Лекція 1-2. Диференціальні рівняння

1. Загальні поняття та означення
2. Диференціальні рівняння першого порядку
3. Рівняння з відокремлюваними змінними
4. Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною
5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку
6. Рівняння Бернуллі

1. Загальні поняття та означення

Означення. Диференціальним рівнянням називається співвідношення, що пов'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ і її похідні $y'(x),\ y''(x),\ \ldots, y^{(n)}(x)$. Символічно диференціальне рівняння записується у вигляді:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Наприклад, диференціальними рівняннями є такі:

1) $y' + y^{IV}x + (y''')^2 = 15x;$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x + y = 0;$ 3) $y^2dx + (1 + x^2)dy = 0.$

Означення. Якщо в диференціальному рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то таке диференціальне рівняння називається звичайним. Наприклад, рівняння 1), 2) і 3) є звичайними диференціальними рівняннями,

Означення. Найвищий порядок похідної, що входить у співвідношення (1) називається ***порядком диференціального рівняння***. Наприклад, рівняння 1) є рівняння четвертого порядку, 2) – рівняння другого порядку, 3) – рівняння першого порядку. Рівняння (1) – звичайне диференціальне рівняння $n-$го порядку.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (1) називається n разів диференційовна функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі $(a; b)$, яка разом із своїми похідними задовольняє рівняння (1), тобто перетворює його в тотожність

$$F(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $\varphi(x) = e^{3x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - 2y' - 3y = 0$, оскільки для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ перетворює це рівняння в тотожність. Справді, підставивши функцію $\varphi(x)$ і її похідні $\varphi'(x) = 3e^{3x}$, $\varphi''(x) = 9e^{3x}$ в рівняння, дістанемо тотожність

$$\varphi'' - 2\varphi' - 3\varphi = 9e^{3x} - 6e^{3x} - 3e^{3x} \equiv 0,$$

правильну для $-\infty < x < +\infty$.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називається $n-$параметричну сім'ю функцій $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, з якої за відповідного вибору значень параметрів можна дістати розв'язок рівняння (1), що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Сукупність функцій, яка містить усі розв'язки даного рівняння, не завжди вдається виразити у вигляді явної функції незалежної змінної. Цю сім'ю можна записати у вигляді неявної функції $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, яка й називається **загальним інтегралом** рівняння (1)

Означення. Розв'язок рівняння (1), який можна одержати із загального розв'язку при деяких конкретних значеннях параметрів $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, називається **частинним розв'язком.**

Означення. Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається **інтегруванням** цього рівняння, а графік розв'язку – **інтегральною кривою** даного рівняння.

Звідси, мати безліч розв'язків є характерною властивістю диференціальних рівнянь.

2. Диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

яке пов'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідну $y'(x)$.

Якщо рівняння (2) можна розв'язати відносно похідної y', то одержимо рівняння першого порядку, записане у вигляді:

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Якщо у рівняння (3) замінити y' на $\frac{dy}{dx}$, то його можна записати так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad dy = f(x, y)dx \quad \Rightarrow \quad f(x, y)dx - dy = 0. \tag{4}$$

Останнє рівняння (4) є частинним випадком загальнішого рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (5)$$

Справді, з рівняння (4) випливає рівняння (5), тоді коли $M(x,y) = f(x,y)$, $N(x,y) = -1$, і навпаки, з рівняння (5) отримуємо (4), тоді коли $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ має вигляд $y = \varphi(x,C)$.

Означення. Будь-який розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку $y = \varphi(x,C)$ при конкретному значенні $C = C_0$, називається частинним.

Означення. Загальний розв'язок рівняння першого порядку, записаний у неявному вигляді $\Phi(x,y,C) = 0$, називається загальним інтегралом.

Наприклад, загальним інтегралом диференціального рівняння $y^3dy + x^3dx = 0$ є функція $y^4 + x^4 = C$ $(C > 0)$.

Означення. Розв'язок рівняння першого порядку, який можна одержати із загального інтеграла $\Phi(x,y,C) = 0$ при конкретному значенні $C = C_0$, називається частинним інтегралом, або інтегралом рівняння.

Означення. Розв'язки диференціального рівняння, які не можна отримати із загального розв'язку при жодних значеннях сталої C, називаються особливими.

Означення. Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, $y' = f(x, y)$ називається інтегральною кривою рівняння.

У теорії диференціальних рівнянь основною задачею є пошук відповіді на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

Теорема. Нехай задане диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$. Якщо функція $f(x,y)$ та її похідна $f'_y(x,y)$ неперервні в деякій області $D \subset R^2$, то в деякому околі довільної внутрішньої точки (x_0, y_0) цієї області існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Означення. Задача, в якій потрібно знайти розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, де x_0, y_0 – задані числа, називається задачею Коші.

Геометричний зміст задачі Коші полягає в тому, що необхідно знайти з множини інтегральних кривих рівняння (3) ту, що проходить через точку (x_0, y_0) області D (рис. 1).

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ також має геометричну інтерпретацію.

Якщо інтегральна крива проходить через точку (x, y) області D визначення рівняння, то кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої дорівнює $k = f(x, y)$, де k – стала (рис. 1,2).

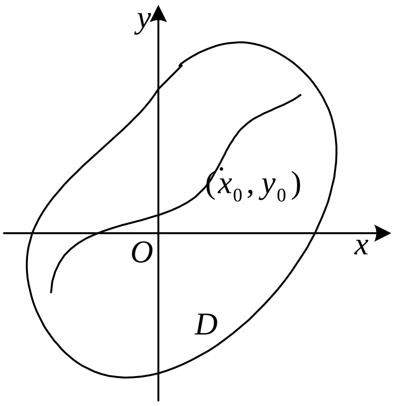

Рис. 1

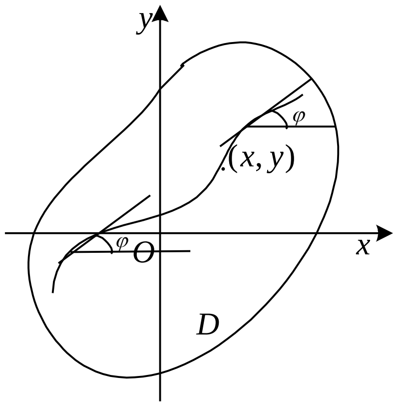

Рис. 2

3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ розв'язане відносно похідної, називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його права частина зображається у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга – тільки від y, тобто має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y). \tag{6}$$

Припустимо, що функція $\varphi(x)$ неперервна на проміжку $(a; b)$, а функція $\psi(y)$ – на проміжку $(c; d)$, причому ці проміжки окремо або разом можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

Припускаючи $\psi(y) \neq 0$ для всіх $y \in (c; d)$, з рівності (6) маємо

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

Оскільки функції $\dfrac{1}{\psi(y)}$ і $\varphi(x)$ неперервні на відповідних проміжках, то на цих проміжках існують первісні (враховуючи, що первісні відрізняються на сталу)

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C. \qquad (7)$$

Співвідношення (7) задає загальний інтеграл диференціального рівняння (20.6).

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (8)$$

також називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Поділивши рівність (8) на $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, отримаємо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо функції $\varphi(x) = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}$ і $\psi(y) = \frac{N_2(y)}{N_1(y)}$ неперервні, то загальний інтеграл можна записати у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \qquad (9)$$

Зазначимо, що при діленні рівняння (8) на функцію $N_1(y)M_2(x)$ могли втратити розв'язки, задані рівняннями $N_1(y) = 0$ і $M_2(x) = 0$. Ці розв'язки можуть бути як звичайними (містяться серед знайденого загального інтегралу (27)), так і особливими.

Зауважимо, що рівняння виду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де $a, b, c -$ задані сталі величини, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$z = ax + by + c.$$

Тоді $y = \frac{1}{b}(z - ax - c)$, $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$. Отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = a + bf(z).$$

Якщо $a + bf(z) \neq 0$, то $\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$. Інтегруючи останню рівність, отримуємо загальний інтеграл

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C.$$

Якщо $\Phi(z)$ – первісна для $\int \frac{dz}{a+bf(z)}$, то $\Phi(z)=x+C$. Повертаючись до заміни, маємо загальний інтеграл

$$\Phi(ax+by+c)-x=C.$$

Якщо $a+bf(z)=0$, то рівняння матиме ще розв'язки виду $ax+by+c=const$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y'=xy^2+2xy.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=xy(y+2).$$

Відокремимо змінні, поділивши рівняння на добуток $y\cdot(y+2)\neq 0$ і домноживши на dx

$$\frac{dy}{y(y+2)}=xdx.$$

Почленно інтегруємо це рівняння і знаходимо

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int xdx+C \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln|y|-\frac{1}{2}\ln|y+2|=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Звідки маємо $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|=x^2+C$. Якщо позначити $C_1=e^C$ і пропотенціювати останню рівність, то одержимо загальний інтеграл даного рівняння у вигляді

$$\frac{y}{y+2}=C_1e^{x^2} \quad \text{або} \quad y=\frac{2C_1e^{x^2}}{1-C_1e^{x^2}}.$$

Зауважимо, що функції $y=0$ і $y=-2$ є розв'язками цього рівняння, причому $y=0$ можна отримати із загального розв'язку при $C_1=0$, а розв'язок $y=-2$ – особливий.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $y'=\cos(y-x)$.

Розв'язання. Позначимо $y-x=z$, звідки $y'=z'+1$. Тоді рівняння матиме вигляд (за умови $\cos z-1\neq 0$)

$$z'+1=\cos z \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\cos z-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{\cos z-1}=dx \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C \quad \Rightarrow \quad ctg\frac{z}{2} = x + C .$$

Підставивши в останню рівність $z = y - x$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння

$$ctg\frac{y-x}{2} = x + C .$$

Рівняння має особливий розв'язок:

$$\cos z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2\pi k,\, k \in Z \quad \Rightarrow \quad y - x = 2\pi k,\, k \in Z .$$

4. Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною

Означення. Функція $f(x, y)$ називається однорідною степені k, якщо для всіх допустимих x, y і для кожного дійсного t виконується рівність

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y). \tag{10}$$

Наприклад, функції $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{x^2+xy}{x-y}$, $x^3 + y^3 - x^2 y$, $x^{k-1}y + y^k$,

є однорідними степеня 0, 1, 3, k.

Узявши в рівності (10) $t = \frac{1}{x}$, дістанемо

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} f(x, y).$$

Звідки

$$f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{11}$$

Означення. Диференціальним рівнянням першого порядку з однорідною правою частиною називається рівняння

$$y' = f(x, y)$$

де $f(x, y) -$ однорідна функція нульового степеня.

З рівності (11) випливає, що для однорідної функції степеня $k = 0$ правильна тотожність

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Помічаючи, що права частина цієї рівності є функція відношення $\frac{y}{x}$ і позначаючи її через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, диференціальне рівняння з однорідною правою частиною запишеться у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{12}$$

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{13}$$

є однорідним, якщо $M(x,y)$, $N(x,y)$– однорідні функції однакового степеня k.

Розв'язавши його відносно $y' = \frac{dy}{dx}$, дістанемо рівняння

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},\ N(x,y) \neq 0,$$

права частина якого є однорідною функцією нульового степеня.

Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною

$$y = ux, \tag{14}$$

де $u = u(x)$ – невідома функція, що має похідну. Тоді $y' = u'x + u$ і рівняння (12) матиме вигляд (за умови $\varphi(u) - u \neq 0$)

$$u'x + u = \varphi(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(\varphi(u) - u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши останню рівність, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Якщо $\Phi(u)$ – первісна лівої частини рівності, то загальний інтеграл рівняння (12) має вигляд

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Якщо $\varphi(u) - u = 0$, то рівняння (12) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

яке є вже рівнянням з відокремлюваними змінними.

Зазначимо, що підстановку (14) можна безпосередньо застосовувати і до рівняння (13).

Розглянемо приклади.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$xy' = y\ln\frac{y}{x}.$$

Розв'язання. Розв'язавши рівняння відносно y', отримуємо диференціальне рівняння з однорідною правою частиною

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Виконаємо заміну шуканої функції

$$y = ux \;\; \Rightarrow \;\; y' = u'x + u$$

і розв'яжемо отримане після цього рівняння

$$u'x + u = u\ln u \;\; \Rightarrow \;\; x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x} + C \;\; \Rightarrow \ln\left|\ln u - 1\right| = \ln|x| + \ln|C| \;\; \Rightarrow \;\; \ln u = Cx + 1 \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = e^{Cx+1} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{y}{x} = e^{Cx+1} \;\; \Rightarrow y = xe^{Cx+1}.$$

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних припустили, що $u(\ln u - 1) \neq 0$. Якщо $u(\ln u - 1) = 0$, то $u = 0$ або $u = e$. Кореню $u = e$ відповідає розв'язок $y = ex$, який отримується із загального розв'язку при $C = 0$. Кореню $u = 0$ відповідає розв'язок $y = 0$, який отримати із загального розв'язку неможливо при жодних значеннях сталої C. Тому $y = 0$ – особливий розв'язок.

5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{15}$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – задані неперервні функції.

Це рівняння лінійне відносно y і y'.

Наприклад, $y' + (\cos x + 1)y = 3x^2 - 1$. Тут $p(x) = \cos x + 1,\ q(x) = 3x^2 - 1.$

Якщо $q(x)=0$, то (15) називають ***лінійним однорідним***, якщо $q(x)\neq 0$, то ***лінійним неоднорідним*** рівнянням.

Розглянемо способи розв'язування диференціального рівняння (15).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)\,y = 0,$$

яке є рівнянням зі змінними, які можна розділити, його загальним розв'язком буде

$$y = C\,e^{\{-\int p(x)\mathrm{d}x\}}. \tag{16}$$

Загальний розв'язок рівняння (15) отримаємо, поклавши в (16) замість довільної сталої C невідому функцію $C(x)$:

$$y = C(x)\,e^{\{-\int p(x)\mathrm{d}x\}}. \tag{17}$$

Підставивши (17) в (15), одержимо рівняння для знаходження $C(x)$:

$$C'(x)=e^{\{\int p(x)\mathrm{d}x\}}\,q(x),$$

тоді

$$C(x)=\int e^{\{\int p(x)\mathrm{d}x\}}\,q(x)\mathrm{d}x + C. \tag{18}$$

Підставивши (18) в (17), отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (15):

$$y = e^{\{-\int p(x)\mathrm{d}x\}}\left(\int e^{\{\int p(x)\mathrm{d}x\}}\,q(x)\mathrm{d}x + C\right).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

Розв'язання. Поділивши рівняння на $2x+1\neq 0$, дістанемо лінійне рівняння, розв'язок якого знайдемо методом варіації сталої

$$y' - \frac{2y}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1}. \tag{19}$$

Запишемо і розв'яжемо відповідне однорідне рівняння: $y' - \dfrac{2y}{2x+1} = 0$,

$$dy = \frac{2y}{2x+1}dx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1} \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln|2x+1| + \ln|C| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = C(2x+1).$$

Шукаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (19) у вигляді

$$y = C(x)(2x+1) \quad \Rightarrow \quad y' = C'(x)(2x+1) + 2C(x).$$

Підставивши значення y та y' в неоднорідне рівняння (19), отримаємо

$$C'(x)(2x+1) + 2C(x) - \frac{2C(x)(2x+1)}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad C'(x)(2x+1) = \frac{4x}{2x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{4x dx}{(2x+1)^2} + C_1 = 2\int \frac{dx}{2x+1} - 2\int \frac{dx}{(2x+1)^2} + C_1 =$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_1.$$

Отже, $y = (2x+1)(\ln|2x+1| + C_1) + 1$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Метод Бернуллі

Розв'язок лінійного рівняння першого порядку (15) шукаємо у вигляді

$$y = u(x)v(x) \qquad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv', \tag{20}$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – невідомі функції.

Підставляючи (20) в рівняння (15), дістанемо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

або

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{21}$$

Підберемо функцію $v(x)$, так, щоб вираз у дужках, дорівнював нулю, тобто

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,$$

звідки

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

(беремо частинний розв'язок при $C = 1$). Підставивши знайдене значення функції v у рівняння (21), одержимо для u рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси

$$du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx \quad \Rightarrow \quad u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C.$$

Оскільки $y = uv$, то загальний інтеграл матиме вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right).$$

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}, \quad y(0) = 5.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого лінійного рівняння у вигляді

$$y = u(x)v(x), \quad y' = u'v + uv'.$$

Тоді

$$u'v + uv' + uv\cos x = e^{-\sin x} \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' + v\cos x) = e^{-\sin x}. \qquad (22)$$

Функцію $v(x)$ знаходимо з рівняння

$$v' + v\cos x = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\cos x dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\sin x \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\sin x}.$$

Знайдене значення $v(x)$ підставимо у останнє рівняння (22) і розв'яжемо його відносно $u(x)$:

$$u'e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \Rightarrow \quad u' = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x + C.$$

Отже, запишемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = u(x)v(x) = (x + C)e^{-\sin x}.$$

З початкової умови знаходимо сталу C: $\quad y(0) = C = 5$.

Отже, $y = (x+5)e^{-\sin x}$ – шуканий розв'язок задачі Коші.

6. Рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння першого порядку, що має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \; n \neq 0, n \neq 1, \qquad (23)$$

де $p(x), q(x)$ – задані неперервні функції.

Зауважимо, що при $n = 0$ і $n = 1$ рівняння (23) є лінійним рівнянням, загальний розв'язок якого був знайдений вище. Припустимо, що $n \neq 0, \quad n \neq 1$.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння спочатку множенням його на вираз $(1-n)y^{-n}$, $y \neq 0$,

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x),$$

а потім шляхом заміни

$$y^{1-n} = z, \; (1-n)y^{-n}y' = z'.$$

При діленні на y^n могли втратити розв’язок $y^n = 0$. Це рівняння задовольняє тільки функція $y = 0$ при $n > 0$. Розв’язок $y = 0$ може бути як особливим розв’язком рівняння Бернуллі, так і звичайним.

На практиці рівняння Бернуллі зручніше розв’язувати методом Бернуллі, тобто розв’язок шукати у вигляді (20).

Приклад 6. Розв’язати рівняння: $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

Розв’язання. Попередньо перетворивши**,** маємо рівняння Бернуллі

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y^2}.$$

Його можна розв’язати за допомогою заміни $z = y^3$, яка зводить задане рівняння до лінійного. Використаємо метод Бернуллі, тобто шукаємо у вигляді

$$y = u(x)v(x), \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y та y' в задане рівняння, одержимо

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{x}{u^2 v^2}.$$

Функцію v виберемо як частинний розв’язок рівняння:

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Тоді функцію u знаходимо з рівняння

$$u'x = \frac{x}{u^2 x^2} \quad \Rightarrow \quad u^2 du = \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^3}{3} = -\frac{1}{x} + C \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{C - \frac{3}{x}}.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = uv = x\sqrt[3]{C - \frac{3}{x}} = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}.$$

Контрольні запитання.

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним?
2. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку?
3. Яку форму диференціального рівняння першого порядку називають нормальною, симетричною?
4. Яку функцію називають розв’язком диференціального рівняння першого порядку?
5. Дайте означення загального розв’язку, частинного розв’язку й загального інтеграла диференціального рівняння першого порядку?
6. Що таке інтегральна крива? Які її властивості?

7. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний зміст?
8. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний зміст?
9. Які умови гарантують існування єдиного розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?
10. Чи можливо отримати особливий розв’язок (якщо він існує) рівняння $y' = f(x, y)$ із його загального розв’язку?
11. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
12. Як розв’язується рівняння з відокремлюваними змінними?
13. Вкажіть спосіб зведення рівняння $y' = f(ax + by + c)$ до рівняння з відокремлюваними змінними?
14. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням з однорідною правою частиною?
15. Яку функцію $f(x, y)$ називають однорідною степеня k? Наведіть приклади однорідних функцій 0, 1, 2, 3 степенів, а також неоднорідних?
16. Який вигляд повинна мати права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було рівнянням з однорідною правою частиною?
17. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?
18. Як однорідне диференціальне рівняння зводять до рівняння з відокремлюваними змінними?
19. Які з наведених функцій $f(x, y)$ є однорідними функціями степеня $k = 0$? $k = 1$? $k = 3$?

а) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$; б) $f(x, y) = y^2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 y$;

в) $f(x, y) = 2\sqrt{xy} + x$.

20. Степінь однорідності функції $f(x, y) = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ є:

а) 2; б) 1; в) 0; г) 3.

21. Степінь однорідності функції $f(x, y) = \frac{y^3 - x^3}{xy^2}$ є:

а) 1; б) 0; в) 3; г) 2.

22. Яке з рівнянь є рівнянням з відокремлюваними змінними?

а) $y' = y + e^x \sin y$; б) $y' = \sin x \cos y$; в) $y' = y + xy^2$.

23.Яке з рівнянь є рівнянням з однорідною правою частиною?

а) $y' + xy^2 = 0$; б) $y' - 2xy = \cos x$; в) $xy' = y\, ctg\, \frac{y}{x}$.

24. Яке з рівнянь є звідним до рівняння з однорідною правою частиною?

а) $y' = \frac{2x + y - 1}{(4x + 2y + 5)}$; б) $y' = 3x - y + 6$;

в) $(3x + y - 1)dx + (4y - 2x + 1)dy = 0$.

25. Загальний розв'язок рівняння $y' - xy^2 = 2xy$ має вигляд

а) $\ln y = C\, tg\, \frac{x}{2}$; б) $y = 2 - C\cos x$; в) $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2$.

26. Загальний розв'язок рівняння $(1 + y')e^{-x} = 1$ має вигляд

а) $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2$; б) $\ln y = C\, tg\, \frac{x}{2}$;; в) $y = e^x - x + C$.

27. Загальний розв'язок рівняння $y' ctg\, x + y = 2$ має вигляд

а) $y - \ln|y| = x + e^{-x} + C$; б) $\ln y = C\, tg\, \frac{x}{2}$; в) $y = 2 - C\cos x$.

28. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку?

29. Яка відмінність між лінійним неоднорідним і лінійним однорідним рівняннями?

30. Які існують методи розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?

31. У чому сутність методу варіації сталих знаходження частинних розв'язків диференціальних рівнянь?

32. У чому полягає метод Бернуллі розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?

33. Чи має лінійне неоднорідне рівняння з неперервними коефіцієнтами особливі розв'язки?

34. Запишіть загальний вигляд рівняння Бернуллі?

35. Чи може рівняння Бернуллі мати особливі розв'язки і від чого це залежить?

36. Якою є структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння?

37. Яке з рівнянь є лінійним однорідним першого порядку?

а) $y' + y\cos x = 0$; б) $y' - 2y\sin x = \cos x$; в) $y' = tgx$.

39. Яке з рівнянь є лінійним?

а) $y' + y = x^2$; б) $y' - e^y \cos x = 0$; в) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

40. Яке з рівнянь є рівнянням Бернуллі?

а) $y'' + 2y' = \cos x$; б) $xy' = \ln y$; в) $y' + xy = \sqrt{y}\sin x$.

41. Розв'язок задачі Коші $y' - ytg\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$ є таким:

а) $y = (x+1)\,tgx$; б) $y = x\cos x$; в) $y = \dfrac{x+1}{\cos x}$.

42. Розв'язок задачі Коші $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$ є таким:

а) $y = (x+1)^2$; б) $y = x+1$; в) $y = 1$.

43. Загальний розв'язок рівняння $xy' + y = (2x^2 + 4)y^2$ має вигляд:

а) $y = C\,tg\,x$; б) $y = Ce^x + 2x$; в) $(4 - 2x^2 + Cx)y = 1$.