розв'язуватимемо аналогічно попередньому. Покладемо $y' = p$, тоді $y = \varphi(p)$. Далі знаходимо $dy = \varphi'(p)dp$. Але, з іншого боку, $dy = pdx$. Таким чином, $pdx = \varphi'(p)dp$, звідки $dx = \dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$ і x знаходимо інтегруванням: $x = \int \dfrac{\varphi'(p)dp}{p} + C$. Відтак загальний розв'язок рівняння $y = \varphi(y')$ можна записати в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(p)dp}{p} + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Якщо можливо визначити параметр p із одного з цих рівнянь, то підставляємо p в інше рівняння та знаходимо загальний інтеграл вихідного рівняння.

Приклад 1.19. Розв'язати рівняння $y = e^{y'}(y'-1)$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Тоді

$$y = e^p(p-1), \quad dy = \left(e^p(p-1) + e^p\right)dp \quad \text{або} \quad dy = e^p p\, dp,$$
$$e^p p\, dp = p\, dx, \quad dx = e^p dp, \quad x = e^p + C.$$

Загальний розв'язок рівняння запишемо в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = e^p + C, \\ y = e^p(p-1). \end{cases}$$

Із першого рівняння одержимо $p = \ln(x-C)$. Тоді загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$y = (x-C)\left(\ln(x-C) - 1\right).$$

4. Рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, де φ і ψ — відомі функції.

Уведемо допоміжний параметр $p = y'$. Тоді рівняння набуде вигляду $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Диференціюючи по x, одержимо

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Оскільки $\dfrac{dy}{dx} = p$, то останній вираз перепишемо у вигляді

$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx}; \tag{1.18}$$

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p). \tag{1.19}$$

Рівняння 1.19 є лінійне відносно невідомої функції $x = x(p)$. Розв'язавши його, знайдемо $x = \gamma(p, C)$. Тоді одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \gamma(p, C), \\ y = x\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Виключивши параметр p з цих рівнянь, одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння.

Зазначимо, що переходячи до рівняння 1.19, ми ділили рівність на $\dfrac{dp}{dx}$. При цьому могли бути втрачені розв'язки, для яких $\dfrac{dp}{dx} = 0$, тобто $p = const$ (див.1.18). Це може бути лише в тому випадку, коли p є коренем рівняння $p - \varphi(p) = 0$. Отже, якщо рівняння $p - \varphi(p) = 0$ має дійсні корені $p = p_i$, то знайдений вище розв'язок вихідного рівняння треба доповнити розв'язками $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$. Якщо ці розв'язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливі розв'язки.

Приклад 1.20. Розв'язати рівняння $y = xy'^2 + y'^2$.

Розв'язання. Це рівняння Лагранжа. Покладемо $y' = p$. Тоді

$$y = xp^2 + p^2, \quad \frac{dy}{dx} = p^2 + (2px + 2p)\frac{dp}{dx}, \quad p - p^2 = 2p(x+1)\frac{dp}{dx}.$$

Скорочуючи останню рівність на $p \neq 0$, одержуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$1 - p = 2(x+1)\frac{dp}{dx} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Інтегруючи, знаходимо вираз для $x + 1$

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + \ln C, \qquad x + 1 = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Підставимо отриманий вираз у рівняння $y = (x+1)p^2$, одержимо

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння набуває вигляду

$$\begin{cases} x+1=\dfrac{C}{(p-1)^2}, \\ y=\dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Параметр p можна виключити, тоді отримаємо загальний інтеграл

$$\left(\sqrt{y}+\sqrt{x+1}\right)^2=C.$$

Скорочення на p могло спричинити втрату особливого розв'язку. Припускаючи $p=0$ в рівнянні $y=xp^2+p^2$, знаходимо $y=0$ — особливий розв'язок. Крім того, у процесі перетворень мале місце ділення на $(1-p)\neq 0$, при цьому могли бути втрачені розв'язки, для яких $p=1$. Підставляючи значення $p=1$, знаходимо $y=x+1$ — особливий розв'язок.

5. Рівняння Клеро $y=xy'+\psi(y')$.

Це рівняння є частинним випадком рівняння Лагранжа. Інтегруємо його аналогічно. Покладемо $y'=p$, тоді $y=xp+\psi(p)$. Диференціюємо по x:

$$p=p+x\,\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\,\frac{dp}{dx}, \qquad (x+\psi'(p))\,\frac{dp}{dx}=0.$$

Якщо $\dfrac{dp}{dx}=0$, то $p=C$. Відтак загальний розв'язок має вигляд

$$y=Cx+\psi(C).$$

Якщо $x+\psi'(p)=0$, то отримуємо особливий розв'язок рівняння в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=-\psi'(p), \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p). \end{cases}$$

Приклад 1.21. Розв'язати рівняння $y=xy'-e^{y'}$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Покладемо $y'=p$, тоді $y=xp-e^p$. Диференціюємо:

$$p=p+x\,\frac{dp}{dx}-e^p\,\frac{dp}{dx}, \qquad (x-e^p)\,\frac{dp}{dx}=0.$$

Якщо $\dfrac{dp}{dx}=0$, то $p=C$, $y=Cx-e^C$ — загальний розв'язок.

Якщо $x = e^p$, то $y = pe^p - e^p = (p-1)e^p$, тобто маємо особливий розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p-1)e^p. \end{cases}$$

Виключаючи параметр p ($p = \ln x$), знаходимо особливий розв'язок у явному вигляді $y = x(\ln x - 1)$.

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

79. $y'^2 + 2y' + 1 = 0$. **80.** $y'^2 + 5y' + 6 = 0$. **81.** $x = 2y' + 3y'^2$.
82. $x = 2(\ln y' - y')$. **83.** $y = \ln(1 + y'^2)$. **84.** $y = y' \ln y'$.
85. $x = y'^3 + y'$. **86.** $x = y'(1 + e^{y'})$. **87.** $\arcsin \dfrac{x}{y'} = y'$.
88. $y = y'^2 e^{y'}$. **89.** $y + xy' = 4\sqrt{y'}$. **90.** $y = y'^2(x+1)$.
91. $y = 2xy' - 4y'^3$. **92.** $2yy' = x(y'^2 + 4)$. **93.** $y = xy' + y'^2$.
94. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$. **95.** $y' = \ln(xy' - y)$. **96.** $xy' - y = \ln y'$.

Відповіді

79. $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{y-C}{x} + 1 = 0$. **80.** $(y - 2x - C)(y - 3x - C) = 0$. **81.** $x = 2p + 3p^2;\ y = 2p^3 + p^2 + C$. **82.** $x = 2(\ln p - p);\ y = 2p - p^2 + C$. **83.** $x = 2\,\mathrm{arctg}\, p + C;\ y = \ln(1 + p^2)$. **84.** $x = \dfrac{1}{2}\ln^2 p + \ln p + C;\ y = p \ln p$. **85.** $x = p + p^3;\ y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{1}{2}p^2 + C$. **86.** $x = p(1 + e^p);\ y = \dfrac{1}{2}p^2 + e^p(p^2 - p + 1) + C$. **87.** $x = p \sin p;\ y = (p^2 - 1)\sin p + p \cos p + C$. **88.** $x = e^p + pe^p + C;\ y = p^2 e^p$. **89.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{p}}(\ln p + C), y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$. Особливий розв'язок $y = 0$.
90. $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$. Особливий розв'язок $y = 0$.
91. $x = 3p^2 + \dfrac{C}{p^2}, y = \dfrac{2C}{p} + 2p^3$. Особливий розв'язок $y = 0$. **92.** $y = Cx^2 + \dfrac{1}{C}$. Особливий інтеграл $y^2 - 4x^2 = 0$. **93.** $y = Cx + C^2$. Особливий розв'язок $y = -\dfrac{x^2}{4}$. **94.** $y = Cx + \dfrac{1}{C}$. Особливий інтеграл $y^2 = 4x$. **95.** $y = Cx - e^C$. Особливий розв'язок $y = x(\ln x - 1)$. **96.** $y = Cx - \ln C$. Особливий розв'язок $y = \ln x + 1$.

1.7. Підсумкові тести з теми "Диференціальні рівняння першого порядку"

Тест 1.1

1. Указати тип диференціального рівняння $(2x+1)y' + y = x$.

А. З відокремлюваними змінними. Б. Однорідне.
В. Лінійне. Г. Бернуллі.
Д. У повних диференціалах. Е. Інший тип.

2. Указати тип диференціального рівняння $(x^2y + y)\,dx + (xy^2 - 4x)\,dy$.

А. З відокремлюваними змінними. Б. Однорідне.
В. Лінійне. Г. Бернуллі.
Д. У повних диференціалах. Е. Інший тип.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язання рівняння $xyy' = y^2 + 2x^2$?

А. $y = xu$. Б. $y = \dfrac{u}{x}$. В. $y = uv$. Г. $y = \dfrac{u}{v}$.

4. Яку підстановку треба застосувати для розв'язання рівняння $y' + x\sqrt[3]{y} = 2y$?

А. $y = xu$. Б. $y = \dfrac{u}{x}$. В. $y = uv$. Г. $y = \dfrac{u}{v}$.

5. Указати загальний розв'язок диференціального рівняння $(2x+1)dy + y^2dx = 0$.

А. $y = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$. Б. $y = \dfrac{1}{\ln|2x+1|}$.
В. $y = \pm\sqrt{\ln|2x+1| + C}$, Г. $y = \dfrac{2}{\ln|2x+1| + C}$.

6. Указати частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + 2y = 4$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 5$.

А. $y = 3e^{-2x}+2$. Б. $y = Ce^{-2x}$. В. $y = e^{-2x+5}$. Г. $y = e^{C-2x}+2$.

7. Із наведених диференціальних рівнянь указати на рівняння з відокремлюваними змінними.

А. $2xyy' - y^2 + x = 0$. Б. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$.
В. $xy' = y(1 + \ln x - \ln y)$. Г. $y' + y\cos x = 0$.

8. Із наведених нижче диференціальних рівнянь виокремити однорідне рівняння.

А. $2xyy' - y^2 + x = 0$. Б. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$.
В. $xy' = y(1 + \ln x - \ln y)$. Г. $y' + y\cos x = 0$.

9. Із наведених нижче диференціальних рівнянь визначити лінійне рівняння.

А. $2xyy' - y^2 + x = 0$. Б. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$.
В. $xy' = y(1 + \ln x - \ln y)$. Г. $y' + y\cos x = 0$.

10. Із наведених нижче диференціальних рівнянь назвати рівняння у повних диференціалах.

А. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. Б. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$.
В. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$. Г. $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$.

11. Із наведених нижче диференціальних рівнянь виокремити рівняння Бернуллі.

А. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. Б. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$.
В. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$. Г. $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy$.

12. Із наведених нижче диференціальних рівнянь віднайти рівняння з відокремлюваними змінними.

А. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. Б. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$.
В. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$. Г. $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy$.

13. Указати загальний інтеграл диференціального рівняння $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

А. $\sin\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{C}{x}$. Б. $\ln\cos\dfrac{y}{x} = Cx$.
В. $\sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{C}{x}$, Г. $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

14. Указати загальний інтеграл диференціального рівняння $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

А. $\dfrac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C$. Б. $xy - \cos y + x\sin y = C$.
В. $\dfrac{1}{2}x^2 + x\sin y = C$, Г. $\dfrac{1}{2}x^2\cos y + x\sin y - \cos y = C$.

15. Указати особливий інтеграл диференціального рівняння Клеро $y = xy' + y' + y'^2$.

А. $y = x + 1 + x^2$. Б. $y = -\dfrac{x(x+1)}{2}$.
В. $y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}$. Г. $y = C(x+1) + C^2$.

Тест 1.2

1. Указати тип диференціального рівняння $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

А. З відокремлюваними змінними. Б. Однорідне.
В. Лінійне. Г. Бернуллі.
Д. У повних диференціалах. Е. Інший тип.

2. Указати тип диференціального рівняння $xy' = y^2 + xy$.

А. З відокремлюваними змінними. Б. Однорідне.
В. Лінійне. Г. Бернуллі.
Д. У повних диференціалах. Е. Інший тип.

3. Указати, яка з функцій не є однорідна відносно x та y.

А. $f(x,y) = x\cos\dfrac{y}{x} - y.$ Б. $f(x,y) = \dfrac{y-5x}{\sqrt{xy}}.$

В. $y = \dfrac{x^2+2y}{xy}.$ Г. $y = \dfrac{y^2}{x^2} - 2.$

4. Диференціальне рівняння $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ є рівняння в повних диференціалах, якщо виконується умова:

А. $\dfrac{\partial P}{dx} = \dfrac{\partial Q}{dy}.$ Б. $\dfrac{\partial P}{dy} = \dfrac{\partial Q}{dx}.$ В. $\dfrac{\partial P}{dx} = \dfrac{\partial Q}{dx}.$ Г. $\dfrac{\partial P}{dy} = \dfrac{\partial Q}{dy}.$

5. Указати, яке з диференціальних рівнянь не є рівняння з відокремлюваними змінними.

А. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0.$ Б. $xyy' = 1 - x^2.$
В. $(xy - y^2)dx - x^2\, dy = 0.$ Г. $xy' - y = y^3.$

6. Яку підстановку треба застосувати для розв'язання рівняння $y'(2x^2 + xy) = xy + y^2$?

А. $y = xu.$ Б. $y = \dfrac{u}{x}.$ В. $y = uv.$ Г. $y = \dfrac{u}{v}.$

7. Указати загальний розв'язок диференціального рівняння $2x\, dy + (1+x)\sin^2 y \operatorname{tg} y\, dx = 0.$

А. $\operatorname{ctg}^2 y = \ln x + x + C.$ Б. $\ln|\operatorname{tg} y| = \ln x + x + C.$

В. $\operatorname{ctg}^2 y = x + \dfrac{1}{2}x^2 + C,$ Г. $\dfrac{1}{\sin^2 y} = \ln x + x.$

8. Указати частинний розв'язок диференціального рівняння $y + \sqrt{x^2 - y^2} - xy' = 0$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 0$.

А. $\arcsin y - \dfrac{1}{2}\ln|x^2 - y^2| = 0.$ Б. $x^2 = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-y^2)^3}.$

В. $\arcsin\dfrac{y}{x} = x.$ Г. $\arcsin\dfrac{y}{x} - \ln|x| = 0.$

9. Серед наведених диференціальних рівнянь указати на рівняння з відокремлюваними змінними.

А. $y' - 2x^2y = 3xy^2.$ Б. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}.$

В. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x.$ Г. $y' = y + xe^{\frac{y}{x}}.$

10. Серед наведених диференціальних рівнянь виокремити однорідне рівняння.

А. $y' - 2x^2y = 3xy^2$. Б. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.
В. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$. Г. $y' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

11. Серед наведених диференціальних рівнянь указати на рівняння у повних диференціалах.

А. $(x^2+y^2)dx - y(y+2x)dy = 0$. Б. $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2y\,dy = 0$.
В. $(x^2-3y^2)dx + (2xy-1)dy = 0$. Г. $(\sin x + e^y)dx + \cos x\,dy = 0$.

12. Серед наведених диференціальних рівнянь визначити однорідне рівняння.

А. $(x^2+y^2)dx - y(y+2x)dy = 0$. Б. $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2y\,dy = 0$.
В. $(x^2-3y^2)dx + (2xy-1)dy = 0$. Г. $(\sin x + e^y)dx + \cos x\,dy = 0$.

13. Указати частинний інтеграл диференціального рівняння $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$, який задовольняє початкову умову $y(2) = 0$.

А. $x - \dfrac{1}{2}x^2e^{-y} = 0$. Б. $x + \dfrac{1}{2}x^2e^{-y} = 4$.
В. $y - xe^{-y} + 2 = 0$. Г. $y + xe^{-y} = 2$.

14. Указати загальний інтеграл диференціального рівняння $x^2y^2y' + y^3x = 1$.

А. $y = \dfrac{3}{2}x + Cx^2$. Б. $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{C}{x}$.
В. $y^3 = \dfrac{3}{2x} + Cx^3$. Г. $y^3 = \dfrac{3}{2x} + \dfrac{C}{x^3}$.

15. Указати функцію, яка є інтегрувальним множником для диференціального рівняння $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.

А. $\mu(x) = -\dfrac{4}{x}$. Б. $\mu(x) = \dfrac{1}{x^4}$. В. $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$. Г. $\mu(y) = -\dfrac{2}{y}$.

Відповіді

Тест 1.1

1. В. 2. А. 3. А. 4. В. 5. Г. 6. А. 7. Г. 8. В. 9. Б.
10. Г. 11. В. 12. Г. 13. Г. 14. А. 15. В.

Тест 1.2

1. Д. 2. Г. 3. В. 4. Б. 5. В. 6. А. 7. А. 8. Г. 9. Б.
10. В. 11. Б. 12. А. 13. Г. 14. Г. 15. Б.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Розв'язком такого рівняння є всяка n разів диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка у разі її підстановки в дане рівняння перетворює його на тотожність, тобто

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Задача Коші для рівняння 2.1 полягає в тому, щоб знайти його розв'язок, який би задовольняв початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння n-го порядку, якщо вона перетворює рівняння на тотожність та у разі відповідного вибору довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ є розв'язком будь-якої задачі Коші, поставленої для даного рівняння.

Усякий розв'язок, який отримують із загального розв'язку за конкретних значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, називають *частинним розв'язком* цього рівняння.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку

Розглянемо декілька типів диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають пониження порядку.

1. *Диференціальне рівняння вигляду* $y^{(n)} = f(x)$.

Розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$, де $f(x)$ — задана неперервна функція, одержують n-кратним інтегруванням, а саме:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

$$\text{де} \quad f_n(x) = \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int \ldots \int}_{n \text{ разів}} f(x)dx^n.$$

Оскільки $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}, \ldots$ є сталі величини, то загальний розв'язок можна переписати і у такий спосіб:

$$y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $y^{IV} = \sin 2x$.

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння:

$$y''' = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1,$$
$$y'' = \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2,$$
$$y' = \int \left(-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2\right) dx = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$
$$y = \int \left(\frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right) dx = \frac{1}{16}\sin 2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Отже, загальний розв'язок перепишемо у вигляді

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

97. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

98. $y'' = x + \sin x$.

99. $y^{IV} = \cos^2 x$; $y(0) = 1/32$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 1/8$; $y'''(0) = 0$.

100. $y''' = x\sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 2$.

101. $y''' = xe^{-x}$.

102. $y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}$.

103. $y''' = \frac{1}{x}$.

104. $y'' = \operatorname{arctg} x$.

105. $y'' = \sin^2 x + x\sin 2x$.

106. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = \frac{3}{5}$.

Відповіді

97. $y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **98.** $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$.
99. $y = \dfrac{1}{48}x^4 + \dfrac{1}{32}\cos 2x + \dfrac{1}{8}x^2$. **100.** $y = x\cos x - 3\sin x + x^2 + 2x$.
101. $y = -(x+3)e^{-x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **102.** $y = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + x\ln x + C_1x + C_2$.
103. $y = x^2\ln\sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **104.** $y = \dfrac{x^2-1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2}\ln(1+x^2) +$ $+ C_1x + C_2$. **105.** $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x\sin 2x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C_1x + C_2$.
106. $y = -\ln|\cos x| + \dfrac{3}{5}x + 1$.

2. *Диференціальне рівняння вигляду* $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Диференціальне рівняння

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$. Тоді одержимо рівняння

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.
Розв'язання. Покладемо $y' = z$ та зведемо рівняння до вигляду

$$z' - 2z\operatorname{ctg} x = \sin^3 x.$$

Це лінійне рівняння першого порядку відносно функції z. Розв'яжемо його методом Бернуллі. Покладемо $z = uv$, маємо

$$u'v + uv' - 2uv\operatorname{ctg} x = \sin^3 x, \quad v(u' - 2u\operatorname{ctg} x) + uv' = \sin^3 x.$$

Доберемо функцію u так, щоб $u' - 2u\operatorname{ctg} x = 0$, тоді $uv' = \sin^3 x$. Інтегруючи перше з рівнянь, одержимо

$$\frac{du}{u} = 2\operatorname{ctg} x dx; \qquad \ln|u| = 2\ln|\sin x|; \qquad u = \sin^2 x.$$

Підставивши значення u у друге рівняння, одержимо

$$v'\sin^2 x = \sin^3 x; \qquad v' = \sin x; \qquad v = -\cos x + C_1.$$

Отже, $z = \sin^2 x(C_1 - \cos x)$. Звідси отримаємо

$$y = \int (\sin^2 x(C_1 - \cos x))dx = \frac{C_1}{2}\int (1 - \cos 2x)dx - \int \sin^2 x \, d\sin x;$$
$$y = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x) + C_2.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

107. $y'' = y' + x.$

108. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x.$

109. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}.$

110. $2xy'y'' = (y')^2 + 1.$

111. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$

112. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$

113. $y'' = 1 - (y')^2.$

114. $(1 + x^2)y'' = 2xy'.$

115. $x^2y'' + xy' = 1.$

116. $x^3y'' + x^2y' = 1.$

117. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

118. $y'''x \ln x = y''.$

Відповіді

107. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + C_1e^x + C_2.$ **108.** $y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2.$

109. $y = (C_1x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2.$ **110.** $y = \dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x - 1)^3} + C_2.$

111. $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2.$ **112.** $y = (C_1^2 + 1)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2.$

113. $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2.$ **114.** $y = C_1\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right) + C_2.$

115. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2.$ **116.** $y = \dfrac{1}{x} + C_1\ln|x| + C_2.$

117. $y = -\dfrac{1}{2}\sin 2x - x + C_1 \sin x + C_2.$ **118.** $y = \dfrac{C_1x^2}{4}(2\ln|x| - 3) + C_2x + C_3.$

3. *Диференціальне рівняння вигляду* $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$

Диференціальне рівняння

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

не містить явно незалежної змінної x. Порядок такого рівняння можна понизити на одиницю, якщо покласти $y' = p$, а за новий аргумент взяти y, тобто новою невідомою функцією p є функція від y: $p = p(y)$. Тоді за правилом диференціювання складної функції маємо:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'_y p,$$
$$y''' = \frac{d}{dx}(p'_y p) = \frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx} = p(p''_{yy}p + (p'_y)^2) \text{ і т.д.},$$

тобто порядок усіх похідних понижується на одиницю. Таким чином, від рівняння n-го порядку приходимо до рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F(y, p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 2.3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$, який би задовольнив початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p(y)$, $y'' = p'_y p$, одержимо рівняння

$$p'_y p - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Оскільки $p \neq 0$ (інакше $y' = 0$, що суперечить початковій умові $y'(0) = 2$), то одержимо

$$p'_y - p + (y-1) = 0.$$

Це лінійне рівняння. Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі:

$$p = uv, \qquad u'v + uv' - uv = 1 - y, \qquad v(u' - u) + uv' = 1 - y,$$
$$u' - u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = e^y;$$
$$uv' = 1 - y \qquad \Rightarrow \quad v' = (1-y)e^{-y} \quad \Rightarrow \quad dv = (1-y)e^{-y}dy \;\Rightarrow$$
$$v = -(1-y)e^{-y} + e^{-y} + C_1.$$

Отже, $p = uv = e^y(-(1-y)e^{-y} + e^{-y} + C_1) = C_1e^y + y$. Замінюємо p на y', отримуємо $y' = C_1e^y + y$. Підставляючи початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$ в цю рівність, знаходимо

$$2 = C_1e^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Тоді $y' = y$, $\dfrac{dy}{y} = dx$, звідки $y = C_2e^x$. Підставляємо початкові умови: $2 = C_2e^0 \;\Rightarrow C_2 = 2$. Таким чином, $y = 2e^x$ — частинний розв'язок вихідного рівняння.

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння $yy'' - 2y'^2 = 0$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p(y)$, $y'' = p'_y p$, одержимо рівняння

$$yp'_y p - 2p^2 = 0 \quad \text{або} \quad p(yp'_y - 2p) = 0.$$

Останнє рівняння розпадається на два:

$$1)\ p = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C;$$
$$2)\ yp'_y - 2p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y} \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y^2.$$

Оскільки $p = y'$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2, \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Таким чином, рівняння має два розв'язки: $y = C$ та $y = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2}$.

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

119. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

120. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

121. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

122. $yy'' + (y')^2 = 1$.

123. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

124. $yy'' = (y')^2$.

125. $y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$.

126. $2yy'' - (y')^2 = 1$.

Відповіді

119. $\dfrac{4}{C_1^2}(C_1 y - 1) = (x + C_2)^2$. **120.** $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$. **121.** $y = \dfrac{x + C_1}{x + C_2}$. **122.** $(x + C_2)^2 = y^2 + C_1$. **123.** $C_1 x + C_2 = \ln \dfrac{y}{y + C_1}$. **124.** $y = C_1 e^{C_2 x}$. **125.** $(C_1 x + C_2)(1 - y) = 1$. **126.** $4C_1(y - C_1) = (x + C_2)^2$.

4. *Диференціальне рівняння вигляду* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, *однорідне відносно* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Функція F є однорідна відносно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, якщо для будь-якого $t \neq 0$ виконується умова

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Порядок такого рівняння можна понизити на одиницю, якщо покласти $\dfrac{y'}{y} = z$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція. Тоді

$$z' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y''}{y} = z' + z^2.$$

Аналогічно можна знайти і решту похідних. Причому порядок усіх похідних понижується на одиницю. Таким чином, від рівняння n-го порядку приходимо до рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння $yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x}$.
Розв'язання. Функція $F = yy'' - (y')^2 - 15y^2\sqrt{x}$ — однорідна, оскільки

$$F(x, ty, ty', ty'') = tyty'' - (ty')^2 - 15(ty)^2\sqrt{x} =$$
$$= t^2(yy'' - (y')^2 - 15y^2\sqrt{x}) = t^2F(x, y, y', y'').$$

Оберемо $t = \dfrac{1}{y}$, тоді рівняння перетвориться до вигляду

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 15\sqrt{x} = 0.$$

Покладемо $\dfrac{y'}{y} = z$, $\dfrac{y''}{y} = z' + z^2$. Тоді маємо

$$z' + z^2 - z^2 - 15\sqrt{x} = 0, \quad z' = 15\sqrt{x}, \quad z = 10\sqrt{x^3} + C_1.$$

Повертаємося до y:

$$\frac{y'}{y} = 10\sqrt{x^3} + C_1, \quad \frac{dy}{y} = (10\sqrt{x^3} + C_1)dx, \quad y = C_2 e^{4\sqrt{x^5} + C_1 x}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

127. $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.
128. $3xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.
129. $3(y')^2 = 4yy'' + y^2$.
130. $x^2yy'' - (xy' - y)^2 = 0$.
131. $(1 + x^2)((y')^2 - yy'') = xyy'$.
132. $yy'' - (y')^2 = yy' \operatorname{ctg} x$.

Відповіді

127. $y = C_1e^{C_2x^2}$. **128.** $y^2 = C_1x^4 + C_2$. **129.** $y = C_2\cos^4\left(C_1 - \dfrac{x}{4}\right)$.
130. $y = C_2xe^{-C_1/x}$. **131.** $y = C_2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{C_1}$. **132.** $y = C_2e^{-C_1\cos x}$.

5. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

де F — похідна деякої функції Φ. Тоді можна перейти до рівняння $\Phi = C$, порядок якого на одиницю менший, ніж у вихідного.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння $yy''' + 3y'y'' = 0$.
Розв'язання. Перетворимо рівняння таким чином:

$$yy''' + 3y'y'' = yy''' + y'y'' + 2y'y'' = (yy'')' + (y'^2)' = \frac{d}{dx}(yy'' + (y')^2) = 0.$$

Відтак отримуємо $yy'' + (y')^2 = C_1$. Це рівняння перетворимо до вигляду

$$yy'' + (y')^2 - C_1 = (yy')' - (C_1x)' = \frac{d}{dx}(yy' - C_1x) = 0.$$

Тоді $yy' - C_1x = C_2$. Тобто отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$y\frac{dy}{dx} = C_2 + C_1x, \quad ydy = (C_2 + C_1x)dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2}x^2 + \widetilde{C_2}x + \widetilde{C_3}.$$

Отже, остаточно $y^2 = C_1x^2 + C_2x + C_3$, де $C_2 = 2\widetilde{C_2}$, $C_3 = 2\widetilde{C_3}$.

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

133. $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0$. **134.** $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
135. $yy'' + (y')^2 = x$. **136.** $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$.

Відповіді

133. $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$. **134.** $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$. **135.** $y^2 = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$.
136. $y = C_1\operatorname{arctg} x + C_2$.

2.3. Підсумкові тести з теми "Диференціальні рівняння вищого порядку, які допускають пониження порядку"

Тест 2.1

1. Із наведених диференціальних рівнянь вказати на ті, порядок яких можна понизити підстановкою $y' = z(x)$.

А. $y'' = y' + x$. Б. $y'' = y' + y$.
В. $y''y'y = y^2 + 1$. Г. $y''y'x = x^2 + 1$.
Д. $y'y = 2$. Е. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$.

2. Із наведених диференціальних рівнянь знайти ті, порядок яких можна понизити підстановкою $y' = p(y)$.

А. $y'' = y' + x$. Б. $y'' = y' + y$.
В. $y''y'y = y^2 + 1$. Г. $y''y'x = x^2 + 1$.
Д. $y'y = 2$. Е. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$.

3. Яке рівняння можна одержати після пониження порядку диференціального рівняння $y'' = (y')^2 + y$?

А. $\dfrac{dp}{dy} = p^2 + y$. Б. $\dfrac{dp}{dy} = p + \dfrac{y}{p}$. В. $\dfrac{dz}{dx} = z^2 + x$.
Г. $\dfrac{dz}{dx} = z + \dfrac{x}{z}$. Д. $\dfrac{dy}{dx} = y + 1$.

4. Яке рівняння можна одержати після пониження порядку диференціального рівняння $y'' = (y')^2 + x$?

А. $\dfrac{dp}{dy} = p^2 + y$. Б. $\dfrac{dp}{dy} = p + \dfrac{y}{p}$. В. $\dfrac{dz}{dx} = z^2 + x$.
Г. $\dfrac{dz}{dx} = z + \dfrac{x}{z}$. Д. $\dfrac{dy}{dx} = y + 1$.

5. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$?

А. Послідовним інтегруванням.
Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
В. Підстановкою $y' = p(y)$.
Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
Д. Іншим методом.

6. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $y''y' = e^y$?

А. Послідовним інтегруванням.
Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
В. Підстановкою $y' = p(y)$.
Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
Д. Іншим методом.

7. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $x^2y'' = \ln x$?

А. Послідовним інтегруванням.
Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
В. Підстановкою $y' = p(y)$.
Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
Д. Іншим методом.

8. Яке рівняння можна одержати після пониження порядку диференціального рівняння $(y')^2 + 2xyy'' = 0$?

А. $z' + z^2 + \dfrac{z^2}{2x} = 0$. Б. $z^2 + 2xzz' = 0$.
В. $p^2 + 2ypp' = 0$. Г. $z' = -2xz$.

9. Указати на частинний розв'язок рівняння $y'' = 3\sqrt{y}$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

А. $y = \dfrac{1}{5}(4x^2\sqrt{x} + 5)$. Б. $y = \dfrac{1}{5}(4y^2\sqrt{y} + 1)$.
В. $y = \dfrac{1}{16}(x+2)^4$. Г. $y = (x+1)^2$.

10. Указати на частинний розв'язок рівняння $xy'' + y' = \sqrt{x}$, який задовольняє початкові умови $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

А. $y = \dfrac{4}{9}x\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}\ln|x| + \dfrac{5}{9}$. Б. $y = \dfrac{4}{9}x^2\sqrt{x} + \dfrac{5}{9}$.
В. $y = 2x\sqrt{x} - x$. Г. $y = 4x\sqrt{x} - 5\ln|x| - 3x$.

Тест 2.2

1. Із наведених диференціальних рівнянь вказати на ті, порядок яких можна понизити підстановкою $y' = z(x)$.

А. $x^4y'' + 2x^3y' = 1$. Б. $y''(y-1) + y'(y-1)^2 = y'^2$.
В. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$. Г. $4y''\sqrt{y} = 1$.
Д. $4xy'' - (y'')^2 = 4(y'+1)$. Е. $yy'' + x(y')^2 = y^2y'$.

2. Із наведених диференціальних рівнянь знайти ті, порядок яких можна понизити підстановкою $y' = p(y)$.

   А. $x^4y'' + 2x^3y' = 1$. Б. $y''(y-1) + y'(y-1)^2 = y'^2$.
   В. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$. Г. $4y''\sqrt{y} = 1$.
   Д. $4xy'' - (y'')^2 = 4(y'+1)$. Е. $yy'' + x(y')^2 = y^2y'$.

3. Яке рівняння можна одержати після пониження порядку диференціального рівняння $yy'' = (y^3 + y')y'$?

   А. $\dfrac{dp}{dy} = (y^3 + p)p$. Б. $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{(y^2 + p)}{p}$. В. $\dfrac{dp}{dy} = y^2 + \dfrac{p}{y}$.
   Г. $\dfrac{dz}{dx} = y^3 + z$. Д. $\dfrac{dy}{dx} = yx^3 + y^2$.

4. Яке рівняння можна одержати після пониження порядку диференціального рівняння $(y'')^2 + y' = xy''$?

   А. $\dfrac{dz}{dx} = z(x-1)$. Б. $\dfrac{dz}{dx} = xz + z^2$. В. $\dfrac{dz}{dx} = xz - z^2x$.
   Г. $z = xz' - (z')^2$. Д. $z' = xz - (z')^2$.

5. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $y'' + (y')^2 = y'e^y$?

   А. Послідовним інтегруванням.
   Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
   В. Підстановкою $y' = p(y)$.
   Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
   Д. Іншим методом.

6. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $xyy'' - yy' = 2x(y')^2$?

   А. Послідовним інтегруванням.
   Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
   В. Підстановкою $y' = p(y)$.
   Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
   Д. Іншим методом.

7. Яким методом можна понизити порядок диференціального рівняння $xy''' = y'' - xy''$?

А. Послідовним інтегруванням.
Б. Підстановкою $y' = z(x)$.
В. Підстановкою $y' = p(y)$.
Г. Підстановкою $\dfrac{y'}{y} = z$.
Д. Іншим методом.

8. Розв'язати задачу Коші $3y'y'' = e^y$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$ та вказати вірні значення констант.

А. $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Б. $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.
В. $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Г. $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

9. Указати на загальний розв'язок рівняння $4xy'' - (y'')^2 = 4(y' + 1)$.

А. $y = \dfrac{x^2}{C_1} - C_1^2 x - x + C_2$. Б. $y = \dfrac{C_1}{x^2} - C_1^2 x + C_2$.

В. $y = C_1 x^2 - C_1^2 x - x + C_2$. Г. $y = \dfrac{C_1 x^2}{2} - C_2 x - 1$.

10. Указати на частинний розв'язок рівняння $yy'' = (1-x)(y')^2$, який задовольняє початкові умови $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

А. $y = \dfrac{2(x-1)}{\ln y}$. Б. $y = \dfrac{x \ln y}{x-2}$.

В. $\ln y = \dfrac{2(x-1)}{y}$. Г. $\ln y = \dfrac{2(x-1)}{x}$.

Відповіді

Тест 2.1

1. А, Г, Е. 2. Б,В. 3. Б. 4. В. 5. Г. 6. В. 7. А. 8. А.
9. В. 10. А.

Тест 2.2

1. А, Д. 2. Б, В, Г. 3. В. 4. Г. 5. В. 6. Г. 7. Б. 8. А.
9. В. 10. Г.

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Основні поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{3.1}$$

де $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ — задані функції, які є неперервні на деякому проміжку (a, b).

Якщо функції $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ є сталі числа a_i, то рівняння (3.1) називають *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (3.1) називають *однорідним*, у протилежному випадку — *неоднорідним.* Однорідне рівняння з тією самою лівою частиною, що і дане неоднорідне, називають *відповідним* йому.

Знаючи один частинний розв'язок y_1 лінійного однорідного рівняння, можна за допомогою лінійної заміни шуканої функції $y = y_1 \cdot \int z\,dx$ понизити порядок однорідного рівняння, а отже, й порядок відповідного неоднорідного рівняння на одиницю. Отримане рівняння $(n-1)$-го порядку відносно z також є лінійне.

Якщо застосувати вказану підстановку до лінійного рівняння другого порядку, отримаємо лінійне рівняння першого порядку. Отже, за умови, що лінійне рівняння першого порядку можна інтегрувати в квадратурах, то можна також проінтегрувати в квадратурах і будь-яке лінійне рівняння другого порядку, якщо відомий один частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Приклад 3.1. Понизити порядок рівняння $y''' + \dfrac{2}{x}y'' - y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = x$, якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = \ln x$ відповідного однорідного рівняння.

Розв'язання. Покладемо $y = \ln x \cdot \int z\,dx$, де z — нова невідома функція. Тоді

$$y' = \frac{1}{x}\int z\,dx + z\ln x, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}\int z\,dx + \frac{2z}{x} + z'\ln x,$$
$$y''' = \frac{2}{x^3}\int z\,dx - \frac{3z}{x^2} + \frac{3z'}{x} + z''\ln x.$$

Відтак після підстановки та перетворень вихідне рівняння зведемо до рівняння другого порядку:

$$z'' \ln x + \frac{2\ln x}{3}\, z' + \left(\frac{1}{x^2} - \ln x\right) z = x.$$

Приклад 3.2. Проінтегрувати рівняння $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Покладемо $y = \dfrac{\sin x}{x} \int z\, dx$. Тоді

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \int z\, dx + \frac{\sin x}{x}\, z,$$

$$y'' = \frac{\sin x}{x}\, z' + \frac{2(x\cos x - \sin x)}{x^2}\, z - \frac{(x^2-2)\sin x + 2x\cos x}{x^3} \int z\, dx.$$

Після підстановки та перетворень вихідне рівняння набуде вигляду

$$z' \sin x + 2z \cos x = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними, його розв'язок $z = \dfrac{C_1}{\sin^2 x}$. Тоді розв'язок вихідного рівняння запишемо у вигляді

$$y = \frac{\sin x}{x} \int \frac{C_1}{\sin^2 x}\, dx = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x) = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Понизити порядок та проінтегрувати рівняння, якщо відомий частинний розв'язок.

137. $y'' \sin^2 x = 2y, \quad y_1 = \operatorname{ctg} x.$

138. $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0, \quad y_1 = x.$

Відповіді

137. $y = C_1 + (C_2 - C_1 x) \operatorname{ctg} x.$ **138.** $y = \dfrac{1}{2} x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x.$

3.2. Лінійні однорідні рівняння

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (3.2)$$

Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (3.2), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \qquad (3.3)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називають *лінійно незалежними* на проміжку (a, b), якщо тотожність

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \ldots + \alpha_ny_n(x) = 0,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дійсні числа, можна справдити тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Для випадку двох функцій цю умову можна сформулювати таким чином: дві функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні, якщо їх відношення не являє собою сталу величину, тобто $y_1/y_2 \neq const$. Наприклад: 1) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ — лінійно незалежні, оскільки $y_1/y_2 = 1/x \neq const$; 2) $y_1 = 2e^{3x}$, $y_2 = 5e^{3x}$ — лінійно залежні, оскільки $y_1/y_2 = 2/5 = const$.

Сукупність будь-яких n лінійно незалежних частинних розв'язків однорідного рівняння називають *фундаментальною системою*.

Визначником Вронського (вронскіаном) n функцій, неперервних разом зі своїми похідними до $n-1$-го порядку на проміжку (a, b), називають визначник

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (3.4)$$

Частинні розв'язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ рівняння (3.2) утворюють фундаментальну систему розв'язків на (a, b), якщо визначник Вронського (3.4) в жодній точці цього проміжку не дорівнює нулю.

Для лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

фундаментальну систему складають два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$; його загальний розв'язок знаходять за формулою

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Якщо для такого рівняння відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$, то другий його розв'язок, лінійно незалежний з першим, можна знайти за формулою

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx, \tag{3.5}$$

що уможливлює інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку, для яких відомий один частинний розв'язок, одразу, не вдаючись до пониження порядку.

Приклад 3.3. Дано рівняння $y''' - y' = 0$. Слід визначити, чи складають функції $e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x$ фундаментальну систему розв'язків цього рівняння?

Розв'язання. Нескладно переконатися, що всі три функції є розв'язками заданого рівняння. Для перевірки лінійної незалежності цих розв'язків обчислимо визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Цей визначник дорівнює нулю, оскільки елементи 1-го та 3-го рядків однакові. Отже, функції лінійно залежні, тому вони не складають фундаментальну систему розв'язків вихідного рівняння.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння $y'' + \dfrac{2y'}{x} - \dfrac{2y}{x^2} = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1 = x$.

Розв'язання. Другий частинний розв'язок даного рівняння знайдемо за допомогою формули (3.5):

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{x^2}\,dx = x \int \frac{e^{-2\ln x}}{x^2}\,dx = x \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^2}\,.$$

Тоді загальний розв'язок набуде вигляду:

$$y(x) = C_1 x - \frac{C_2}{3x^2}\,.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Дослідити лінійну залежність таких систем функцій:

139. $x^2,\ x^2 + x.$

140. $x,\ -3x,\ 2x.$

141. $\ln x,\ x,\ 1.$

142. $2x^2 + 1,\ x^2 - 1,\ x + 2.$

143. $\ln(2x),\ \ln(3x),\ \ln(4x).$

144. $\ln x^4,\ \ln 5x,\ 11.$

Проінтегрувати рівняння, для яких відомий один частинний розв'язок, за допомогою формули (3.5), не вдаючись до пониження порядку.

145. $xy'' + 2y' + xy = 0,\ y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}.$
146. $y'' + (2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)y' + 2y\operatorname{tg}^2 x = 0,\ y_1(x) = \cos^2 x.$
147. $(1 - \ln x)x^2y'' + xy' - y = 0,\ y_1(x) = x.$
148. $y'' + y'\operatorname{tg} x - y\cos^2 x = 0,\ y_1(x) = e^{\sin x}.$
149. $y'' - \dfrac{6y}{x^2} = 0,\ y_1(x) = x^3.$ **150.** $y'' - \dfrac{2y}{x^2} = 0,\ y_1(x) = \dfrac{1}{x}.$

Відповіді

139. Лінійно незалежні функції. **140.** Лінійно залежні функції. **141.** Лінійно незалежні функції. **142.** Лінійно незалежні функції. **143.** Лінійно незалежні функції. **144.** Лінійно залежні функції. **145.** $y = C_1\dfrac{\sin x}{x} + C_2\dfrac{\cos x}{x}.$ **146.** $y = C_1\cos x + C_2\cos^2 x.$ **147.** $y = C_1\ln x + C_2 x.$ **148.** $y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}.$ **149.** $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x^2}.$ **150.** $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x}.$

3.3. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{3.6}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі дійсні числа. Для знаходження частинних розв'язків рівняння (3.6) складають *характеристичне рівняння*

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \tag{3.7}$$

яке одержують з рівняння (3.6) заміною в ньому похідних шуканої функції відповідними степенями k, причому саму функцію замінюють одиницею. Рівняння (3.7) є рівняння n-го степеня з n коренями (дійсними або комплексними, серед яких можуть бути і однакові).

З урахуванням цього загальний розв'язок диференціального рівняння (3.6) будують залежно від характеру коренів рівняння (3.7):

1) кожному дійсному простому кореню k у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду Ce^{kx};

2) кожному дійсному кореню k кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_mx^{m-1})e^{kx};$$

3) кожній парі комплексних спряжених простих коренів $k_1 = \alpha + \beta i$ та $k_2 = \alpha - \beta i$ у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x);$$

4) кожній парі комплексних спряжених коренів $k_1 = \alpha + \beta i$ та $k_2 = \alpha - \beta i$ кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \ldots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x].$$

Приклад 3.5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$; його корені $k_1 = 6$ та $k_2 = 1$. Отже, e^{6x} та e^x — частинні лінійно незалежні розв'язки, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

Приклад 3.6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 + k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Тут 1 є двократний корінь, тому лінійно незалежними частинними розв'язками будуть $e^0 = 1$, e^x, xe^x. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Приклад 3.7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} + 3y''' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 + 3k^3 = k^3(k+3) = 0$ має дійсний трикратний корінь $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ та дійсний простий корінь $k_4 = -3$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-3x}.$$

Приклад 3.8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ має два корені $k_{1,2} = 2 \pm 3i$. Корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, а тому їм відповідають частинні розв'язки $e^{2x} \cos 3x$ та $e^{2x} \sin 3x$. Отже, загальний розв'язок набуває вигляду

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння $y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння:

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $k_1 = -1$, $k_{2,3} = i$, $k_{4,5} = -i$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

Приклад 3.10. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 10y = 0$, який би задовольнив умови $y(\pi/6) = 0,\ y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0$ має комплексні спряжені корені $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Отже, загальний розв'язок матиме вигляд $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Для знаходження сталих C_1 та C_2 підставимо задані умови у загальний розв'язок та його похідну:

$$y(\pi/6) = e^{\pi/6}(C_1 \cos(\pi/2) + C_2 \sin(\pi/2)) = e^{\pi/6} C_2 = 0 \ \Rightarrow\ C_2 = 0;$$
$$y'(\pi/6) = e^{\pi/6} C_1(\cos(\pi/2) - 3\sin(\pi/2)) = -3C_1 e^{\pi/6} = e^{\pi/6} \ \Rightarrow\ C_1 = -1/3.$$

Отже, розв'язок, який задовольняє задані умови, має вигляд

$$y = -1/3 e^{\pi/6} \cos 3x.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

151. $y'' - y' - 2y = 0.$
152. $y'' + 2y' - 3y = 0.$
153. $y'' + 8y' + 15y = 0.$
154. $y'' + 3y' - 4y = 0.$
155. $y'' + 6y' + 9y = 0.$
156. $y'' - 10y' + 25y = 0.$
157. $y^{V} - y^{IV} - 2y''' = 0.$
158. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0.$
159. $y'' + 4y' + 5y = 0.$
160. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
161. $y^{IV} = 16y.$
162. $y^{IV} = 8y'' - 16y.$
163. $y'' + 25y = 0.$
164. $y'' - 2y' + y = 0.$
165. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0.$
166. $y^{IV} = 8y'' - 16y.$
167. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
168. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$
169. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0.$
170. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$

Знайти розв'язки рівнянь, які б задовольнили задані умови.

171. $y'' + 5y' + 6y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6.$
172. $y'' - 10y' + 25y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
173. $9y'' + y = 0;\ y(3\pi/2) = 2,\ y'(3\pi/2) = 0.$
174. $y'' + 9y = 0;\ y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1.$

Відповіді

151. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. **152.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x}$. **153.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-5x}$. **154.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x}$. **155.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$. **156.** $y = (C_1 + C_2x)e^{5x}$. **157.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + C_5e^{2x}$. **158.** $y = C_1 + C_2x + e^{x}(C_3 + C_4x)$. **159.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **160.** $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. **161.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. **162.** $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + e^{-2x}(C_3 + C_4x)$. **163.** $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. **164.** $y = e^{x}(C_1 + C_2x)$. **165.** $y = C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **166.** $y = e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{-2x}(C_3+C_4x)$. **167.** $y = e^{x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. **168.** $y = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 + C_4x)$. **169.** $y = C_1e^{-x} + e^{-2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$. **170.** $y = C_1e^{x} + e^{-2x}(C_2 + C_3x)$. **171.** $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$. **172.** $y = xe^{5x}$. **173.** $y = 2\sin(x/3)$. **174.** $y = \sqrt{2}\sin 3x$.

3.4. Лінійні неоднорідні рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Загальним розв'язком $y = y(x)$ цього рівняння є сума будь-якого його частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\widehat{y}$ відповідного однорідного рівняння, тобто

$$y = y^* + \widehat{y}.$$

Отже, для знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння треба знайти один із його частинних розв'язків та загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Метод варіації довільних сталих

Цей метод застосовують для відшукання частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку як зі змінними, так і зі сталими коефіцієнтами, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Метод варіації полягає в такому. Нехай відома фундаментальна система розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ відповідного однорідного рівняння. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

де функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ визначають із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)y_1 + C_2^{'}(x)y_2 + \ldots + C_n^{'}(x)y_n = 0, \\ C_1^{'}(x)y_1' + C_2^{'}(x)y_2' + \ldots + C_n^{'}(x)y_n' = 0, \\ \ldots \\ C_1^{'}(x)y_1^{(n-2)} + C_2^{'}(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n^{'}(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1^{'}(x)y_1^{(n-1)} + C_2^{'}(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n^{'}(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Для рівняння другого порядку $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ відповідна система має вигляд

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)y_1 + C_2^{'}(x)y_2 = 0, \\ C_1^{'}(x)y_1' + C_2^{'}(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{3.8}$$

Приклад 3.11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння $y''+y = 0$. Це лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $k^2+1 = 0$ має комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \pm i$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\widehat{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y = C_1(x) \cos x+ +C_2(x) \sin x$. Для знаходження $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь вигляду (3.8):

$$\begin{cases} C_1^{'}(x) \cos x + C_2^{'}(x) \sin x = 0, \\ C_1^{'}(x)(-\sin x) + C_2^{'}(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_1^{'}(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \quad \Rightarrow C_1(x) = \int (-\operatorname{tg} x)\, dx = \ln|\cos x| + A,$$

$$C_2^{'}(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad \Rightarrow C_2(x) = \int dx = x + B.$$

де A і B — довільні сталі. Тоді загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння набуде вигляду

$$y = (A+\ln|\cos x|)\cos x+(x+B)\sin x = A\cos x+B\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$$

Приклад 3.12. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy''+y'=x^2$ методом варіації сталих.

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді $y''+\dfrac{y'}{x}=x$. Розв'яжемо однорідне рівняння $y''+\dfrac{y'}{x}=0$. Для цього покладемо $y'=z$, $y''=z'$. Тоді

$$z'+\frac{z}{x}=0, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x}, \qquad \frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}, \quad z=\frac{C_1}{x}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x},$$

звідки $\widehat{y}=C_1\ln x+C_2$ — загальний розв'язок однорідного рівняння. Відтак загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y=C_1(x)\ln x+C_2(x).$$

Для знаходження $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)\ln x+C_2^{'}(x)\cdot 1=0, \\ C_1^{'}(x)\cdot\dfrac{1}{x}+C_2^{'}(x)\cdot 0=x. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $C_1^{'}(x)=x^2$, $C_2^{'}(x)=-x^2\ln x$. Інтегруючи, одержимо

$$C_1(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+A, \quad C_2(x)=-\int x^2\ln x\,dx=-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+B.$$

Тоді загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння буде мати вигляд

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+A\right)\cdot\ln x+\left(-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+B\right)\cdot 1=A\ln x+B+\frac{x^3}{9}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні розв'язки рівнянь методом варіації довільних сталих.

175. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$. **176.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

177. $y''+2y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{\cos x}$. **178.** $y''-y'=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

179. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. **180.** $xy''-y'=3x^2$.

Відповіді

175. $y = A\cos x + B\sin x - \dfrac{1}{2\cos x} + \sin x \operatorname{tg} x$.
176. $y = e^x(A + Bx - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x)$.
177. $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x)$.
178. $y = Ae^x + B + xe^x - (1+e^x)\ln(1+e^x)$.
179. $y = A\sin x + B - \dfrac{1}{2}\sin 2x - x$. **180.** $y = A + Bx^2 + x^3$.

3.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x). \tag{3.9}$$

Загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку y^* рівняння (3.9) і загального розв'язку $\widehat{y}$ відповідного однорідного рівняння: $y = y^* + \widehat{y}$. Послідовність побудови загального розв'язку однорідного рівняння розглянуто вище. Для знаходження частинного розв'язку y^* неоднорідного рівняння (3.9), коли права частина $f(x)$ має так званий "спеціальний вигляд", застосовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

Суть методу полягає в такому: залежно від вигляду правої частини $f(x)$ рівняння (3.9) записують очікувану форму частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами, потім підставляють її в рівняння (3.9) та з отриманої тотожності знаходять значення коефіцієнтів.

Розглянемо декілька випадків.

Випадок 1. Права частина рівняння (3.9) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{3.10}$$

де α — дійсне число; $P_n(x)$ — багаточлен степеня n. Тоді частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}, \tag{3.11}$$

де r — число, яке дорівнює кратності α як кореня характеристичного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \tag{3.12}$$

а $Q_n(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ — багаточлен степеня n, записаний з невизначеними коефіцієнтами $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів підставляємо функцію (3.11) та її похідні в рівняння (3.9). Після скорочення на $e^{\alpha x}$ одержимо тотожність, в якій справа та зліва стоять багаточлени степеня n. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n, одержимо систему $n+1$ лінійних алгебричних рівнянь, з якої визначимо $n+1$ невідомих коефіцієнтів A_i багаточлена $Q_n(x)$.

Приклад 3.13. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння набуває вигляду

$$\widehat{y} = e^x(C_1 + C_2 x).$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння. В ньому права частина $x - 4 = (x-4)e^0 = P_1(x)e^0$. Тобто $\alpha = 0$, причому 0 не є коренем характеристичного рівняння. Тому, згідно з формулою (3.11), частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді $y^* = Q_1 e^{0\cdot x}$, тобто $y^* = Ax + B$, де A і B - невизначені коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$ і підставивши їх у рівняння, одержимо

$$-2A + Ax + B = x - 4 \quad \text{або} \quad Ax + (-2A + B) = x - 4.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = 1$, $B = -2$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = x - 2$, тому

$$y = e^x(C_1 + C_2 x) + x - 2$$

шуканий загальний розв'язок.

Приклад 3.14. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 4y = 6e^{2x}$.

Розв'язання. Однорідне рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$ має характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 4 = 0$ з коренями $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\widehat{y} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. Права частина вихідного рівняння $6e^{2x} = P_0(x)e^{2x}$. Тобто $\alpha = 2$, причому 2 не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ у формулі (3.11), $Q_0(x) = A$, де A — невизначений коефіцієнт. Частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді $y^* = Ae^{2x}$.Знаходимо похідні $(y^*)' = 2Ae^{2x}$, $(y^*)'' = 4Ae^{2x}$, підставляємо у рівняння:

$$4Ae^{2x} - 10Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = 6e^{2x} \quad \text{або} \quad -2A = 6, \quad \text{отже,} \quad A = -3.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд $y^* = -3e^{2x}$, а загальний розв'язок — $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - 3e^{2x}$.

Приклад 3.15. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = (54x^2 + 1)e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+9=0$ має уявні корені $k_{1,2}=\pm 3i$, тому $\widehat{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Права частина вихідного рівняння має вигляд

$$(54x^2+1)e^{3x}=P_2(x)e^{3x}.$$

Оскільки $\alpha=3$, і 3 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^*=Q_2(x)e^{3x}$, тобто

$$y^*=(A+Bx+Cx^2)e^{3x},$$

де A,B,C - невідомі коефіцієнти. Знаходимо похідні

$$(y^*)'=(B+2Cx)e^{3x}+3(A+Bx+Cx^2)e^{3x},$$
$$(y^*)''=2Ce^{3x}+6(B+2Cx)e^{3x}+9(A+Bx+Cx^2)e^{3x}.$$

Після підстановки цих похідних у вихідне рівняння, скорочення на e^{3x} і зведення подібних членів одержимо

$$18Cx^2+(18B+12C)x+(18A+6B+2C)=54x^2+1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 18C=54, \\ 18B+12C=0, \\ 18A+6B+2C=1, \end{cases}$$

звідки $A=7/18$, $B=-2$, $C=3$. Отже, $y^*=\left(3x^2-2x+\dfrac{7}{18}\right)e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\left(3x^2-2x+\frac{7}{18}\right)e^{3x}.$$

Приклад 3.16. Розв'язати рівняння $y''-y'-2y=(6x+5)e^{2x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2-k-2=0$ має корені $k_1=-1$, $k_2=2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $\widehat{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$. Права частина $(6x+5)e^{2x}=P_1(x)e^{2x}$, отже, $\alpha=2$. Оскільки $\alpha=2=k_2$ — простий корінь характеристичного рівняння, то в формулі (3.11) $r=1$, тобто частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді $y^*=xQ_1(x)e^{2x}$, а саме

$$y^*=x(A+Bx)e^{2x},$$

де A і B — невизначені коефіцієнти. Знаходимо похідні

$$(y^*)' = (A + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax + Bx^2)e^{2x},$$
$$(y^*)'' = 2Be^{2x} + 4(A + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax + Bx^2)e^{2x}.$$

Після підстановки цих похідних у вихідне рівняння та спрощень отримуємо

$$6Bx + (2B + 3A) = 6x + 5.$$

Далі маємо

$$\begin{cases} 6B = 6, \\ 2B + 3A = 5, \end{cases}$$

звідки $A = 1$, $B = 1$. Таким чином, $y^* = x(1 + x)e^{2x}$ — частинний розв'язок, а $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + x(1 + x)e^{2x}$ — загальний розв'язок вихідного рівняння.

Випадок 2. Права частина рівняння (3.9) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (3.13)$$

де $P_n(x)$ — багаточлен степеня n, $Q_m(x)$ — багаточлен степеня m, α і β — дійсні числа. Функція (3.10) є окремий випадок функції (3.13) і утворюється з неї за $\beta = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (3.9) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x), \qquad (3.14)$$

де r — число, яке дорівнює кратності $\alpha + \beta i$ як кореня характеристичного рівняння (3.12), а $M_l(x)$ та $N_l(x)$ — багаточлени степеня l з невизначеними коефіцієнтами, l — найвищий степінь багаточленів $P_n(x)$ та $Q_m(x)$, тобто $l = \max(n, m)$.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів підставляємо функцію (3.14) та її похідні у вихідне рівняння та прирівнюємо багаточлени, які стоять перед однойменними тригонометричними функціями в лівій та правій частинах рівняння.

Примітка 1. Форма (3.14) зберігається і коли $P_n(x) \equiv 0$ або $Q_m(x) \equiv 0$.

Примітка 2. Якщо права частина рівняння (3.9) є сумою декількох різних за структурою функцій вигляду (3.10) або (3.13), то для відшукання частинного розв'язку потрібно скористатися *теоремою про накладання розв'язків*: треба знайти частинні розв'язки, які б відповідали окремим доданкам правої частини, та взяти їх суму, яка і буде частинним розв'язком вихідного рівняння.

Приклад 3.17. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ має корені $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$. Отже, $\widehat{y} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. Права частина вихідного рівняння $40\cos 3x = e^{0\cdot x}(40\cos 3x + 0\cdot\sin 3x)$. Тобто $\alpha = 0$,

$\beta = 3$. Оскільки $\alpha + \beta i = 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$. Згідно з формулою (3.14) частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$, де A і B — невизначені коефіцієнти. Знаходимо похідні

$$(y^*)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad (y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Після підстановки цих похідних у вихідне рівняння та перетворень отримуємо

$$(4A - 12B)\cos 3x + (12A + 4B)\sin 3x = 40\cos 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x$ та $\sin 3x$, отримуємо систему

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = 1$, $B = -3$. Таким чином, $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$ — частинний розв'язок, а $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ — загальний розв'язок вихідного рівняння.

Приклад 3.18. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y = 3\sin x$, який би задовольнив початкові умови: $y(0) = 5$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, а тому загальний розв'язок однорідного рівняння $\widehat{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$. Права частина рівняння $3\sin x = e^{0\cdot x}(0\cdot\cos x + 3\sin x)$, тобто $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Оскільки $\alpha + \beta i = i$ є простий корінь характеристичного рівняння, то $r = 1$. Тоді частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$. Знаходимо похідні

$$(y^*)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$(y^*)'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x).$$

Після підстановки та перетворень отримуємо

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 3\sin x,$$

звідки знаходимо $A = -3/2$, $B = 0$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{3}{2}x\cos x$. Сталі C_1 та C_2 знайдемо, скориставшись початковими умовами. Маємо

$$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{3}{2}x\sin x - \frac{3}{2}\cos x,$$

$$y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\cdot\cos 0 = C_1,$$

$$y'(0) = -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 + \frac{3}{2}\cdot 0\cdot\sin 0 - \frac{3}{2}\cos 0 = C_2 - \frac{3}{2},$$

$$\text{отже,} \quad C_1 = 5, \quad C_2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{тобто} \quad C_2 = 2.$$

Таким чином, розв'язок вихідного рівняння, який задовольняє надані початкові умови, має вигляд

$$y = 5\cos x + 2\sin x - \frac{3}{2}\,x\cos x.$$

Приклад 3.19. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+2y' = e^{-2x}+2x+5$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\widehat{y} = C_1 + C_2e^{-2x}$. Права частина неоднорідного рівняння є сумою двох різних за структурою функцій $f_1(x) = e^{-2x}$ та $f_2(x) = 2x+5$, тому за теоремою про накладання розв'язків частинний розв'язок даного рівняння буде мати вигляд $y^* = y_1^* + y_2^*$, де y_1^* та y_2^* — частинні розв'язки рівнянь $y'' + 2y' = e^{-2x}$ та $y'' + 2y' = 2x + 5$ відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді $y_1^* = xAe^{-2x}$, оскільки $\alpha = -2$ є простий корінь характеристичного рівняння, отже, $r = 1$. Знаходимо похідні

$$(y_1^*)' = Ae^{-2x} - 2xAe^{-2x}, \quad (y_1^*)'' = -4Ae^{-2x} + 4xAe^{-2x}.$$

Після підстановки у перше рівняння та спрощень отримуємо $-2A = 1$, тому $y_1^* = -\dfrac{1}{2}\,xe^{-2x}$.

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y_2^* = x(Ax+B)$, оскільки в цьому випадку $\alpha = 0$ — простий корінь характеристичного рівняння, отже, $r = 1$. Знаходимо похідні

$$(y_2^*)' = 2Ax + B, \quad (y_2^*)'' = 2A.$$

Після підстановки цих похідних у друге рівняння та перетворень знаходимо $A = \dfrac{1}{2}$, $B = 2$. Тоді $y_2^* = x(\dfrac{1}{2}\,x + 2)$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння буде мати вигляд

$$y = \widehat{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}\,xe^{-2x} + x(\frac{1}{2}\,x + 2).$$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

181. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$. **182.** $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
183. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
184. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, де 1) $f(x) = 3e^{2x}$; 2) $f(x) = 2e^x\cos\dfrac{x}{2}$;

$$3)\ f(x) = x - e^{-2x} + 1.$$

185. $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x.$

186. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

187. $y'' + 16y = 8\cos 4x.$

188. $y'' + y = \cos x.$

189. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$

190. $y'' - y = e^x.$

191. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}.$

192. $y'' + y' = \sin^2 x.$

193. $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x).$

194. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x.$

195. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x.$

196. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

197. $y^{IV} - 8y' = xe^{2x}.$

198. $y^V + y''' = x^2 - 1.$

Відповіді

181. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{5}{3}e^{-x}.$ **182.** $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \dfrac{5}{74}\sin x - \dfrac{7}{74}\cos x.$

183. $y = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}.$ **184.** 1) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$; 2) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \dfrac{8}{5}e^x\left(\cos\dfrac{x}{2} + 2\sin\dfrac{x}{2}\right)$; 3) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{12}e^{-2x}.$

185. $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

186. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3).$ **187.** $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x\sin 4x.$

188. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x.$ **189.** $y = C_1e^{6x} + C_2xe^{6x} + 7x^2e^{6x}.$

190. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x.$ **191.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{15}e^{2x} - \dfrac{4}{9}.$

192. $y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{20}(2\cos 2x - \sin 2x).$

193. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2e^{2x} + \cos 2x.$

194. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x).$

195. $y = C_1 + C_2x + e^x\left(C_3 + C_4x + \dfrac{x^2}{2}\right).$

196. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + e^x\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{8}\right).$

197. $y = C_1 + C_2e^{2x} + e^{-x}(C_3\cos\sqrt{3}x + C_4\sin\sqrt{3}x) + \dfrac{1}{48}e^{2x}(x^2 - 2x).$

198. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\sin x + C_5\cos x + \dfrac{1}{60}x^5 - \dfrac{1}{2}x^3.$

3.6. Рівняння Ейлера

Рівнянням Ейлера називають лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2x^{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x),$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі коефіцієнти, $f(x)$ — неперервна на деякому проміжку (a, b) функція. Таке рівняння можна звести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $x = e^t$ за $x > 0$ (або $x = -e^t$ за $x < 0$).

Приклад 3.20. Розв'язати рівняння $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Розв'язання. Уводимо заміну $x = e^t$. Тоді $t = \ln x$, звідки $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$. Знаходимо похідні

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t},$$
$$y'' = \frac{d}{dt}[\dot{y}e^{-t}]\frac{dt}{dx} = (\dot{y}e^{-t})'_t \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{2t}$$

(диференціювання за t позначаємо крапками). Відтак вихідне рівняння набуде вигляду

$$e^{2t}e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^te^{-t}\dot{y} + y = 0 \text{ або } \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$. Отже, загальний розв'язок

$$y = (C_1 + C_2t)e^t.$$

Замінюємо t на $\ln x$, одержуємо

$$y = (C_1 + C_2 \ln x)x.$$

Приклад 3.21. Розв'язати рівняння $x^2y'' + xy' + y = \sin(2\ln x)$.

Розв'язання. Покладемо $x = e^t$, тоді $t = \ln x$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$, отже, $y' = \dot{y}e^{-t}$, $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$. Вихідне рівняння набуде вигляду

$$\ddot{y} + y = \sin 2t. \tag{3.15}$$

Це рівняння є лінійне рівняння зі спеціальною правою частиною. Характеристичне рівняння $k^2+1 = 0$ має комплексні корені $k_1 = i$ та $k_2 = -i$, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння $\widehat{y} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у такому вигляді $y^* = A\cos 2t + B\sin 2t$, де A і B — невизначені коефіцієнти. Знаходимо похідні

$$(y^*)' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t,$$
$$(y^*)'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t.$$

Після підстановки цих похідних у рівняння (3.15) та спрощень одержуємо

$$-3A\cos 2t - 3B\sin 2t = \sin 2t,$$

звідки $A = 0$, $B = -\frac{1}{3}$. Таким чином, $y^* = -\frac{1}{3}\sin 2t$ — частинний розв'язок, а $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$ — загальний розв'язок рівняння (3.15). Заміняючи t на $\ln x$, одержуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x - \frac{1}{3}\sin 2\ln x$$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати рівняння.

199. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.
200. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
201. $x^2y''' = 2y'$.
202. $x^3y''' + xy' - y = 0$.
203. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$.
204. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.
205. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.
206. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$.
207. $x^2y'' - 6y = -16x^2 \ln x$.
208. $x^2y'' + xy' - 4y = -9x\ln x$.
209. $x^2y'' + 3xy' - 3y = -\dfrac{3}{x^2}$.
210. $x^2y'' - xy' - 8y = 11x^3 \ln x$.

Відповіді

199. $y = C_1x^2 + C_2x^3$. **200.** $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$. **201.** $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3x^3$.
202. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|)$. **203.** $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$.
204. $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x$.
205. $y = x^2(C_1 \cos \ln|x| + C_2 \sin \ln|x| + 3)$.
206. $y = C_1x^2 + \dfrac{1}{x}\left(C_2 - \dfrac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right)$. **207.** $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x^3 + x^2(4\ln x + 3)$.
208. $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^2} + x(3\ln x + 2)$. **209.** $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
210. $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x^4 - \dfrac{11}{25}x^3(5\ln x + 4)$.

3.7. Підсумкові тести з теми "Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків"

Тест 3.1

1. Яке рівняння можна отримати з рівняння $y'' - \dfrac{6y}{x^2} = 0$ після пониження порядку, якщо частинний розв'язок $y_1(x) = x^3$?

   А. $z' + xz = 0$. Б. $xz' + z = 0$.
   В. $z' - 6xz = 0$. Г. $xz' + 6z = 0$.

2. Яка із систем функцій є лінійно залежна?

А. $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x.$ Б. $x^3+1,\ x^2-1,\ x.$
В. $e^x,\ e^{2x},\ xe^x.$ Г. $x,\ x^2+1,\ (x+1)^2.$

3. Яка із систем функцій є фундаментальною системою розв'язків рівняння $4y''-4y'+y=0$?

А. $4e^{2x},\ xe^{2x}.$ Б. $e^{\frac{1}{2}x},\ 2xe^{\frac{1}{2}x}.$
В. $e^{\frac{1}{2}x},\ e^{-\frac{1}{2}x}.$ Г. $xe^{2x},\ e^{\frac{1}{2}x}.$

4. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y''-2y'+10y=0$?

А. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}.$ Б. $y=C_1e^x\cos 3x+C_2e^x\sin 3x.$
В. $y=C_1e^{3x}\cos x+C_2e^{3x}\sin x.$ Г. $y=e^x\cos 3x+e^x\sin 3x.$

5. Який вигляд матиме частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y''-y'-2y=3e^{2x}$ (за виглядом правої частини) ?

А. $y^*=Ae^{2x}+Be^{-x}.$ Б. $y^*=Ae^{2x}.$
В. $y^*=Axe^{2x}+Be^{-x}.$ Г. $y^*=Axe^{2x}.$

6. Який вигляд матиме частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y''+16y=2\cos 4x$ (за виглядом правої частини) ?

А. $y^*=x(A\cos 4x+B\sin 4x).$ Б. $y^*=A\cos 4x+B\sin 4x.$
В. $y^*=Ax\cos 4x.$ Г. $y^*=A\cos 4x.$

7. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y''-2y'+2y=6e^{2x}$?

А. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{2x}.$ Б. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+6e^{2x}.$
В. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+3).$ Г. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$

8. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$?

А. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\ln x.$ Б. $y=e^x(C_1+\ln x)+e^{-x}(C_2+1).$
В. $y=e^x(C_1+C_2x-\ln x-1).$ Г. $y=C_1e^x+C_2xe^x-\ln x-1.$

Тест 3.2

1. Яке рівняння одержимо з рівняння $y''+(\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x)y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0$ після пониження порядку, якщо частинний розв'язок $y_1(x)=\sin x$?

А. $z'+\operatorname{tg} x\cdot z=0.$ Б. $z'+\sin x\cdot z=0.$
В. $z'+\sin^2 x\cdot z=0.$ Г. $z'\sin x+z=0.$

2. Яка із систем функцій є лінійно залежна?

А. $2,\ \sin x,\ \sin 2x.$ Б. $x^2+1,\ x^4,\ x^3.$
В. $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}.$ Г. $\ln(2x),\ \ln(x^2),\ 2.$

3. Яка із систем функцій є фундаментальною системою розв'язків рівняння $y''-3y'-10y=0$?

А. $e^{5x},\ 5e^{-2x}$. Б. $e^{-5x},\ e^{2x}$.
В. $e^{x},\ e^{-2x}$. Г. $xe^{x},\ e^{-2x}$.

4. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$?

А. $y = 5e^{3x} + 2xe^{3x}$. Б. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$.
В. $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. Г. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$.

5. Який вигляд матиме частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + 2y' = x^2 + 1$ (за виглядом правої частини) ?

А. $y^* = Ax^2 + B$. Б. $y^* = Ax^2 + Bx + C$.
В. $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$. Г. $y^* = x^2 + 1$.

6. Який вигляд матиме частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + 16y = e^x \sin 4x$ (за виглядом правої частини) ?

А. $y^* = xe^x(A\cos 4x + B\sin 4x)$. Б. $y^* = e^x(A\cos 4x + B\sin 4x)$.
В. $y^* = Axe^x \sin 4x$. Г. $y^* = Ae^x \sin 4x$.

7. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y'' + y' - 2y = 9e^x$?

А. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 9e^x$. Б. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.
В. $y = e^x(C_1x + C_2) + C_3e^{-2x}$. Г. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 3xe^x$.

8. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$?

А. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2\ln|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}| - 2\sin x$.

Б. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2\cos x\ln|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}| - 2$.

В. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\ln|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}| - \dfrac{2}{\sin x}$.

Г. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\ln|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}| - 2$.

Відповіді

Тест 3.1

1. В. 2. Г. 3. Б. 4. Б. 5. Г. 6. А. 7. А. 8. В.

Тест 3.2

1. А. 2. Г. 3. А. 4. В. 5. В. 6. Б. 7. Г. 8. Б.