2.6. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Ми познайомились із двома класами випадкових величин: дискретними та неперервними випадковими величинами, вивчили їхні властивості та числові характеристики. Розглянемо найважливіші розподіли випадкових величин.

1**.** ***Біноміальний розподіл.*** Нехай в однакових умовах проводиться n незалежних спостережень, в кожному з яких може відбутись подія A з ймовірністю p $(0 < p < 1)$, або подія $\overline{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$.

У кожній серії з n спостережень подія A може або не відбутись, або відбутись 1 раз, 2 рази, . . . n разів. Дискретна випадкова величина ξ — кількість появ події A при n незалежних спостереженнях може набувати значень 0, 1, 2, . . . , n з ймовірностями, які обчислюються за формулою Бернуллі

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

називається ***біноміально розподіленою***.

Випадкову величину можна записати сумою n незалежних випадкових величин

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Кожна з випадкових величин цієї суми набуває двох значень: 1, якщо подія A відбулась і 0, якщо відбулась подія $\overline{A}$

$$P(\xi_i = 1) = p; \quad P(\xi_i = 0) = q.$$

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію цих випадкових величин

$$M\xi_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p; \quad D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Математичне сподівання і дисперсію біноміально розподіленої випадкової величини знайдемо враховуючи властивості математичного сподівання і дисперсії суми незалежних випадкових величин

$$M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = np;$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n = npq.$$

2**.** ***Розподіл Пуассона.*** Нехай аналогічно як і у попередньому пункті в однакових умовах проводиться n незалежних спостережень, в кожному з яких може відбутись подія A з ймовірністю p $(0 < p < 1)$, або подія $\overline{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$.

Розглянемо випадок, коли p — достатньо мале, а n — достатньо велике число і добуток np є сталим. Тоді ймовірність того, що в цих припущеннях подія A відбудеться k разів наближено обчислюється за формулою Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Дискретна випадкова величина ξ — кількість появ події A при n незалежних спостереженнях може набувати значень 0, 1, 2, ... , n ... з ймовірностями, які обчислюються за формулою Пуассона називається ***розподіленою за законом Пуассона***. Числові характеристики розподілу Пуассона: $M\xi = \lambda; \quad D\xi = \lambda.$

Закон розподілу Пуассона — це закон розподілу ймовірностей масових рідкісних подій. Його використовують у задачах статистичного контролю якості, теорії надійності, теорії масового обслуговування.

3*.* ***Геометричний закон розподілу***. Випадкову величину ξ називають розподіленою за ***геометричним законом***, якщо вона набуває значень 1, 2, … , *n*, … з ймовірностями, які обчислюються за формулами

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Математичне сподівання геометричного розподілу $M\xi = \frac{1}{p}$; дисперсія — $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$.

4. ***Гіпергеометричний закон розподілу випадкових величин.*** Дискретна випадкова величина має ***гіпергеометричний закон розподілу*** з параметрами n_1, n_2, $n \le n_1 + n_2$, де n_1, n_2, n — натуральні числа, якщо вона набуває натуральних значень $k_1, k_1+1, \dots, k_2$ з ймовірностями, які обчислюються так:

$$P(\xi = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^k}, \quad k_1 \le k \le k_2, \quad k_1 = \max(0, n-n_2), \quad k_2 = \min(n_1, n).$$

Приклад 1. На контроль надійшла партія деталей з цеху. Відомо, що 5% деталей не відповідає стандарту. Випадково взяли чотири деталі. Написати закон розподілу випадкової величини — кількості нестандартних деталей з чотирьох вибраних. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та моду розподілу.

Випадкова величина — біноміально розподілена з параметрами *n* = 4, *p*=0,05. Знайдемо ймовірності, з якими вона набуває значення 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(\xi = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}95^4 = 0{,}81450625;$$

$$P(\xi = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^3 = 0{,}171475;$$

$$P(\xi = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^2 = 6 \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}9025 = 0{,}0135375;$$

$$P(\xi = 3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^1 = 4 \cdot 0{,}000125 \cdot 0{,}95 = 0{,}000475;$$

$$P(\xi = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^0 = 0{,}00000625.$$

ξ	0	1	2	3	4
p	0,81450625	0,171475	0,0135375	0,000475	0,00000625

Числові характеристики

$$M\xi = np = 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}2; \quad D\xi = npq = 4 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}19; \quad \sigma\xi \approx 0{,}436; \quad Mo\xi = 0. \triangleright$$

Приклад 2. У деякому населеному пункті є 0,1% хворих на цукровий діабет. Навмання вибирають 1000 мешканців. Написати закон розподілу випадкової величини — числа хворих, яких буде виявлено серед навмання вибраних 1000 мешканців та обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та моду розподілу.

◃ Випадкова величина набуває значень 0, 1, 2, … з ймовірностями, які обчислюють за законом Пуассона. У даному випадку n = 1000, p = 0,001. Тому

$$P(\xi=0)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}=\frac{1}{e}=0{,}3678797, \quad \lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1.$$

$$P(\xi=1)=\frac{1^1}{1!}e^{-1}=\frac{1}{e}=0{,}3678797,$$

$$P(\xi=2)=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2e}=0{,}1839398,$$

$$P(\xi=3)=\frac{1^3}{3!}e^{-1}=\frac{1}{6e}=0{,}0613133,$$

$$\dots$$

$$P(\xi=k)=\frac{1^k}{k!}e^{-1}=\frac{1}{k!e}.$$

Отже, закон розподілу буде таким

ξ	0	1	2	3	. . .	k
p	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{6e}$	. . .	$\frac{1}{k!e}$

Числові характеристики закону розподілу:
$M\xi=\lambda=np=1; \quad D\xi=\lambda=1.$ ▹

Приклад 3. Студент відповів на запитання екзаменаційного білета, проте викладач задав йому додаткові запитання. Викладач припиняє ставити запитання, якщо студент не знає відповіді на поставлене питання. Ймовірність того, що студент не відповість на поставлене запитання дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини — числа додаткових питань, які поставить викладач студентові.

◃ Нехай p = 0,2 — ймовірність того, що студент не відповість на задане запитання, q = 1– p =0,8 — ймовірність того, що він відповість.

Випадкова величина набуде значення 1 (викладач задасть лише одне запитання) з ймовірністю 0,8; значення 2 (викладач задасть два запитання) з ймовірністю $0{,}2\cdot 0{,}8^2=0{,}128$; і так далі

$$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}=0{,}2\cdot 0{,}8^{k-1},$$

тобто, випадкова величина має геометричний розподіл.

Приклад 4. В урні, що містить чотири білих і шість чорних куль, випадково і без повернення вийняли три кулі. Дискретна випадкова величина ξ — кількість білих куль у вибірці. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, моду випадкової величини.

◃ Випадкова величина – кількість білих куль серед трьох вибраних, набуває значення 0, 1, 2, 3 з ймовірностями

$$P(\xi=k)=\frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3}, \quad k=0,1,2,3,$$

тобто, має гіпергеометричний розподіл.

Знайдемо ймовірності

$$P(\xi=0)=\frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{\frac{6!}{3!\cdot 3!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}}=\frac{6!\cdot 7!}{3!\cdot 10!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{6};$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}}=\frac{6!\cdot 7!}{2!\cdot 4!\cdot 10!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{2};$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}}=\frac{6!\cdot 7!}{2!\cdot 4!\cdot 10!}=\frac{6\cdot 6\cdot 6}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{3}{10};$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{6!}{0!\cdot 6!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}}=\frac{4\cdot 6}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{30}.$$

Отож, закон розподілу

ξ	0	1	2	3
p	1/6	1/2	3/10	1/30

Математичне сподівання

$$M\xi=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{30}=1{,}2.$$

Дисперсія

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{30}-(1{,}2)^2=2-1{,}44=0{,}56.$$

Мода випадкової величини

$Mo\xi=1.$ ▷

2.7. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

1**.** ***Рівномірний розподіл***. Випадкова величина ξ називається рівномірно розподіленою на відрізку $[a;\, b]$, якщо щільність розподілу ймовірностей цієї величини є сталою C на цьому відрізку і дорівнює нулю зовні цього відрізка, тобто

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Величина сталої C визначається умовою нормування

$$P(a\le\xi\le b)=C(b-a)=1.$$

Знайдемо функцію розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини

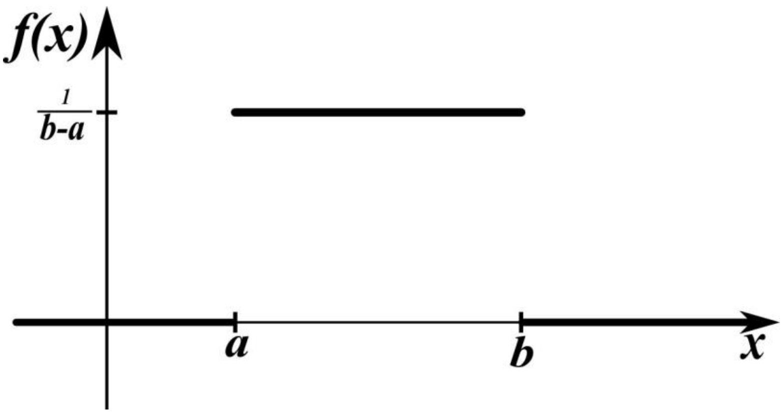

Рис.18

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx, & x\le a,\\ \int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx, & a<x\le b,\\ \int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{b-a}dx+\int_{-\infty}^{x}0dx, & x>b,\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

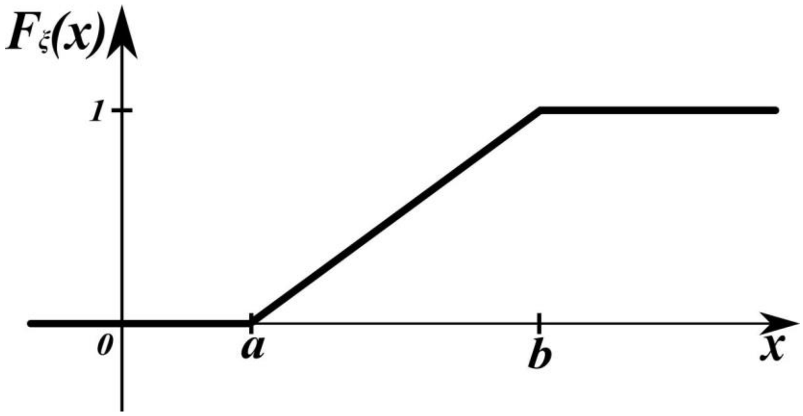

Рис. 19

Для випадкової величини ξ , рівномірно розподіленої на відрізку [a; b], знайдемо ймовірність належності інтервалу $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

тобто пропорційна довжині інтервалу.

Обчислимо математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a}x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}x\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}x\cdot 0dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

Аналогічно можна показати (зробити це самостійно), що дисперсія

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Рівномірний розподіл використовують для аналізу похибок різноманітних розрахунків.

2. ***Показниковий розподіл.*** Випадкова величина ξ називається розподіленою за показниковим законом, якщо щільність її розподілу записується так:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \alpha > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

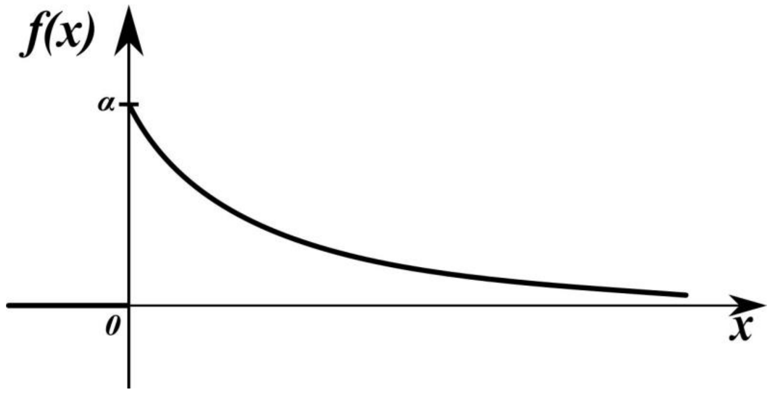

Рис. 20

Знайдемо функцію показникового розподілу

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx, & x \le 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha x}dx, & x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ -e^{-\alpha x}\Big|_0^x, & x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0. \end{cases}$$

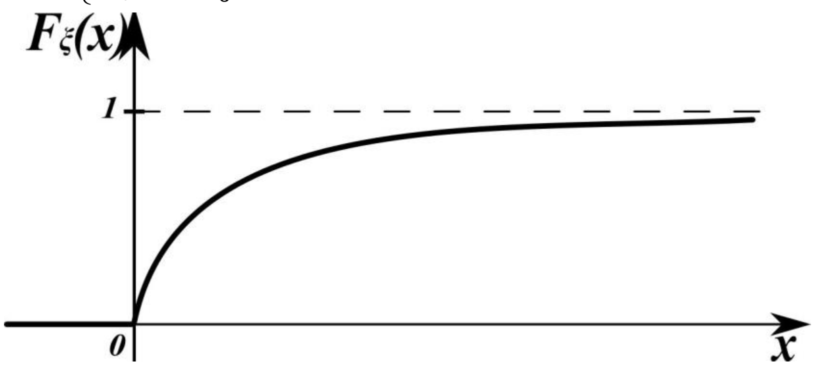

Рис. 21

Для випадкової величини ξ, розподіленої за показниковим законом, знайдемо ймовірність належності інтервалу $(a; b) \subset (0; +\infty)$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x}dx = -e^{-\alpha x}\Big|_a^b = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}.$$

Обчислимо математичне сподівання випадкової величини ξ

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot\alpha e^{-\alpha x}dx=\begin{cases}u=x; & dv=\alpha e^{-\alpha x}dx;\\ du=dx; & v=e^{-\alpha x}\end{cases}=$$

$$=x\cdot e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}.$$

Аналогічно, двічі інтегруючи частинами, можна обчислити (зробити це самостійно), дисперсію ξ

$$D\xi=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Показниковий розподіл мають час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера тощо.

3***. Нормальний розподіл.*** Розподіл неперервної випадкової величини зі щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad \forall x\in R$$

називається *нормальним розподілом* або *розподілом Гауса.*
Графік щільності розподілу називають *нормальною кривою* або *кривою Гауса*.

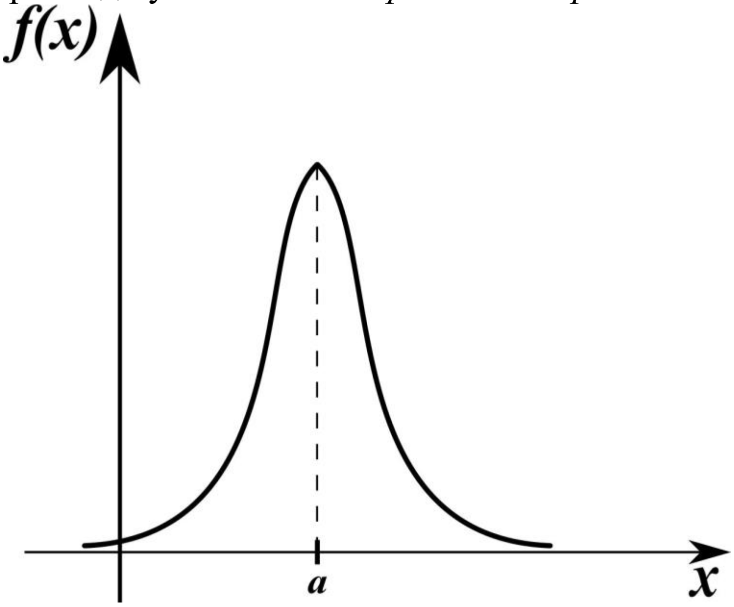

Рис. 22

Обчислимо математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини ξ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left\{\begin{matrix} t=\frac{x-a}{\sigma}; \\ dx=\sigma dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right) =$$

$$= a - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = a.$$

При обчисленні математичного сподівання був використаний інтеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}.$$

Отже параметр a нормального розподілу дорівнює математичному сподіванню.

Аналогічно можна знайти дисперсію нормального розподілу

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left\{\begin{matrix} t=\frac{x-a}{\sigma}; \\ dx=\sigma dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot te^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u=t; & dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt; \\ du=dt; & v=-e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

Отже, $D\xi = \sigma^2$.

Для нормально розподіленої випадкової величини ξ знайдемо ймовірність належності інтервалу $(\alpha;\beta)$

$$P(\alpha<\xi<\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left\{\begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma}=t; & x=\alpha\Rightarrow t=\frac{\alpha-a}{\sigma} \\ dx=\sigma dt; & x=\beta\Rightarrow t=\frac{\beta-a}{\sigma} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функція Лапласа.

Отже,

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Знайдемо ймовірність того, що модуль відхилення нормально розподіленої випадкової величини ξ від її математичного сподівання менший за додатне число δ

$$P(|\xi - a| < \delta) = P(a - \delta < \xi < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В останній формулі покладемо $\delta = 3\sigma$

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

Звідси слідує ***правило трьох сигм***: якщо випадкова величина має нормальний розподіл, то модуль її відхилення від математичного сподівання не більший потроєного середньо квадратичного відхилення.

Мода і медіана нормального розподілу дорівнюють математичному сподіванню.

4. Розподіл «хі квадрат» (χ^2). Нехай випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні нормовані нормально розподілені випадкові величини $(M\xi_i = 0; \quad D\xi_i = 1 \quad i = \overline{1, n})$.

Випадкова величина $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ називається розподіленою за законом ***«хі квадрат»*** із n ступенями вільності.

Якщо величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини $\left(M\xi_i = a; \quad D\xi_i = \sigma^2, \quad i = \overline{1, n}\right)$, то тоді випадкові величини $\eta_i = \dfrac{\xi_i - a}{\sigma}$ нормовані $(M\eta_i = 0; \quad D\eta_i = 1, \quad i = \overline{1, n})$.

У цьому випадку випадкова величина

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i - a}{\sigma}\right)^2$$

має χ^2 – розподіл з n ступенями вільності.

5. Розподіл Стьюдента. Нехай $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні нормовані нормально розподілені випадкові величини $(M\xi_i = 0; \quad D\xi_i = 1 \quad i = \overline{0, n})$.

Випадкова величина

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}$$

називається розподіленою за ***законом Стьюдента з n ступенями вільності***.

Зокрема, якщо $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини $\left(M\xi_i = a; \quad D\xi_i = \sigma^2, \quad i = \overline{0, n}\right)$, тоді випадкова величина

$$t=\frac{\xi_0-a}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-a\right)^2}}$$

має розподіл Стьюдента з n ступенями вільності.

6. Розподіл Фішера. Нехай задана послідовність незалежних нормованих нормально розподілених випадкових величин

$$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_1},\xi_{n_1+1},\ldots,\xi_{n_1+n_2}\quad\left(M\xi_i=0;\quad D\xi_i=1\quad i=\overline{1,n_1+n_2}\right).$$

Тоді випадкова величина

$$F=\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\xi_i^2}$$

має ***розподіл Фішера з*** n_1 ***та*** n_2 ***ступенями вільності***.

Нехай задана послідовність незалежних нормально розподілених випадкових величин

$$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_1},\xi_{n_1+1},\ldots,\xi_{n_1+n_2}\quad\left(M\xi_i=a;\quad D\xi_i=\sigma^2,\quad i=\overline{1,n_1+n_2}\right)$$

Випадкова величина

$$F=\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(\xi_i-a)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(\xi_i-a\right)^2}$$

має розподіл Фішера з n_1 та n_2 ступенями вільності.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що час обслуговування клієнта в банку належить проміжку [a, b], якщо до моменту часу a його не обслуговували.

⊲За означенням умовної ймовірності

$$P((a\le\xi\le b)/(\xi\ge a))=\frac{P((a\le\xi\le b)\cap(\xi\ge a))}{P(\xi\ge a)}=\frac{P(a\le\xi\le b)}{P(\xi\ge a)}=\frac{F_\xi(b)-F_\xi(a)}{1-F_\xi(a)}=$$

$$=\frac{1-e^{-\alpha b}-\left(1-e^{-\alpha a}\right)}{1-\left(1-e^{-\alpha a}\right)}=\frac{e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}}{e^{-\alpha a}}=1-e^{-\alpha(b-a)}=F_\xi(b-a).$$

Тобто, шукана ймовірність не залежить від того, коли почалось обслуговування, а від його тривалості. ⊳

Приклад 2. Деталь, виготовлена автоматом, вважається стандартною, якщо відхилення її контрольованого розміру від номіналу не перевищує 10мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від номіналу мають нормальний розподіл з параметрами $M\xi=0;\sigma\xi=5.$ Скільки відсотків стандартних деталей випускає автомат?

◁ Використаємо формулу $P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ при $a = 0; \sigma = 5; \delta = 10$

$P\left(\left|\xi\right| < 10\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$

Це означає, що автомат виготовляє 95% стандартних деталей. ▷