7.4. Застосування функцій багатьох змінних до задач економіки

7.4.1. Еластичність функції багатьох змінних та її застосування

Еластичність функції. Раніше введено поняття еластичності функції однієї змінної. Аналогічно можна ввести поняття еластичності для функції багатьох змінних. Розглянемо функцію двох змінних $u = f(x, y)$ і запишемо її частинні прирости в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Еластичністю функції $u = f(x, y)$ *в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *за* x називають границю

$$E_{ux}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x u}{u} : \frac{\Delta x}{x}\right),$$

а *еластичністю функції* $u = f(x, y)$ *в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *за* y – границю

$$E_{uy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta_y u}{u} : \frac{\Delta y}{y}\right).$$

Числа $E_{ux}(x_0, y_0)$ та $E_{uy}(x_0, y_0)$ називають коефіцієнтами еластичності в точці $M_0(x_0; y_0)$ функції $u = f(x, y)$ за змінними x та y.

З означення отримаємо:

$$E_{ux}(x, y) = \frac{x}{u}u'_x = x(\ln u)'_x = \frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln x)}; \qquad (7.4.1)$$

$$E_{uy}(x, y) = \frac{y}{u}u'_y = y(\ln u)'_y = \frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln y)}. \qquad (7.4.2)$$

Аналогічно, для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$E_{ux_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_i}{u}u'_{x_i} = x_i(\ln u)'_{x_i} = \frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln x_i)}. \qquad (7.4.3)$$

П р и к л а д 7.4.1. Обчислимо коефіцієнти еластичності за x та y функції $u = x^y$ в точці $M(2;3)$.

● За формулами (7.4.1), (7.4.2)

$$E_{ux}(x, y) = \frac{x}{u}u'_x = x(y \ln x)'_x = y;$$

$$E_{uy}(x,y)=\frac{y}{u}u'_y=y(y\ln x)'_y=y\ln x.$$

Отже, $E_{ux}(2{,}3)=3,\ E_{uy}(2{,}3)=3\ln 2.$ ❍

П р и к л а д 7.4.2. Обчислимо еластичність виробничої функції Кобба–Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ в довільній точці $M_0(K_0,L_0)$ за змінними K і L.

- $$E_{FK}(K_0,L_0)=\frac{F'_K(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)}\cdot K_0=\frac{A\alpha\left(\dfrac{L_0}{K_0}\right)^{1-\alpha}}{AK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\cdot K_0=\alpha,$$

$$E_{FL}(K_0,L_0)=\frac{F'_L(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)}\cdot L_0=\frac{A(1-\alpha)\left(\dfrac{L_0}{K_0}\right)^{\alpha}}{AK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\cdot L_0=1-\alpha.$$

Отже, еластичність випуску продукції, який описує виробнича функція Кобба–Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, за основними фондами дорівнює α, а за затратами праці – $(1-\alpha)$. Це означає, що відносна зміна основних фондів K на 1 % зумовлює приблизно відносну зміну продукції на α %, а відносна зміна затрат праці L на 1 % – приблизно відносну зміну продукції на $(1-\alpha)$ %. ❍

Задача цінової дискримінації. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – кількість одного і того ж товару, який продають на n ринках. Ціна товару $P_i(x_i)$ на кожному ринку різна і залежить від кількості проданого товару на цьому ринку. Нехай функція затрат залежить від кількості проданого товару, тобто

$$C=S(x_1+x_2+...+x_n). \tag{7.4.4}$$

Тоді функція загального прибутку має вигляд

$$\pi=x_1P_1(x_1)+x_2P_2(x_2)+...+x_nP_n(x_n)-S(x_1+x_2+...+x_n). \tag{7.4.5}$$

З необхідної умови екстремуму $\dfrac{\partial\pi}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,...,n$, отримаємо систему алгебричних рівнянь

$$P_i(x_i)+x_iP_i'(x_i)-S'(x_1+x_2+...+x_n)=0,\ i=1,2,...,n, \tag{7.4.6}$$

з якої визначимо стаціонарні точки функції (7.4.5) в області $x_i\ge 0,\ i=1,2,...,n$, евклідового простору R^n.

Проаналізуємо дохід R_i на кожному ринку залежно від ціни x_i на товар. Оскільки $R_i=x_iP_i$, то граничний дохід

$$R_i' = P_i + x_i P_i' = P_i\left(1+\frac{x_i P_i'}{P_i}\right) = P_i\left(1+\frac{1}{E_i}\right),$$

де E_i – еластичність попиту на i-му ринку. Запишемо останню рівність у вигляді

$$R_i' = P_i\left(1-\frac{1}{|E_i|}\right). \tag{7.4.7}$$

Якщо $|E_i| < 1,$ то $R_i' < 0,$ тобто ринок нееластичний. Якщо $S' > 0,$ то з умови (7.4.6) випливає, що потрібно вибрати ринок з додатним граничним доходом, тобто з еластичним попитом. У цьому випадку повинна виконуватись умова $|E_i| > 1.$ З рівнянь (7.4.6) випливає

$$P_1\left(1-\frac{1}{|E_1|}\right) = P_2\left(1-\frac{1}{|E_2|}\right) = \ldots = P_n\left(1-\frac{1}{|E_n|}\right) = S'. \tag{7.4.8}$$

З (7.4.8) випливає *умова цінової дискримінації*: чим менша за абсолютною величиною еластичність ринку для заданої кількості товару, тим вищою повинна бути ціна на цьому ринку.

Матриця Гессе у цьому випадку має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} P_1''x_1 + 2P_1' - S'' & -S'' & \ldots & -S'' \\ -S'' & P_2''x_2 + 2P_2' - S'' & \ldots & -S'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -S'' & -S'' & \ldots & P_n''x_n + 2P_n' - S'' \end{pmatrix}. \tag{7.4.9}$$

П р и к л а д 7.4.3. На трьох ринках продають $x_1,$ $x_2,$ x_3 одиниць товару за цінами, відповідно, $P_i = a_i - b_i x_i.$ Нехай функція затрат має вигляд $C = A + B(x_1 + x_2 + x_3).$ Знайдемо максимум прибутку.

- Запишемо функцію прибутку

$$\pi = x_1(a_1 - b_1x_1) + x_2(a_2 - b_2x_2) + x_3(a_3 - b_3x_3) - A - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

З умови локального екстремуму отримаємо систему рівнянь

$$a_i - 2b_i x_i - B = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

звідки стаціонарна точка

$$x_i = \frac{a_i - B}{2b_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.4.10}$$

З (7.4.9) одержимо матрицю Гессе:

$$H=\begin{pmatrix}-2b_1 & 0 & 0\\ 0 & -2b_2 & 0\\ 0 & 0 & -2b_3\end{pmatrix}.$$

Якщо $b_1>0,\ b_2>0,\ b_3>0,$ то отримаємо, що знаки головних мінорів цієї матриці чергуються, причому $\Delta_1<0.$ Тому за критерієм Сильвестра ця стаціонарна точка є точкою максимуму функції прибутку.

Нехай $a_1=25,\ b_1=5,\ a_2=45,\ b_2=4,\ a_3=85,\ b_3=10,\ A=10,\ B=5.$ У цьому випадку з (7.4.10) отримаємо $x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=4$ за цінами $P_1=15,$ $P_2=25,\ P_3=45.$ Відповідні еластичності $|E_1|=1{,}5, |E_2|=1{,}25,\ |E_3|=1{,}125$ задовольняють принцип цінової дискримінації. Максимальний прибуток у цьому разі $\pi_{\max}=270.$ ❍

7.4.2. Виробничі функції та їхні властивості

Виробнича функція багатьох змінних – це функція, яка має вигляд

$$Y=f(\bar{x},\bar{a})=f(x_1,x_2,...,x_n,a_1,a_2,...,a_m),\tag{7.4.11}$$

де незалежні змінні $x_1,x_2,...,x_n$ – обсяги затрачених або використаних ресурсів, $a_1,a_2,...,a_m$ – вектор параметрів, Y – обсяг випуску продукції. Виробничі функції (7.4.11) називають *багатофакторними*.

Мікроекономічні виробничі функції використовують для моделювання взаємозв’язку між затраченими або використаними ресурсами $\bar{x}$ і випуском продукції Y для деякого суб’єкта господарювання.

Макроекономічні виробничі функції застосовують для моделювання взаємозв’язку між затраченими або використаними ресурсами $\bar{x}$ і випуском продукції Y для регіону або держави.

Виробничу функцію називають *статичною*, якщо її аргументи не залежать від часу.

Для моделювання економічних зв’язків часто використовують двофакторну виробничу функцію

$$Y=F(K,L),\tag{7.4.12}$$

де K – виробничі фонди; L – трудові ресурси.

Виробничу функцію $Y=F(K,L)$ називають *неокласичною*, якщо вона має такі властивості:

1) $F(0,L)=F(K,0)=0$ – якщо нема хоча б одного ресурсу, то виробництво неможливе;

2) $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$ – зі збільшенням затрат хоча б одного ресурсу за незмінної кількості іншого випуск продукції зростає;

3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} \le 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} \le 0$ – зі збільшенням затрат хоча б одного ресурсу за незмінної кількості іншого приріст випуску продукції на кожну додаткову одиницю цього ресурсу не збільшується (*закон спадної ефективності*);

4) $\lim\limits_{K\to\infty} F(K,L) = \lim\limits_{L\to\infty} F(K,L) = \infty$ – у разі необмеженого збільшення одного з ресурсів випуск продукції необмежено зростає.

Для моделювання економічних процесів часто використовують *мультиплікативні виробничі функції*

$$Y = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \tag{7.4.13}$$

де A – коефіцієнт, який відображає вплив науково-технічного прогресу; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ – деякі параметри. Якщо $\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = 1-\alpha$, то отримаємо виробничу функцію Кобба–Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{7.4.14}$$

Дослідимо властивості мультиплікативної виробничої функції.

Якщо $K = 0$, або $L = 0$, то з формули (7.4.13) випливає $Y = 0$. Отже, мультиплікативна виробнича функція задовольняє властивість 1: унаслідок відсутності хоча б одного ресурсу виробництво неможливе.

Оскільки для $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 AK^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 Y}{K} > 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 Y}{L} > 0, \tag{7.4.15}$$

то мультиплікативна виробнича функція задовольняє властивість 2: зі збільшенням затрат ресурсів випуск продукції збільшується.

Частинні похідні виробничої функції за факторами називають *граничними продуктами*, або *граничними* (*маргінальними*) *ефективностями факторів*, вони дорівнюють приросту випуску продукції, який відповідає малій зміні факторів. Отже,

$\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – граничний продукт виробничих фондів, гранична фондовіддача, гранична ефективність виробничих фондів;

$\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – граничний продукт трудових ресурсів, гранична продуктивність праці, гранична ефективність трудових ресурсів.

З формул (7.4.15) випливає, що гранична фондовіддача пропорційна до середньої фондовіддачі $\dfrac{Y}{K}$ з коефіцієнтом пропорційності α_1, а гранична продуктивність праці – до середньої продуктивності праці з коефіцієнтом пропорційності α_2:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \cdot \frac{Y}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \cdot \frac{Y}{L}. \tag{7.4.16}$$

Із формули (7.4.16) видно, що для $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ граничні фондовіддача і продуктивність праці менші, ніж середні. Мультиплікативна виробнича функція задовольняє властивість 3, яка притаманна реальній економіці: зі збільшенням затрат ресурсу його гранична віддача зменшується, тобто

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) A K^{\alpha_1 - 2} L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{Y}{K^2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{Y}{L^2} < 0. \tag{7.4.17}$$

Обчислимо

$$\lim_{K\to\infty} F(K,L) = \lim_{K\to\infty} A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \infty, \quad \lim_{L\to\infty} F(K,L) = \lim_{L\to\infty} A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \infty.$$

Отже, мультиплікативна виробнича функція $Y = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$ для $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ є неокласичною.

Визначимо еластичності мультиплікативної виробничої функції

$$E_{FK}(K_0, L_0) = \frac{F'_K(K_0, L_0)}{F(K_0, L_0)} \cdot K_0 = \frac{\alpha_1 A K_0^{\alpha_1 - 1} L_0^{\alpha_2}}{A K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} \cdot K_0 = \alpha_1;$$

$$E_{FL}(K_0, L_0) = \frac{F'_L(K_0, L_0)}{F(K_0, L_0)} \cdot L_0 = \frac{\alpha_2 A K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2 - 1}}{A K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} \cdot L_0 = \alpha_2. \tag{7.4.18}$$

Отже, α_1 – еластичність випуску продукції за основними фондами, α_2 – еластичність випуску продукції за трудовими ресурсами. Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то маємо інтенсивне збільшення випуску продукції, якщо $\alpha_1 < \alpha_2$ – екстенсивне.

Лінією рівня на площині, або *ізоквантою*, називають множину точок площини, для яких

$$F(K,L)=Y_0=\text{const}. \qquad (7.4.19)$$

Для мультиплікативної виробничої функції ізокванта має вигляд

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}=Y_0=\text{const},$$

або

$$K^{\alpha_1}=\frac{Y_0}{A}L^{-\alpha_2}. \qquad (7.4.20)$$

Для різних K і L, які лежать на заданій ізокванті, випуск дорівнює одному й тому значенню Y_0, що відображає властивість взаємної замінності ресурсів.

Оскільки на ізокванті $F(K,L)=Y_0=\text{const}$, то

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial K}\mathrm{d}K+\frac{\partial F}{\partial L}\mathrm{d}L=0. \qquad (7.4.21)$$

У цій рівності $\frac{\partial F}{\partial K}>0,$ $\frac{\partial F}{\partial L}>0,$ тому $\mathrm{d}K$ і $\mathrm{d}L$ мають різні знаки: якщо $\mathrm{d}L<0,$ що означає скорочення обсягу трудових ресурсів, то $\mathrm{d}K>0,$ тобто зменшення на $|\mathrm{d}L|$ обсягу трудових ресурсів замінюється виробничими фондами обсягом $\mathrm{d}K,$ і навпаки.

Граничною нормою заміщення S_K *трудових ресурсів основними фондами* називають відношення

$$S_K=-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}. \qquad (7.4.22)$$

Граничною нормою заміщення S_L *основних фондів трудовими ресурсами* називають відношення

$$S_L=-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}=\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}. \qquad (7.4.23)$$

З формул (7.4.22) і (7.4.23) випливає

$$S_L\cdot S_K=1. \qquad (7.4.24)$$

Для мультиплікативної виробничої функції (7.4.13) норма заміщення трудових ресурсів капіталом пропорційна до фондомісткості:

$$S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot k, \qquad (7.4.25)$$

де $k = \frac{K}{L}$ – фондомісткість.

Ізоклінами називають лінії найбільшого зростання виробничої функції. Вони ортогональні до ліній нульового зростання, тобто до ізоквантів. Оскільки напрям найбільшого зростання в кожній точці задає градієнт $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, F} = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right)$, то рівняння ізокліни запишемо у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}K}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{\mathrm{d}L}{\frac{\partial F}{\partial L}}. \qquad (7.4.26)$$

Для мультиплікативної виробничої функції отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1\frac{Y}{K}; \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2\frac{Y}{L},$$

тому ізокліну задає диференціальне рівняння

$$\frac{K}{\alpha_1}\mathrm{d}K = \frac{L}{\alpha_2}\mathrm{d}L, \qquad (7.4.27)$$

розв’язок якого

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}L^2 + K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}L_0^2}\,, \qquad (7.4.28)$$

де $M_0(K_0, L_0)$ – точка, через яку проходить ізокліна. Якщо

$$K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}L_0^2 = 0,$$

то рівнянням ізокліни є пряма

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\cdot L.$$

На рис. 7.4.1 зображені ізокванти та ізокліни мультиплікативної функції.

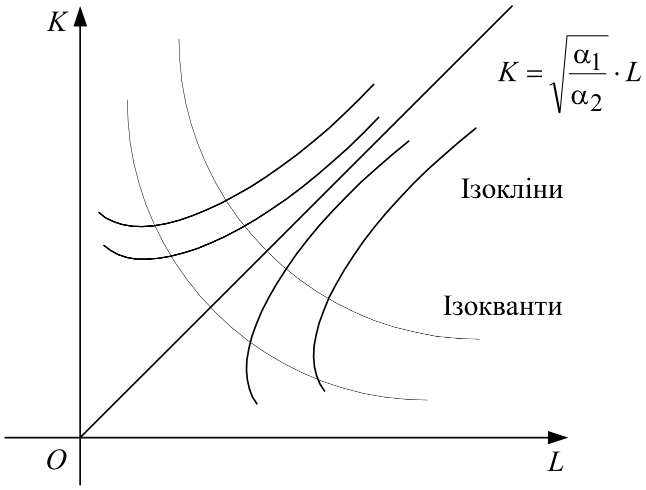

Рис. 7.4.1.

Крім мультиплікативних виробничих функцій, використовують *лінійну виробничу функцію*

$$Y = A_0 + AK + BL \tag{7.4.29}$$

і *виробничу функцію затрати–випуск*

$$Y = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right). \tag{7.4.30}$$

Визначимо середню фондовіддачу $\frac{Y}{K}$ та середню продуктивність праці $\frac{Y}{L}$ для лінійної виробничої функції:

$$\frac{Y}{K} = \frac{A_0}{K} + A + B\frac{L}{K};$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{A_0}{L} + A\frac{K}{L} + B. \tag{7.4.31}$$

Для лінійної виробничої функції гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = A,$ а гранична продуктивність праці – $\frac{\partial F}{\partial L} = B.$

Виробничу функцію називають *однорідною* степеня $\gamma,$ якщо

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L). \tag{7.4.32}$$

Зазначимо, що мультиплікативна функція однорідна степеня $\alpha_1 + \alpha_2$.

Для однорідних виробничих функцій можна отримати простіший вираз норми заміни. Справді, $F(K, L) = L^{\gamma} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f(k)$, де $f(k) = F(k, 1)$, $k = \frac{K}{L}$ – фондомісткість. Тому

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma L^{\gamma-1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}\big(\gamma f(k) - k f'(k)\big);$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma} f'(k) \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k).$$

Звідси

$$S_K = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial L}}{\dfrac{\partial F}{\partial K}} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k, \tag{7.4.33}$$

тобто норма заміни є функцією лише фондомісткості.

Для однорідних функцій уводять поняття *еластичності заміни праці фондами*

$$\sigma_K = \frac{\dfrac{\mathrm{d}k}{k}}{\dfrac{\mathrm{d}S_K}{S_K}}. \tag{7.4.34}$$

Еластичність заміни праці фондами означає, на скільки відсотків треба змінити фондомісткість, щоб норма заміни змінилася на 1 %. Аналогічно вводять показник еластичності заміни фондів працею σ_L. Можна довести, що $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$. Доведемо, що для мультиплікативних функцій $\sigma = 1$. Справді, у цьому випадку $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{Y}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{Y}{K}$, тому $S = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k$, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}k} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\sigma = \frac{S}{k}\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1.$ Можна довести, що для лінійної виробничої функції $\sigma = \infty$.

Геометрично норма заміни праці фондами дорівнює тангенсу кута α_A, який утворює дотична до ізокванти з від'ємним напрямом осі OL (рис. 7.4.2).

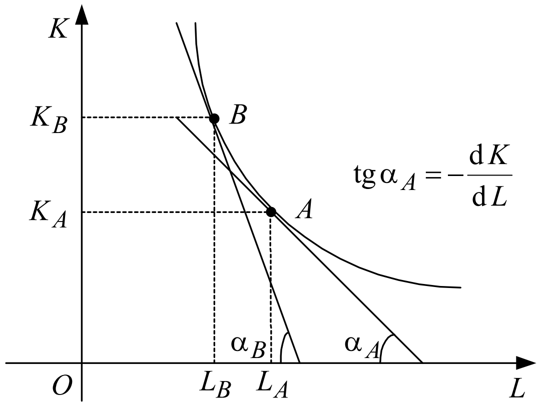

Рис. 7.4.2.

Клас виробничих функцій зі *сталою еластичністю заміни*, або CES-функцій, описує співвідношення

$$\frac{\frac{\mathrm{d}k}{k}}{\frac{\mathrm{d}S}{S}} = \sigma = \mathrm{const}. \qquad (7.4.35)$$

Звідси

$$S = Ck^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad (7.4.36)$$

де C – довільна стала. Підставимо (7.4.36) у (7.4.33): $Ck^{\frac{1}{\sigma}} = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k$, або

$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k}$. Звідси $\ln f(k) = \gamma\int\frac{\mathrm{d}k}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k} = \frac{\gamma\sigma}{\sigma - 1}\ln C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C\right)$, де C_1 – довільна стала. Отже, $f(k) = C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}$, або в змінних K і

$$L\,Y = C_1\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$ Позначимо $\rho = \dfrac{1-\sigma}{\sigma},$ $\dfrac{1}{C+1} = \alpha < 1,$

$A = C_1(C+1)^{-\frac{\gamma}{\rho}} > 0.$

Отже, загальний вигляд виробничої функції зі сталою еластичністю заміни

$$Y = F(K,L) = A\left(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \qquad (7.4.37)$$

Якщо $0 < \gamma \le 1,$ $\rho > -1,$ то ця функція задовольняє умови 2, 3 для неокласичних виробничих функцій. Якщо $\gamma = 1,$ $\sigma \to 1,$ тобто $\rho \to 0,$ то CES-функція прямує до функції Кобба–Дугласа; якщо $\sigma \to 0,$ то CES-функція прямує до виробничої функції з фіксованими пропорціями $Y = \min\left(K^{\gamma}, L^{\gamma}\right),$ яка описує випадок відсутності заміни факторів. Якщо $\rho \to -1,$ $\gamma = 1,$ то CES-функція прямує до лінійної виробничої функції.

Максимізація прибутку виробництва продукції. Функцію прибутку у багатьох випадках задають у вигляді

$$\pi(K,L) = P \cdot F(K,L) - W \cdot L - R \cdot K, \qquad (7.4.38)$$

де P – ціна продукції; $F(K,L)$ – виробнича функція; W і R – відповідно, ціни на працю і капітальні затрати; L і K – відповідно, затрати трудових ресурсів і капіталу. Розглянемо дві задачі, пов’язані з визначенням максимуму прибутку.

Оптимальний план. Точку $M_0(K_0; L_0)$ називають *оптимальним планом*, якщо у цій точці функція прибутку (7.4.38) набуває найбільшого значення. Знайдемо граничну норму заміщення S_K трудових ресурсів основними фондами, яку обчислюють за формулою (7.4.22), для оптимального плану. В точці локального екстремуму частинні похідні першого порядку функції (7.4.38) дорівнюють нулю. Звідси отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} P \cdot \dfrac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial K} - R = 0; \\ P \cdot \dfrac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial L} - W = 0. \end{cases} \qquad (7.4.39)$$

За формулою (7.4.22) з системи (7.4.39) отримаємо граничну норму заміщення трудових ресурсів основними фондами:

$$S_K = -\frac{W}{R}. \qquad (7.4.40)$$

Максимізація функції прибутку. Знайдемо оптимальний план і максимум функції прибутку (7.4.38), якщо $F(K,L) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. У цьому випадку функція прибутку

$$\pi(K,L) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - WL - RK. \qquad (7.4.41)$$

З необхідної умови екстремуму отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{2}{3}PL^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}} = R; \\ \frac{2}{3}PK^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = W. \end{cases}$$

Звідси координати оптимального плану

$$K_0 = \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{R^2W}; \quad L_0 = \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{RW^2}.$$

У цьому разі $\pi_{\max} = \pi(K_0, L_0) = \dfrac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{RW}$.

7.4.3. Моделювання поведінки споживачів

Функція корисності споживача. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набір товарів, які споживач купив протягом деякого часу за заданих цін і незмінного доходу. *Простором товарів* називають множину всіх можливих наборів товарів

$$C = \{\bar{x} : x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}.$$

У теорії споживчого вибору вважають, що кожен споживач має свої уподобання на деякій підмножині X простору товарів C. Це означає, що для кожної пари $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$ справджується одне з трьох співвідношень:

1) $\bar{x} \succ \bar{y}$ – набір $\bar{x}$ ліпший, ніж $\bar{y}$;
2) $\bar{x} \prec \bar{y}$ – набір $\bar{x}$ гірший, ніж $\bar{y}$;

3) $\bar{x} \sim \bar{y}$ – для споживача обидва набори однакові.

Відношення переваги мають такі властивості:

1) якщо $\bar{x} \succ \bar{y}$, $\bar{y} \succ \bar{z}$, то $\bar{x} \succ \bar{z}$ – властивість транзитивності;

2) якщо $\bar{x} > \bar{y}$, то $\bar{x} \succ \bar{y}$ – властивість ненасиченості: більший набір завжди ліпший, ніж менший.

Теорема Дебре. Якщо множина X зв'язна, а відношення переваги неперервне, то існує функція корисності.

Функція корисності $u(\bar{x})$ є індикатором переваг, тобто з того, що $\bar{x} \succ \bar{y}$, випливає $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$, а з $\bar{x} \sim \bar{y}$ – $u(\bar{x}) = u(\bar{y})$. Функція корисності дає змогу замінити відношення переваги відношеннями між числами.

У теорії споживання вважають, що функція корисності має такі властивості:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ – зі збільшенням споживання блага корисність зростає;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – якщо спочатку блага нема, то навіть невеликий його приріст різко збільшує корисність;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ – зі збільшенням споживання блага швидкість зростання корисності сповільнюється;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – якщо блага дуже багато, то його збільшення не веде до збільшення корисності.

Зазначимо, що умову 3 використовують у такому вигляді: матриця Гессе від'ємно визначена.

Граничною корисністю товару називають границю відношення приросту корисності до відповідного приросту товару:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Гранична корисність відображає, на скільки зросте корисність, якщо кількість товару збільшиться на одиницю.

Поверхнею байдужості називають гіперповерхню, на якій корисність стала:

$$u(\bar{x}) = c = \text{const},$$

або в диференціальній формі

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0. \qquad (7.4.42)$$

Умова (7.4.42) означає, що гіперплощина, дотична до поверхні байдужості, перпендикулярна до градієнта корисності.

Наявність множини набору товарів, які мають однакову корисність, дає змогу споживачу замінити один набір товарів іншим, рівноцінним набором.

Нехай у (7.4.42) $\mathrm{d}x_i = 0$ для $i = 3, 4, ..., n.$ У цьому випадку отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = 0.$$

Звідси

$$-\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}, \tag{7.4.43}$$

тобто *гранична норма заміни* першого товару другим дорівнює відношенню граничних корисностей цих товарів. Гранична норма заміни відображає, скільки потрібно одиниць другого товару, щоб замінити одиницю першого товару.

Бюджетною множиною називають множину тих наборів товарів, які може придбати споживач, маючи дохід I:

$$B = \{\overline{x} : \overline{px} \le I\}, \tag{7.4.44}$$

де $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор цін.

Модель поведінки споживача. В теорії споживання вважають, що споживач завжди прагне зробити корисність найбільшою, і єдине, що його стримує, – це обмеженість доходу:

$$\max_{\overline{x} \in B \cap X} u(\overline{x}) = \max_{\overline{px} = I} u(\overline{x}). \tag{7.4.45}$$

У задачі (7.4.45) вважають, що точка максимуму $x^* \in X$. Цю задачу на умовний екстремум можна звести до відшукання безумовного екстремуму функції Лагранжа

$$L(\overline{x}) = u(\overline{x}) - \lambda(\overline{px} - I). \tag{7.4.46}$$

З необхідної умови локального екстремуму отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = I, \tag{7.4.47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x_i^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.4.48}$$

Доведено, що матриця Гессе від'ємно визначена, тобто ці умови визначають точку максимуму.

З (7.4.48) випливає, що споживач за фіксованого доходу так вибирає набір $\bar{x}^*$, що в цій точці відношення граничних корисностей дорівнює відношенням цін:

$$\frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_1} : \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_2} : ... : \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : ... : p_n. \tag{7.4.49}$$

Розв'язавши (7.4.47), (7.4.48) щодо $\bar{x}^*$, *отримаємо функцію попиту споживача*

$$\bar{x}^* = \bar{x}^*(\bar{p}, I). \tag{7.4.50}$$

Як приклад, розглянемо випадок двох змінних x_1 та x_2, тобто $u(\bar{x}) = u(x_1, x_2)$. У цьому разі поверхня байдужості є *лінією байдужості*, яка є лінією рівня функції корисності. Множину ліній байдужості називають *картою* ліній байдужості. Лінії байдужості, які відповідають різним рівням задоволення потреб споживача, не дотикаються і не перетинаються між собою (рис. 7.4.3).

Запишемо перший диференціал функції корисності на лінії байдужості:

$$\mathrm{d}u(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = 0.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}} < 0. \tag{7.4.51}$$

Отже, функція $x_2 = x_2(x_1)$, тобто залежність x_2 від x_1 уздовж кривої байдужості є спадною. Обчислимо

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)'_{x_1} = -\frac{u''_{x_1x_1}u'_{x_2} - u'_{x_1}u''_{x_2x_1}}{\left(u'_{x_2}\right)^2} > 0.$$

Як бачимо, лінії байдужості спадні і випуклі вниз.

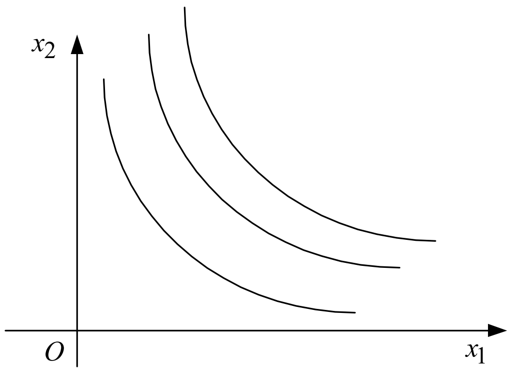

Рис. 7.4.3.

Задача споживчого вибору, або задача раціональної поведінки споживача на ринку полягає у виборі такого споживчого набору $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, який надає максимуму функції корисності для заданого бюджетного обмеження. Бюджетне обмеження у випадку двох змінних має вигляд

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I.$$

Отже, потрібно знайти точку максимуму функції $u = u(x_1, x_2)$ за умов

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I; \;\; x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \tag{7.4.52}$$

Допустима множина, тобто множина наборів благ, доступних для споживача, – трикутник, обмежений осями координат і бюджетною прямою (рис. 7.4.4).

Якщо для деякого набору (x_1, x_2) обмеження $p_1x_1 + p_2x_2 \le M$ виконується як строга нерівність, то можна збільшити споживання одного блага і збільшити функцію корисності. Тому для набору $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, який надає максимуму функції корисності, бюджетне обмеження перетворюється у рівність, тобто

$$p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = I. \tag{7.4.53}$$

Уважаємо, що в оптимальній точці $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ внаслідок властивостей функції корисності виконуються умови $x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0$.

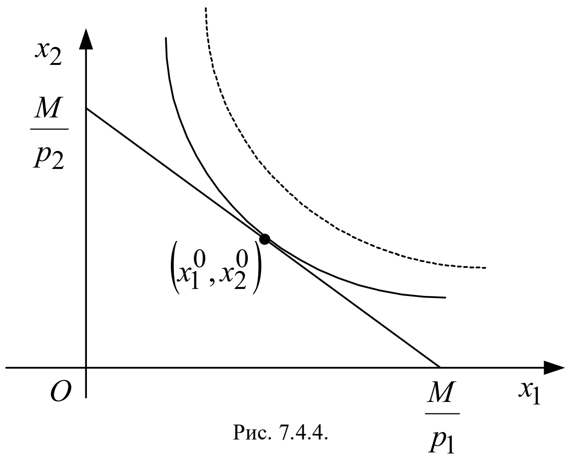

Рис. 7.4.4.

Отже, задачу споживчого вибору можна замінити задачею на умовний екстремум: знайти максимум функції $u = u(x_1, x_2)$ за умови

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \tag{7.4.54}$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I). \tag{7.4.55}$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку цієї функції і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0. \end{cases} \tag{7.4.56}$$

Вилучимо з цієї системи рівнянь змінну λ, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2}; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \tag{7.4.57}$$

Розв’язок $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ цієї системи рівнянь є розв’язком задачі споживчого вибору. Підставимо цей розв’язок у перше рівняння системи (7.4.57):

$$\frac{\dfrac{\partial u\left(x_1^0, x_2^0\right)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u\left(x_1^0, x_2^0\right)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{7.4.58}$$

Отримано таке: в точці $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ локальної ринкової рівноваги відношення граничних корисностей благ дорівнює відношенню ринкових цін на ці блага. Оскільки відношення $\dfrac{\dfrac{\partial u\left(x_1^0, x_2^0\right)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u\left(x_1^0, x_2^0\right)}{\partial x_2}}$ дорівнює граничній нормі заміни першого блага другим у точці локальної ринкової рівноваги $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, то з (7.4.58) випливає, що ця гранична норма заміни дорівнює відношенню ринкових цін на блага. Геометрично точка $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ є точкою дотику лінії байдужості функції корисності та бюджетної прямої (рис. 7.4.4). Координати x_1^0 і x_2^0 є функціями параметрів p_1, p_2, I:

$$x_1^0 = x_1^0(p_1, p_2, I); \quad x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, I). \tag{7.4.59}$$

Функції (7.4.59) називають функціями попиту на перше і друге благо. Ці функції однорідні щодо цін і доходу, тобто

$$x_1^0(tp_1, tp_2, tI) = x_1^0(p_1, p_2, I); \;\; x_2^0(tp_1, tp_2, tI) = x_2^0(p_1, p_2, I)$$

для будь-якого t. Це означає таке: якщо всі ціни і дохід зміняться в одну й ту ж кількість разів, то попит на ці блага буде незмінним.

П р и к л а д 7.4.4. Нехай $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Знайдемо екстремум цієї функції за умови $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$.

- Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I).$$

Обчислимо частинні похідні першого порядку цієї функції і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}, \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Перша умова означає, що в цій задачі кількість грошей, витрачених на кожне благо, однакова, тобто $x_1 p_1 = x_2 p_2$. Функції попиту в цьому випадку мають вигляд

$$x_1 = \frac{I}{2p_1}, \quad x_2 = \frac{I}{2p_2}. \tag{7.4.60}$$

П р и к л а д 7.4.5. Нехай $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{a}{a+b+1}} x_2^{\frac{b}{a+b+1}}$. Знайдемо екстремум цієї функції за умови $ax_1 + bx_2 = I$.

● Обчислимо частинні похідні функції корисності й отримаємо, що єдина критична точка $O(0;0)$ є на границі області допустимих значень аргументу. У цій точці та на граничних лініях $x = 0$, $y = 0$ функція $u(x_1, x_2)$ дорівнює нулю, що є її найменшим значенням. Отже, точку максимуму треба шукати на границі $ax_1 + bx_2 = I.$ З умови $ax_1 + bx_2 = I$ отримаємо $x_2 = \dfrac{I - ax_1}{b}.$ Підставимо це значення у функцію попиту. Одержимо функцію однієї змінної

$$u(x_1) = b^{-\frac{b}{a+b+1}} x_1^{\frac{a}{a+b+1}} (I - ax_1)^{\frac{b}{a+b+1}}.$$

З необхідної умови екстремуму

$$x_1 = \frac{I}{a+b}, \quad x_2 = \frac{I}{a+b}.$$

Отже, у цій моделі оптимальний попит на обидва товари однаковий: він пропорційний до бюджету споживача й обернено пропорційний до сумарної ціни товарів.

Модель Р. Стоуна. Розглянемо функцію Р. Стоуна

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}, \qquad (7.4.61)$$

де a_i – найменша кількість i-го блага, яку споживач повинен придбати. Для того, щоб придбати набір $(a_1, a_2, ..., a_n)$, потрібно, щоб виконувалася умова

$$\sum_i p_i a_i \le I; \ \ x_1 \ge 0; \ \ x_2 \ge 0, \ \ ..., \ \ x_n \ge 0. \qquad (7.4.62)$$

Потрібно знайти максимум функції (7.4.61) за умов (7.4.62). Це і є модель Стоуна.

Складемо функцію Лагранжа і прирівняємо її частинні похідні за всіма аргументами до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_i u(\bar{x})}{x_i - a_i} + \lambda p_i = 0, \quad i = 1,2,...n; \\ \sum_i p_i a_i - I = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i u(\bar{x})}{\lambda p_i}, \qquad (7.4.63)$$

або

$$\alpha u(\bar{x}) - \lambda a_i p_i + \lambda x_i p_i = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Додамо всі ці рівності:

$$\sum_i \alpha_i u(\bar{x}) + \lambda \sum_i p_i x_i - \lambda \sum_i p_i a_i = 0.$$

Оскільки в точці екстремуму виконується рівність $\sum_i p_i x_i = I,$ то

$$\frac{u(\bar{x})}{\lambda} = -\frac{I - \sum_i p_i a_i}{\sum_i \alpha_i}. \qquad (7.4.64)$$

З рівностей (7.4.63) і (7.4.64) отримаємо функцію попиту

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i \cdot \left(I - \sum_j p_j a_j \right)}{p_i \cdot \sum_j \alpha_j}.$$

Якщо в моделі Стоуна $a_i = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$, то $x_i = \frac{I}{np_i}$, тобто дохід ділять на n однакових частин, і попит на товар дорівнює частці від ділення отриманої суми грошей на ціну товару.

Для того, щоб описати інші випадки, розглядають складніші вирази функції корисності. Наприклад, для функції корисності

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)$$

функція попиту має такий вигляд: $x_1 = \frac{aI}{I + bp_1}$ – типова функція попиту на предмети першої потреби, а $x_2 = \frac{I\left(I + p_1(b-a)\right)}{I + bp_1}$ – типова функція попиту на предмети розкоші.

Взаємна замінність благ. Ефекти компенсації. Якщо внаслідок збільшення ціни на i-й товар, тобто зменшення попиту на нього, зростає попит на j-й товар, то такі товари називають *взаємно замінними*. Якщо ж попит на j-й товар теж зменшується, то товари називають *взаємно доповнюваними.* Зазначимо, що реальна взаємозамінність може спотворюватися зниженням купівельної можливості внаслідок подорожчання i-го товару: у споживанні j-й товар може заміняти i-й, але попит на нього може не зростати. Для компенсації цього спотворення використовують поняття компенсованої зміни ціни, тобто такої зміни, яка супроводжується збільшенням доходу споживача, що дає змогу підтримувати попередній рівень добробуту. Компенсовану зміну ціни показано на рис. 7.4.5.

Нехай ціна першого блага підвищилась з p_1^1 до p_1^2. У цьому випадку бюджетна пряма із положення *1* переміститься у положення *2*. Точка A на лінії байдужості l_1, яка дотикається до бюджетної прямої *1*, переміститься у точку B, у якій нова лінія байдужості l_2 дотикається до нової бюджетної прямої *2*. Для компенсації споживачу втрати добробуту потрібно так збільшити його дохід, щоб нова бюджетна пряма *3*, яка паралельна до бюджетної прямої *2*, дотикалася до лінії байдужості l_1 у точці C. Напрямлений відрізок $\overrightarrow{AC}$ ілюструє *ефект заміни* внаслідок збільшення ціни, тобто зміну структури попиту за умови підтримання попереднього рівня добробуту. Напрямлений відрізок $\overrightarrow{AC}$ ілюструє *ефект доходу*, тобто зміну споживчого попиту за умови зміни рівня доходу і збереження співвідношення цін на блага. Якщо компенсації нема, то результат зростання ціни ілюструє напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$.

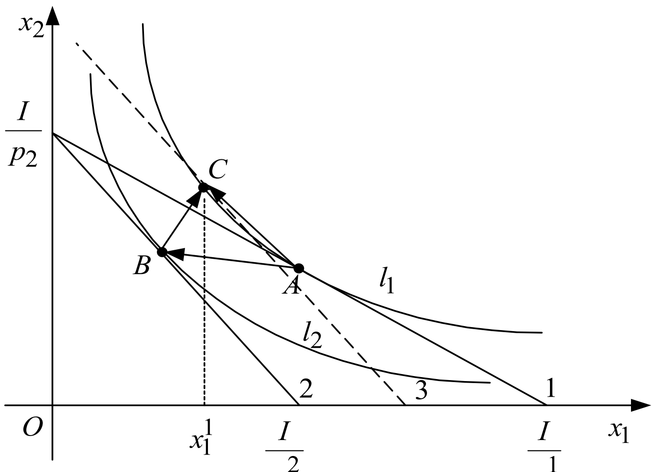

Рис. 7.4.5.

П р и к л а д 7.4.6. Нехай в умовах прикладу 7.4.5 ціни благ $p_1 = 10$ $p_2 = 2$ грн, а дохід споживача $I = 60$ грн. Функції попиту у цьому випадку мають вигляд $x_1 = \frac{I}{2p_1}$, $x_2 = \frac{I}{2p_2}$. У нашому випадку $x_1 = \frac{60}{2 \cdot 10} = 3$, $x_1 = \frac{60}{2 \cdot 2} = 15$, $u^* = 45$. Нехай ціну p_2 змінили з 2 до 7 грн. Визначимо розмір компенсації. Для того, щоб придбати попередній оптимальний набір, споживачу потрібно додатково $(7-2) \cdot 15 = 75$ грн. Попередня структура споживання не буде оптимальною для нових цін.

Нехай споживач отримав додатково M грн. У цьому випадку для нових цін попит на блага становить $x_1 = \frac{60+M}{10 \cdot 2}$, $x_2 = \frac{60+M}{7 \cdot 2}$. Функція попиту $u = x_1 \cdot x_2 = \frac{(60+M)^2}{10 \cdot 7 \cdot 4}$. Значення цього виразу повинно дорівнювати попередньому значенню, тобто $u^* = 45$. З рівняння $\frac{(60+M)^2}{10 \cdot 7 \cdot 4} = 45$ отримаємо $M \approx 52{,}25$ грн, що менше, ніж 75 грн.

Розв'яжемо цю задачу в загальному випадку.

Нехай $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, ціни благ, відповідно, – p_1 і p_2, а дохід – I. За формулами (7.4.60) функції попиту у цьому випадку мають вигляд

$$x_1 = \frac{I}{2p_1}, \;\; x_2 = \frac{I}{2p_2}.$$

Обчислимо $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2}$; $\frac{\partial x_i}{\partial I} = \frac{1}{2p_i}$; $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0$.

Нехай ціну p_1 збільшили у z разів, $z > 1$, а споживач отримав необхідну компенсацію. Позначимо новий дохід через $\bar{I}$, попит – $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Очевидно, що $\bar{x}_1 = \frac{\bar{I}}{2zp_1}$; $\bar{x}_2 = \frac{\bar{I}}{2p_2}$. З умови компенсації $\frac{\bar{I}^2}{4zp_1p_2} = \frac{I^2}{4p_1p_2}$ отримаємо $\bar{I} = \sqrt{z} \cdot I$; $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z}}$; $\bar{x}_2 = x_2 \cdot \sqrt{z}$.

Отже, у випадку компенсації попит на перший товар зменшиться у $\sqrt{z}$ разів, а не у z разів, якби компенсації не було. У цьому випадку попит на другий товар збільшиться в $\sqrt{z}$ разів. Якщо ціну p_2 збільшити у z разів, то отримаємо аналогічні наслідки. Отже, $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} > 0$, для $i = 1$, $j = 2$, або $i = 2$, $j = 1$.

Індекс comp означає, що частинну похідну $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ обчислюють за необхідної для підтримки попереднього рівня добробуту компенсації доходу. Умова компенсації знімає ефект доходу, залишаючи лише ефект заміни. Це дає змогу точніше визначити поняття взаємної замінності та взаємної доповнюваності благ і оцінити ці характеристики.

Блага i та j називають *взаємно замінними*, якщо

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} > 0 \;\text{ і }\; \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} > 0,$$

та *взаємно доповнюваними*, якщо

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} < 0 \;\text{ і }\; \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} < 0.$$

Обчислимо ці частинні похідні у випадку, коли p_1 зросте у $\sqrt{z}$ разів. У цьому випадку приріст $\Delta x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z}} - x_1$; $\Delta x_2 = x_2\sqrt{z} - x_2$; $\Delta p_1 = zp_1 - \sqrt{z}p_1$. Тому

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\text{comp}} = \lim_{z\to 1}\frac{x_1\left(1-\sqrt{z}\right)}{p_1\sqrt{z}\,(z-1)} = -\lim_{z\to 1}\frac{x_1}{p_1\sqrt{z}\left(1+\sqrt{z}\right)} = -\frac{x_1\cdot p_1}{2} = -\frac{I}{4p_1^2};$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{\text{comp}} = \lim_{z\to 1}\frac{x_2\left(\sqrt{z}-1\right)}{p_1\sqrt{z}\,(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{x_2}{p_1\sqrt{z}\left(1+\sqrt{z}\right)} = -\frac{x_2}{2\cdot p_1} = \frac{I}{4p_1 p_2}.$$

Оскільки $\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{\text{comp}} > 0,$ то у цій задачі блага x_1 та x_2 взаємно замінні.

Задачі для самостійного розв'язування

7.4.1. Виробнича функція $z = f(x, y)$ описує залежність обсягу виробництва від витрат праці *x* та капіталу *y*. Знайти: а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників *x* та *y*; б) еластичність функції за кожним із чинників; коефіцієнти еластичності для $x = 1,\ \ y = 1,$ якщо:

$$1)\ z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y;\ 2)\ z = \ln\left(x^3 + 2y^3\right);\ 3)\ z = e^{xy}.$$

7.4.2. Річні видатки підприємства описує функція

$$f(x, y) = a + b_1 x + b_2 y + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{y}.$$

Обчислити значення *x* та *y*, за яких видатки найменші, і коефіцієнти еластичності для $x = 1,\ \ y = 1,$ якщо $a = 1,\ b_1 = 9,\ b_2 = 64,\ C_1 = 36,\ C_2 = 4.$

7.4.3. Річні видатки підприємства описує функція

$$f(x, y) = a + b(x + y) + \frac{C}{x + y} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{y}.$$

Обчислити значення *x* та *y*, за яких видатки найменші, і коефіцієнти еластичності для $x = 1,\ \ y = 1,$ якщо $a = 20,\ b = 12,\ C = 72,\ C_1 = 4,\ C_2 = 16.$

7.4.4. Обчислити значення розміру ресурсів *x* та *y*, за яких виробник отримає найбільший прибуток, якщо задано виробничу функцію $K(x, y)$ і ціни p_1 та p_2 за одиницю кожного ресурсу за таких умов:

$$K(x, y) = 30\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y},\ \ p_1 = 4,\ \ p_2 = \frac{1}{48}.$$

7.4.5. Функція корисності має вигляд $U = \ln(x-1) + 0{,}25\ln(y-2),$ де *x*, *y* – кількості набутих одиниць першого та другого блага. Знайти часткові еластичності функції корисності.

7.4.6. Функція корисності має вигляд $U(x,y)=\ln x+\ln 2y$, де x, y – кількості набутих одиниць першого та другого блага. Одиниця першого блага коштує 2 грн, другого – 3 грн. На набуття цих благ планують витратити 100 грн. Як потрібно розподілити цю суму, щоб корисність була найбільшою?

7.4.7. Загальні витрати виробництва описує функція

$$TC=0{,}5x^2+0{,}6xy+0{,}4y^2+700x+600y+2000,$$

де x і y – кількість товарів A та B. Разом потрібно випустити 500 штук продукції. Скільки штук кожного товару треба виробити, щоб затрати на виробництво були найменші?