Лекція 3. Диференціальні рівняння другого порядку

1. Загальні поняття. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

2. Диференціальн рівняння, які допускають пониження порядку

3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

1. Загальні поняття. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

де $x-$ невідома змінна, а y і $y', y''-$ відповідно шукана функція та її похідні, називається **диференціальним рівнянням другого порядку.**

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно старшої похідної y'', то його записують так:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2}$$

де $f-$ деяка функція від трьох незалежних змінних, визначена в області $D \subset R^3$.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння другого порядку (1) або (2) називається функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння в тотожність.

Справедлива теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння другого порядку.

Теорема. Нехай функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_y і $f'_{y'}$ неперервні в деякій області D простору змінних (x, y, y'). Тоді в деякому околі довільної внутрішньої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок даного рівняння (2), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0. \tag{3}$$

Означення. Задача відшукання розв'язку рівняння (2) за заданими початковими умовами називається задачею Коші.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка є розв'язком даного рівняння при довільних значеннях сталих C_1, C_2, які можуть бути визначені єдиним способом за заданих початкових умов (3).

Означення. Будь-який розв'язок, який можна можна одержати із загального розв'язку $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при певних значеннях сталих C_1^0, C_2^0, називається **частинним розв'язком**.

Означення. Загальний розв'язок диференціального рівняння, записаний у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ називається **загальним інтегралом рівняння.**

2. Диференціальн рівняння, які допускають пониження порядку

Є три види диференціальних рівнянь $y'' = f(x, y, y')$, які заміною змінної (шуканої функції) зводяться рівнянь першого порядку.

1. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$y'' = f(x), \tag{4}$$

де $f(x)$ – неперервна функція на проміжку (a, b) інтегрується в квадратурах.

Загальний розв'язок рівняння шукаємо шляхом двічі проінтегрувавши обидві частин рівняння (5.4)

$$y'(x) = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y(x) = \int (f_1(x) + C_1)dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2. *Диференціальне рівняння, які не містять шуканої функції*

Порядок рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y'), \tag{5}$$

яке не містить шуканої функції y. Отже, можна понизити його порядок, використавши заміну

$$z(x) = y', \quad z'(x) = y''.$$

Тоді одержимо рівняння першого порядку вигляду

$$z'(x) = f(x, z).$$

Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння: $z(x) = \varphi(x, C_1)$, повторним інтегруванням дістанемо шуканий загальний розв'язок рівняння (5)

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

3. *Диференціальне рівняння, які явно не містять незалежної змінної.*

Рівняння вигляду

$$y'' = f(y, y'), \tag{6}$$

яке не містить явно незалежної змінної x. Введемо нову функцію, залежну від y, зробивши заміну $z(y) = y'$. Тоді

$$y'' = (z(y))' = z'y' = z'z.$$

Рівняння (6) перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку відносно нової невідомої функції $z(y)$:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Загальний розв'язок цього рівняння $z(y) = \varphi(y, C_1)$. Зробивши зворотну заміну, матимемо рівняння першого порядку відносно функції $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

з якого методом відокремлювання змінних дістанемо рівняння

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

де C_1, C_2 − довільні сталі. З цього рівняння можна знайти загальний розв'язок рівняння (6).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \ln x.$$

Розв'язування. Інтегруючи послідовно двічі задане рівняння, знаходимо

$$y' = \int \ln x dx + C_1 = x \ln x - x + C_1,$$

$$y = \int (x \ln x - x + C_1) dx + C_2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 + C_1 x + C_2 = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_1 x + C_2$$

.

Отже, $y = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_1 x + C_2$ − загальний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''(x^2+1) - 2xy' = 0; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$$

Розв'язування. Оскільки рівняння не містить змінної y, то понизимо його порядок заміною $y' = z$, звідки $y'' = z'$, і тоді одержуємо рівняння першого порядку

$$z'(x^2+1) - 2xz = 0.$$

Розв'яжемо його як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{x^2+1} \;\Rightarrow\; \ln|z| = \ln(x^2+1) + \ln|C_1| \;\Rightarrow\; z = C_1(x^2+1) \;\Rightarrow\; y' = C_1(x^2+1)$$

.

Сталу C_1 знаходимо з другої початкової умови: $3 = C_1(0+1) \Rightarrow C_1 = 3$.

Звідси,

$$y' = 3(x^2+1).$$

Розв'язуючи рівняння першого порядку, знаходимо

$$dy = 3(x^2+1)dx \Rightarrow y = x^3 + 3x + C_2.$$

З першої початкової умови обчислюємо значення сталої C_2:

$$1 = 0 + 3 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Запишемо розв'язок задачі Коші

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yy'' + y'^2 + y' = 0.$$

Розв'язування. Оскільки рівняння не містить змінної x, то понизимо його порядок заміною $y' = z(y)$, звідки $y'' = zz'$, і тоді рівняння набуває вигляду

$$yzz' + z^2 + z = 0 \Rightarrow yz' + z + 1 = 0,\ z \neq 0.$$

Розв'яжемо його як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{z+1} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z+1| = -\ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow z+1 = \frac{C_1}{y} \Rightarrow y' = \frac{C_1 - y}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{C_1 - y} = dx \Rightarrow \int \frac{C_1}{C_1 - y}dy - \int dy = \int dx + C_2^* \Rightarrow -C_1 \ln|C_1 - y| = x + y + C_2^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|C_1 - y| = \frac{x + y + C_2^*}{-C_1} \Rightarrow y - C_1 = e^{\frac{x+y+C_2^*}{-C_1}} \Rightarrow y = C_2 e^{\frac{x+y_2^*}{-C_1}} + C_1,$$

де $C_2 = e^{\frac{C_2^*}{-C_1}}$.

Рівняння має ще розв'язок, який втрачений під час ділення рівняння на $z \neq 0$:

$$z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C.$$

Отже, $y = C_2 e^{\frac{x+y_2^*}{-C_1}} + C_1 -$ загальний розв'язок, $y = C -$особливий розв'язок заданого рівняння.

3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Означення. Лінійним однорідним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називаються рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (7)$$

де y – шукана, двічі неперервно диференційовна функція; p, q – коефіцієнти (дійсні числа).

Будемо шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді $y = e^{\lambda x}$, де λ – стала (дійсна або комплексна). Тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ і підставивши в рівняння (7), отримаємо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

або скоротивши обидві частини на $e^{\lambda x} \neq 0$, дістанемо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (8)$$

яке називається характеристичним рівнянням для рівняння (7).

Таким чином, якщо λ – корінь алгебричного рівняння (8), то функція $y = e^{\lambda x}$ – розв'язок рівняння (7), і навпаки.

Вигляд розв'язку рівняння (7) істотно залежить від того, які корені має характеристичне рівняння. Позначимо ці корені через λ_1, λ_2.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами)

1. Якщо корені характеристичного рівняння (8) дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то загальний розв'язку рівняння (7) має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad (9)$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння (8) дійсні і рівні ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), то загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}. \qquad (10)$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння (8) комплексні $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, то загальний розв'язку рівняння (7) має вигляд

$$y(x) = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (11)$$

У всіх трьох випадках C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Розв'язування. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2+5\lambda+6=0.$$

Його корені $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. Загальний розв'язок має вигляд:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''-8y'+16y=0$.

Розв'язування. Складемо і знаходимо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2-8\lambda+16=0 \;\Rightarrow\; (\lambda-4)^2=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=\lambda_2=4.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=(C_1+C_2x)e^{4x}.$$

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''-2y'+2y=0$.

Розв'язування. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=1+i, \lambda_2=1-i.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Означення. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називаються рівняння вигляду

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (12)$$

де $y-$шукана, двічі неперервно диференційовна функція; $p,q-$ деякі дійсні числа, $f(x)-$відома неперервна функція.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння)

Загальний розв'язок $y(x)$ рівняння (12) складається із суми загального розв'язку $\bar{y}(x)$ відповідного лінійного однорідного рівняння (7) і частинного розв'язку $y^*(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (12), тобто $y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)$.

Якщо $f(x)-$ многочлен, показникова чи тригонометрична функція, або їх комбінації, то частинний розв'язок рівняння (12) можна знайти ***методом невизначених коефіцієнтів,*** використовуючи вигляд правої частини $f(x)$ рівняння. При цьому треба знати корені λ_1,λ_2 характеристичного рівняння (8) і керуватися такими рекомендаціями.

1. Якщо права частина рівняння (12)

$$f(x)=e^{\mu x}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)=e^{\mu x}P_n(x) \qquad (13)$$

є многочленом $n-$го степеня із дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, то частинний розв'язок $y^*(x)$ неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y^*(x) = x^s(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n) = x^sQ_n(x)$$

де $e^{\mu x}$ −таке саме як в (13), $s-$число співпадань μ з коренями характеристичного рівняння (8), $Q_n(x)-$ многочлен $n-$го степеня, як і многочлен $P_n(x)$, але невідомими (невизначеними) коефіцієнтами:

1) якщо $\mu \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$, то $s=0$,
2) якщо $\mu = \lambda_1$ і $\mu \neq \lambda_2$ (або $\mu = \lambda_2$ і $\mu \neq \lambda_1$), то $s=1$,
3) якщо $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$, то $s=2$.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$, обчислюємо $y^{*'}(x)$, $y^{*''}(x)$ і підставляємо в рівняння рівняння (12) функції $y^*(x)$, $y^{*'}(x)$, $y^{*''}(x)$. В отриманій тотожності зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах. Дістанемо систему n рівнянь з невизначеними коефіцієнтами многочлена $Q_n(x)$.

Зауваження. Для запису многочлена $Q_n(x)$ можна скористатись таблицею:

n	$Q_n(x)$
0	a
1	$ax+b$
2	ax^2+bx+c
3	ax^3+bx^2+cx+d
…	………………

2. Якщо права частина має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(P_k(x)\cos bx + S_l(x)\sin bx),\ \text{де}\quad \mu = a \pm ib,\ a, b \in R,$$

то частинний розв'язок $y^*(x)$ неоднорідного рівняння шукають у такому вигляді

$$y^*(x) = e^{ax}(Q_n(x)\cos bx + R_n(x)\sin bx)x^s,$$

де $e^{\mu x}$ −таке саме як в (13), $s-$число співпадань μ з коренями характеристичного рівняння (8), $n = \max(k, l)$, $Q_n(x), R_n(x)-$ многочлени $n-$го степеня з невідомими (невизначеними) коефіцієнтами, причому

4) якщо $\mu \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$, то $s=0$,
5) якщо $\mu = \lambda_1$ і $\mu \neq \lambda_2$ (або $\mu = \lambda_2$ і $\mu \neq \lambda_1$), то $s=1$,

6) якщо $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$, то $s = 2$.

Зауважимо, що знаходження невизначених коефіцієнтів многочленів $Q_n(x)$, $R_n(x)$ поступаємо, як і у випадку 1).

Зауваження. Якщо права частина диференціального рівняння (12) є сумою двох функцій, тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y^*(x) = y_1{}^*(x) + y_2{}^*(x)$, де $y_1{}^*(x)$ відповідає рівнянню з правою частиною $f_1(x)$, а $y_2{}^*(x)$ – $f_2(x)$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + y = (x+1)e^x. \tag{14}$$

Розв'язування. Розв'яжемо однорідне рівняння: $y'' + 2y' + y = 0$,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Отже, $\bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$ – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Оскільки права частина $P_n(x)e^{\mu x} \equiv (x+1)e^x$, то $n = 1$, число $\mu = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, тому $s = 0$. Звідси, частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^*(x) = (ax+b)e^x,$$

де a, b – невідомі сталі. Тоді

$$(y^*(x))' = e^x(ax+b+a), \qquad (y^*(x))'' = e^x(ax+b+2a).$$

Підставивши $y^*(x)$, $(y^*(x))'$, $(y^*(x))''$ в рівняння (8.9), і поділивши його на $e^x \neq 0$, одержуємо

$$e^x(ax+b+2a) + 2e^x(ax+b+a) + e^x(ax+b) = (x+1)e^x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4ax + 4a + 4b = x + 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 4a = 1, \\ 4a + 4b = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}, \quad b = 0.$$

Звідси, $y^*(x) = \dfrac{1}{4}xe^x$ – частинний розв'язок рівняння (14).

Отже, $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + \dfrac{1}{4}xe^x$ – загальний розв'язок цього рівняння.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = (6x^2 - 4)e^x.$$

Розв'язування. Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Отже, $\bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$ – загальний розв'язок ЛОР.

Зважаючи на вигляд правої частини

$$P_n(x)e^{\mu x} \equiv (6x^2 - 4)e^x,$$

то $n = 2$, число $\mu = 1$ є коренем характеристичного рівняння кратності $s = 2$. Звідси, частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^*(x) = x^2(ax^2 + bx + c)e^x,$$

де a, b, c – невідомі сталі. Тоді

$$(y^*(x))' = e^x(ax^4 + (4a + b)x^3 + (3b + c)x^2 + 2cx),$$

$$(y^*(x))'' = e^x(ax^4 + (8a + b)x^3 + (12a + 6b + c)x^2 + (6b + 4c)x + 2c).$$

Підставивши $y^*(x)$, $(y^*(x))'$, $(y^*(x))''$ у вихідне рівняння, і поділивши його на $e^x \neq 0$, прийдемо до рівності

$$12ax^2 + 6bx + 2c = 6x^2 - 4.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 12a = 6, \\ 6b = 0, \\ 2c = -4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = -2.$$

Звідси, $y^*(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)e^x$ – частинний розв'язок ЛНР.

Отже, $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)e^x$ – загальний розв'язок цього рівняння.

Контрольні питання

1. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння $n-$го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

2. Дайте означення розв'язку, загального розв'язку, частинного розв'язку рівняння $n-$го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

3. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння $n-$го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

4. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння $n-$го порядку? Який геометричний зміст має задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку?

5. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною?

6. Як понизити порядок диференціального рівняння, яке не містить незалежної змінної?

7. Як понизити порядок диференціального рівняння, яке не містить шуканої функції та її декількох похідних?

8. Яке з рівнянь допускає пониження порядку за допомогою заміни $y' = z(x)$?

а) $y'' = e^{3y}$; б) $yy'' = (y')^2 - y^2$; в) $y''\sin x - y'\cos x = \cos 2x - \cos 4x$.

9. Яке з рівнянь допускає пониження порядку за допомогою заміни $y' = z(y)$?

а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$; б) $y'''tg\, x = y'' + 1$; в) $y''y - (y')^2 = y^2 y$.

10. Яке з рівнянь допускає пониження порядку за допомогою заміни $y'' = z(x)$?

а) $y'''ctg\, x = -2y''$; б) $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1}y' = 2x$; в) $y''y - (y')^2 = y^2 y$.

11. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння $n-$го порядку?

12. Яка відмінність між лінійним однорідним і лінійним неоднорідним рівняннями $n-$го порядку?

13. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння $n-$го порядку?

14. Запишіть загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами?

15. Вкажіть загальний вигляд лінійного неоднорідного диференціального рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами?

16. У чому полягає метод Ейлера знаходження фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами?

17. Яке рівняння називають характеристичним для лінійного однорідного диференціального рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами? Як його знаходити?

18. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: а) дійсні й різні; б) рівні; в) комплексні?

19. Які лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають дійсному кореню характеристичного рівняння λ кратності k?

20. Які два дійсні лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають парі комплексно спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm \beta i$ характеристичного рівняння?

21. У чому полягає метод підбору знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду?

22. Який вигляд повинна мати права частина лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, щоб застосувати метод підбору?

23. Загальний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 13y = 0$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$; б) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$;

в) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

24. Загальний розв'язок рівняння $y'' + 7y' = 0$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-7x}$; б) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-7x}$; в) $y = C_1 + C_2 e^{-7x}$.

25. Загальний розв'язок рівняння $y'' + 15y' + 54y = 0$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-9x}$; б) $y = e^{-6x} + e^{-9x}$; в) $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-9x}$.

26. Розв'язком задачі Коші $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$ є:

а) $y = 5e^{-2x}\cos 5x$; б) $y = e^{-2x}(4\sin 5x - \cos 5x)$; в) $y = 3e^{-2x}\sin 5x$.

27. Розв'язком задачі Коші $9y'' + 12y' + 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = \frac{5}{3}$ є:

а) $y = 2x\cos\frac{2x}{3}$; б) $y = e^{-\frac{2x}{3}}(2x - 1)$; в) $y = e^{-\frac{2x}{3}}(x - 1)$.

28. Загальний розв'язок рівняння $y'' + 3y' = 18x + 9$ має вигляд

а) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + 3x + 1$; б) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + 3x^2 + x$;

в) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + 3x^2 + x$.

29. Частинний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 3e^{2x}$ має вигляд

а) $\tilde{y} = a\cos 2x + b\sin 2x$; б) $\tilde{y} = ae^{2x}$; в) $\tilde{y} = axe^{2x}$.

30. Частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = (3x + 1)e^{x}$ має вигляд

а) $\tilde{y} = x(ax+b)e^x$; б) $\tilde{y} = (ax+b)e^x$; в) $\tilde{y} = x^2(ax+b)e^x$.

31. Частинний розв'язок рівняння $y'' + 4y' = 3x^2 + 2$ має вигляд

а) $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$; б) $\tilde{y} = ax^3 + b$; в) $\tilde{y} = x(ax^2 + bx + c)$.

32. Частинний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 5y = -5\sin 5x$ має вигляд

а) $\tilde{y} = ae^{-5x}$; б) $\tilde{y} = x(a\cos 5x + b\sin 5x)$; в) $\tilde{y} = a\cos 5x + b\sin 5x$.

33. Частинний розв'язок рівняння $y'' + y = 2\sin x$ має вигляд

а) $\tilde{y} = a\cos x + b\sin x$; б) $\tilde{y} = x(a\cos x + b\sin x)$;

в) $\tilde{y} = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$.

34. Для рівняння $y''' - y'' = x^2$ вказати вигляд частинного розв'язку, якщо

а) $\tilde{y} = ax^2$; б) $\tilde{y} = (ax^2 + bx + c)$; в) $\tilde{y} = x^2(ax^2 + bx + c)$.

35. Для рівняння $y''' - y'' = xe^x$ вказати вигляд частинного розв'язку, якщо

а) $\tilde{y} = axe^x$; б) $\tilde{y} = (ax+b)e^x$; в) $\tilde{y} = (ax+b)xe^x$.