2.5. Багатовимірні випадкові величини

Нехай на просторі елементарних подій Ω визначені випадкові величини $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n = \xi_n(\omega), \ \omega \in \Omega$. Кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ можна поставити у відповідність ***n* – *вимірну випадкову величину*** (***випадковий вектор***)

$$\xi(\omega) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{2.21}$$

Функцією розподілу n – вимірного випадкового вектора або функцією спільного розподілу випадкових величин $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називають функцію дійсних змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яку визначають як ймовірність спільного виконання n нерівностей $\xi_i < x_i$

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1 \cap \xi_2 < x_2 \cap \ldots \cap \xi_n < x_n). \tag{2.22}$$

Зокрема для спільного розподілу двох випадкових величин $\xi, \ \eta$

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\xi < x \cap \eta < y). \tag{2.23}$$

Властивості функції розподілу

Функція розподілу випадкового вектора має всі властивості функції розподілу одного аргументу, а саме:

1) $0 \le F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\xi < x \cap \eta < y) \le 1$;

2) $F_{\xi,\eta}(-\infty, y) = F_{\xi,\eta}(x, -\infty) = 0$;

3) $F_{\xi,\eta}(+\infty, +\infty) = 1$;

4) $F_{\xi,\eta}(x, y)$ — неспадна функція своїх аргументів;

5) $F_{\xi,\eta}(x, y)$ — неперервна зліва по кожному із своїх аргументів, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F_{\xi,\eta}(x_1, y) \le F_{\xi,\eta}(x_2, y)$; аналогічно для y;

6) $F_{\xi,\eta}(+\infty, y) = F_\eta(y); \quad F_{\xi,\eta}(x, +\infty) = F_\xi(x)$.

З останньої властивості випливає, що функції розподілу окремих компонент двовимірного випадкового вектора можуть бути знайдені граничним переходом із функції спільного розподілу цих компонент.

Випадковий вектор (ξ, η) називають ***дискретним***, якщо кожна з його компонент є дискретною випадковою величиною.

Законом розподілу дискретного випадкового вектора називають відповідність між можливими значеннями випадкового вектора та їхніми ймовірностями

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1. \tag{2.24}$$

Якщо дискретний випадковий вектор приймає скінченну множину значень, то закон розподілу цього вектора можна задати таблицею:

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Одновимірні закони розподілу окремих компонент дискретного випадкового вектора можна визначити через ймовірності спільних значень p_{ij} за формулами

$$P(\xi = x_i) = \sum_j P(\xi = x_i \cap \eta = y_j) = \sum_j p_{ij} = p_i. \qquad (2.25)$$

Аналогічно

$$P(\eta = y_j) = \sum_i P(\xi = x_i \cap \eta = y_j) = \sum_i p_{ij} = q_j. \qquad (2.26)$$

Випадковий вектор (ξ, η) називають неперервним випадковим вектором, якщо функція розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$ неперервна на всій площині xOy й існує така невід'ємна інтегрована за кожною координатою функція $f(x, y)$, яка називається ***щільністю розподілу*** ймовірностей випадкового вектора (ξ, η), що

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv.$$

Властивості щільності розподілу

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv = 1;$

2) $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$ в точках неперервності щільності розподілу $f(x, y)$;

3) щільності розподілу ймовірностей компонент випадкового вектора виражають через інтеграли від спільної щільності

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv; \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du.$$

Якщо для випадкового вектора (ξ, η) існує функція розподілу $F_{\xi,\eta}(x, y)$, то функції розподілу для окремих компонент цього вектора обчислюються за формулами:

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y)$$

Незалежні випадкові величини

Випадкові величини ξ та η називають ***незалежними***, якщо

$$P(\xi < x \cap \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y) \quad \forall (x,\, y). \qquad (2.27)$$

Випадкові величини ξ та η незалежні тоді і лише тоді, коли функція розподілу двовимірної випадкової величини дорівнює добутку функцій розподілу компонент

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y). \qquad (2.28)$$

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, L, P) задані випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Випадкові величини ξ_i називають ***незалежними в сукупності***, якщо для довільної системи $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}$ цих величин виконується рівність

$$P(\xi_{i_{1P}} < x_{i_1} \cap \xi_{i_2} < x_{i_2} \cap \ldots \cap \xi_{i_k} < x_{i_k}) = P(\xi_{i_1} < x_{i_1})P(\xi_{i_2} < x_{i_2})\ldots P(\xi_{i_k} < x_{i_k}),$$

де $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ — довільні дійсні числа.

Необхідна і достатня умова незалежності випадкових величин

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_{i_1})F_{\xi_2}(x_{i_2})\ldots F_{\xi_{i_k}}(x_{i_k}).$$

Коваріація випадкових величин. Коефіцієнт кореляції

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, L, P) задані дві випадкові величини ξ та η.

Коваріацією (кореляційним моментом) двох випадкових величин ξ та η називають математичне сподівання добутку їхніх відхилень від відповідних математичних сподівань

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)). \qquad (2.29)$$

Властивості коваріації

1) $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$;

2) $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D(\xi)$;

3) Для довільних випадкових величин ξ та η: $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$;

◃ Використовуючи властивості математичного сподівання, матимемо

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = M(\xi - M\xi)^2 +$$
$$+ 2M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) + M(\eta - M\eta)^2 = D(\xi) + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta) + D(\eta). \ ▹$$

4) Коваріація випадкових величин дорівнює різниці математичного сподівання добутку цих випадкових величин і добутку їхніх математичних сподівань

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \qquad (2.30)$$

◃ З означення коваріації

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi \cdot \eta - \xi \cdot M\eta - \eta \cdot M\xi + M\xi \cdot M\eta) =$$
$$= M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta - M\eta \cdot M\xi + M\xi \cdot M\eta = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta. ▹$$

5) Якщо для довільних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ існують коваріації $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma_{ij}$, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі, то

$$D(C_1\xi_1 + C_2\ \xi_2 + \ldots + C_n\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_i C_j \sigma_{ij}\ . \qquad (2.31)$$

З формули (2.31) випливає, що визначник

$$\begin{vmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_n) \\ \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{cov}(\xi_n,\xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_n,\xi_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\xi_n,\xi_n) \end{vmatrix} \ge 0$$

Зокрема, при $n = 2$ матимемо

$$|\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)| \le \sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}\ . \qquad (2.32)$$

6) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то їхня коваріація дорівнює нулю

◁Це твердження слідує з формули (2.30) і з того, що математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань. ▷

У випадку, коли (ξ,η) — випадковий вектор дискретного типу із законом розподілу $P\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right) = p_{ij}$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, то

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M\xi)(y_j - M\eta)p_{ij}, \qquad (2.33)$$

або

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, p_{ij} - M\xi \cdot M\eta\ . \qquad (2.34)$$

Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η називається відношення коваріації цих величин до добутку їхніх середніх квадратичних відхилень

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma\xi \cdot \sigma\eta}. \qquad (2.35)$$

Властивості коефіцієнта кореляції

1) $|\rho(\xi,\eta)| \le 1$;

◁ Ця властивість слідує з формули (2.32). ▷

2) Якщо ξ та η — незалежні випадкові величини, то $\rho(\xi,\eta) = 0$; у цьому випадку випадкові величини називають некорельованими;

◁ Ця властивість слідує з властивості 6 коваріації. ▷

3) Якщо ξ та η — лінійно залежні випадкові величини, тобто $\eta = a\xi + b$, де a і b — *const*, то $|\rho(\xi,\eta)| = 1$;

$\triangleleft$

$$|\rho(\xi,\eta)| = \left|\frac{\operatorname{cov}(\xi, a\xi+b)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D(a\xi+b)}}\right| = \left|\frac{M((\xi-M\xi)(a\xi+b-M(a\xi+b)))}{\sqrt{D\xi}\sqrt{a^2D\xi}}\right| = \left|\frac{aM(\xi-M\xi)^2}{|a|D\xi}\right| = 1 \triangleright$$

Приклад 1. Задано закон розподілу випадкового вектора

$\eta \setminus \xi$	-1	1	3	6
-2	0,1	0	0,15	0,05
1	0,2	0,1	0,1	0,15
5	0	0,05	0,05	0,05

Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ та η.

$\triangleleft$ Знайдемо закон розподілу ξ, підсумовуючи ймовірності по стовпцях таблиці

ξ	-1	1	3	6
p	0,3	0,15	0,3	0,25

Обчислимо числові характеристики випадкової величини ξ

1. Математичне сподівання

$M\xi = -1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}15 + 3\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}25 = 2{,}25.$

2. Дисперсія

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = (-1)^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}15 + 3^2\cdot 0{,}3 + 6^2\cdot 0{,}25 - 2{,}25^2 = 7{,}0875.$

3.Середнє квадратичне відхилення

$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{7{,}0875} \approx 2{,}66.$

Підсумовуючи по рядках ймовірності таблиці, знайдемо розподіл η

η	-2	1	5
q	0,3	0,55	0,15

Аналогічно для випадкової величини η

$$M\eta = 0{,}7; \quad D\eta = 5{,}01; \quad \sigma\eta \approx 2{,}24$$

Обчислимо математичне сподівання добутку випадкових величин ξ та η

$$M(\xi\eta) = (-1)\cdot(-2)\cdot 0{,}1 + 1\cdot(-2)\cdot 0 + 3\cdot(-2)\cdot 0{,}15 + 6\cdot(-2)\cdot 0{,}05 + (-1)\cdot 1\cdot 0{,}2 + 1\cdot 1\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 3\cdot 1\cdot 0{,}1 + 6\cdot 1\cdot 0{,}15 + (-1)\cdot 5\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 0{,}05 + 3\cdot 5\cdot 0{,}05 + 6\cdot 5\cdot 0{,}05 = 2{,}3.$$

Тоді

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta = 2{,}3 - 2{,}25\cdot 0{,}7 = 0{,}725.$$

Коефіцієнт кореляції

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma\xi\cdot\sigma\eta} = \frac{0{,}725}{2{,}66\cdot 2{,}24} \approx 0{,}12.$$

Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

Нехай випадковий вектор (ξ,η) заданий законом розподілу

$$P\left(\xi = x_j \cap \eta = y_s\right) = p_{ij}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m; \quad \sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини ξ при фіксованому значенні $\eta = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини ξ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $\eta = y_i$, тобто

$$P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right) = \frac{P\left(\xi = x_j \cap \eta = y_i\right)}{P\left(\eta = y_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{y_i}}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{y_i}} = \frac{1}{p_{y_i}} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \frac{p_{y_i}}{p_{y_i}} = 1.$$

Числові характеристики цього закону розподілу називаються умовними
Умовне математичне сподівання

$$M\left(\xi / \eta = y_i\right) = \sum x_j P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{p_{ij}}{p_{y_i}}, = \frac{1}{p_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij}.$$

Умовна дисперсія

$$D\left(\xi / \eta = y_i\right) = \frac{1}{p_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - \left(M\left(\xi / \eta = y_i\right)\right)^2.$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma\left(\xi / \eta = y_i\right) = \sqrt{D\left(\xi / \eta = y_i\right)}.$$

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини η при фіксованому значенні $\xi = x_j$ називається перелік можливих значень випадкової величини η та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $\xi = x_j$, тобто

$$P\left(\eta = y_i / \xi = x_j\right) = \frac{P\left(\xi = x_j \cap \eta = y_i\right)}{P\left(\xi = x_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{x_j}}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{x_j}} = \frac{1}{p_{x_j}} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \frac{p_{x_j}}{p_{x_j}} = 1.$$

Умовне математичне сподівання

$$M\left(\eta / \xi = x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{p_{ij}}{p_{x_j}}, = \frac{1}{p_{x_j}} \sum_{i=1}^{n} y_i p_{ij}.$$

Умовна дисперсія

$$D\left(\eta / \xi = x_j\right) = \frac{1}{p_{x_{ij}}} \sum_{i=1}^{n} y_j^2 p_{ij} - \left(M\left(\eta / \xi = x_j\right)\right)^2.$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma\left(\eta / \xi = x_j\right) = \sqrt{D\left(\eta / \xi = x_j\right)}.$$

Приклад. Задано двовимірний закон розподілу

$\eta = y_i$ \ $\xi = x_j$	10	20	30	p_{x_j}
– 6	0,02	0,05	0,03	0,1
– 4	0,08	0,15	0,07	0,3
– 2	0,2	0,3	0,1	0,6
p_{y_i}	0,3	0,5	0,2	

Обчислити $M(\xi / \eta = -4)$; $M(\eta / \xi = 30)$; $\sigma(\xi / \eta = -4)$; $M(\eta / \xi = 30)$.

Знаходимо відповідні умовні закони розподілу. Умовний закон розподілу $\xi / \eta = -4$

$\xi = x_j$	10	20	30
$P\left(\xi = x_j / \eta = -4\right) = \dfrac{P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right)}{P(\eta = -4)} = \dfrac{p_{ij}}{0,3}$	$\dfrac{0,08}{0,3}$	$\dfrac{0,15}{0,3}$	$\dfrac{0,07}{0,3}$

Умовне математичне сподівання

$$M(\xi / \eta = -4) = \frac{1}{0,3}(10 \cdot 0,08 + 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,07) = \frac{3,2}{0,3} = 10,7.$$

$$M\left(\xi^2 / \eta = -4\right) = \frac{1}{0,3}(100 \cdot 0,08 + 400 \cdot 0,15 + 900 \cdot 0,07) = \frac{131}{0,3} = \frac{1310}{3}.$$

Дисперсія

$$D(\xi / \eta = -4) = M\left(\xi^2 / \eta = -4\right) - (M(\xi / \eta = -4))^2 = \frac{1310}{3} - \left(\frac{32}{3}\right)^2 = \frac{449}{9}.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(\xi / \eta = -4) = \sqrt{\frac{449}{9}} = 7,1.$$

Умовний закон розподілу $\eta / \xi = 30$

$\eta = y_i$	–6	–4	–2
$P\left(\eta = y_i / \xi = 30\right) = \dfrac{P\left(\xi = x_j / \eta = y_i\right)}{P(\xi = 30)} = \dfrac{p_{ij}}{0,2}$	$\dfrac{0,03}{0,2}$	$\dfrac{0,07}{0,2}$	$\dfrac{0,1}{0,2}$

$$M(\eta / \xi = 30) = \frac{1}{0,2}(-6 \cdot 0,03 - 4 \cdot 0,07 - 2 \cdot 0,1) = \frac{-0,66}{0,2} = -3,3.$$

$$M\left(\eta^2 / \xi = 30\right) = \frac{1}{0,2}(36 \cdot 0,03 + 16 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,1) = \frac{2,6}{0,2} = 13.$$

$$D(\eta / \xi = 30) = M\left(\eta^2 / \xi = 30\right) - (M(\eta / \xi = 30))^2 = 13 - (-3,3)^2 = 2,11.$$

$$\sigma(\eta / \xi = 30) = \sqrt{2,11} = 1,45.$$

Умовні розподіли неперервної двовимірної випадкової величини

Умовним законом розподілу неперервної випадкової величини ξ при умові, що випадкова величина η набуде фіксованого значення $y = y_0$ називається функція від аргументу x, яка визначається формулою

$$f_\xi\left(x / y = y_0\right) = \frac{f\left(x, y_0\right)}{f_\eta\left(y_0\right)}.$$

Умовним законом розподілу неперервної випадкової величини η при умові, що випадкова величина ξ набуде фіксованого значення $x = x_0$ називається функція від аргументу y, яка визначається формулою

$$f_\eta\left(y / x = x_0\right) = \frac{f\left(x_0, y\right)}{f_\xi\left(x_0\right)}.$$

Функції випадкових величин

Нехай ξ — дискретна випадкова величина із законом розподілу

$$P(\xi = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Тоді функція $\eta = g(\xi)$ набуде відповідних значень $y_i = g(x_i)$ з тими ж самими ймовірностями p_i, тобто має закон розподілу

$$P(\eta = y_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Нехай ξ — неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу $f(x)$, а η — випадкова величина, пов'язана з ξ функціональною залежністю $\eta = g(\xi)$, то якщо $f(x)$ — неперервна, а $g(x)$ має неперервну похідну, і $g'(x) > 0$ $\left(g'(x) < 0\right)$ на проміжку можливих значень випадкової величини ξ, тоді щільність випадкової величини η обчислюють за формулою

$$\varphi(y) = f\left(h(y)\right) \cdot \left|h'(y)\right|,$$

де $h(y)$ — обернена функція до функції $g(x)$.

Нехай D — множина можливих пар (x, y) значень двовимірної випадкової величини (ξ, η). Якщо кожній випадковій точці $(x, y) \in D$ за деяким правилом ставиться у відповідність одне певне значення z випадкової величини ζ, то кажуть, що на множині D задана функція двох випадкових величин ξ та η і записують $\zeta = g(\xi, \eta)$.

Приклад 1.Заданий закон розподілу дискретного двовимірного вектора

$\eta = y_i$ \ $\xi = x_j$	0	1	3	5
– 2	0,1	0	0,15	0,05
1	0,2	0,1	0,1	0,15
5	0	0,05	0,05	0,05

Знайти закон розподілу випадкових величин $\zeta = \xi \cdot \eta,\ \vartheta = \xi + \eta$

Знаходимо всі можливі добутки ξ та η і відповідні їм ймовірності

$\zeta = -10,\ \ p(-10) = 0{,}05$; $\zeta = -6,\ p(-6) = 0{,}15$; $\zeta = -2,\ p(-2) = 0$;

$\zeta = 0,\ \ p(0) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3$; $\zeta = 1,\ \ p(1) = 0{,}1$; $\zeta = 3,\ \ p(3) = 0{,}1$;

$\zeta = 5,\ \ p(5) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$; $\zeta = 15,\ \ p(15) = 0{,}05$; $\zeta = 25,\ \ p(25) = 0{,}05$;

Записуємо закон розподілу ζ

ζ	– 10	– 6	– 2	0	1	3	5	15	25
p	0,05	0,15	0	0,3	0,1	0,1	0,2	0,05	0,о5

Користуючись тим же підходом знайдемо розподіл $\vartheta = \xi + \eta$

ϑ	– 2	–1	1	2	3	5	6	8	10
p	0,1	0	0,35	0,1	0,15	0	0,2	0,05	0,05

Якщо задані неперервно розподілені і незалежні випадкові величини ξ_1 та ξ_2 з відповідними щільностями $f_1(x)$ та $f_2(x)$ і функціями розподілу $F_1(x)$ та $F_2(x)$. Тоді для випадкової величини $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ функція розподілу випадкової величини ζ

$$F_\zeta(x) = P(\xi_1 + \xi_2 < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-t)\,d(F_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-t)\,d(F_1(t)),$$

а щільність розподілу випадкової величини ζ

$$f_\zeta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)\,d(F_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t)\,d(F_1(t)).$$

Приклад 2. Нехай ξ_1 та ξ_2 незалежні і рівномірно розподілені на проміжку $[0,\ 1]$ випадкові величини, тобто мають одну і ту ж щільність і функцію розподілу

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,\ 1]; \\ 1, & x \in [0,\ 1]; \end{cases} \qquad F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \in [0,\ 1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

За вище наведеними формулами знайдемо щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi_1 + \xi_2$.

Очевидно, що для $\zeta = \xi_1 + \xi_2 \quad x \in [0,\ 2]$ і $dF_2(t) = f_2(t)dt = \begin{cases} 0, & t \notin [0,\ 1]; \\ dt, & t \in [0,\ 1] \end{cases}$

Легко переконатися, що (див. рис.15)

$$f_\zeta(x) = f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)d(F_2(t)) = \int_0^1 f_1(x-t)dt = \begin{cases} 0, & x \notin [0,\ 2]; \\ x, & x \in [0,\ 1]; \\ 2-x, & x \in [1,\ 2]. \end{cases}$$

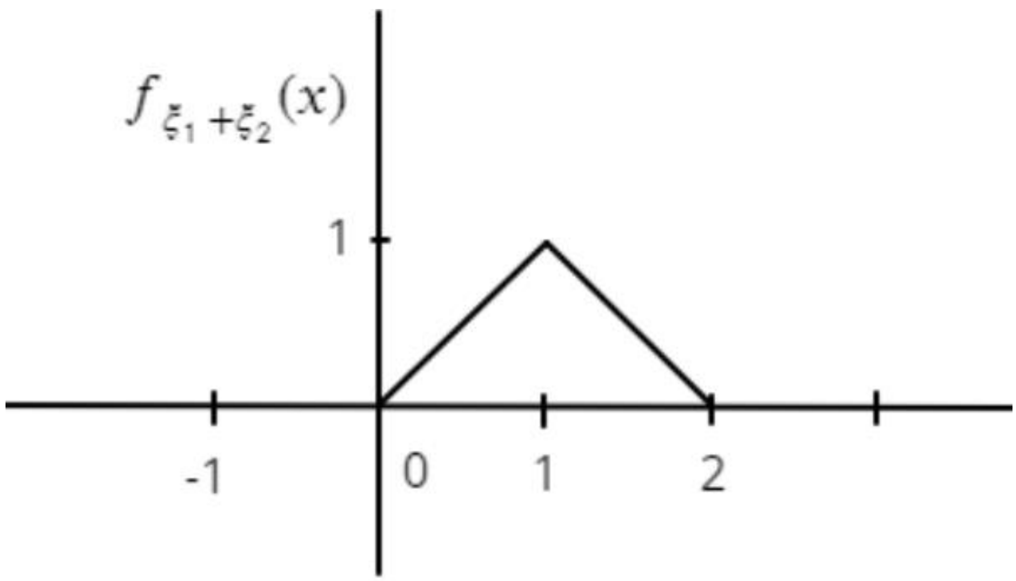


Рис. 15

Геометрично цей інтеграл — це площа перетину прямокутників одиничної висоти з основою, яка є перетином відрізків $[0,\ 1]$ та $[x-1,\ x]$ $(0 \le x - t \le 1, \quad x - 1 \le t \le x)$.

Якщо $x < 0$, то перетин — це порожня множина, при $0 \le x \le 1$ — перетин це відрізок $[0,\ x]$, при $1 \le x \le 2$ — відрізок $[x-1,\ 1]$, при $x > 2$ — порожня множина.

Показати, що

Маючи щільність $f_{\xi_1+\xi_2}(x)$, легко по аналогії знайти щільність $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)$:

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dF_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt =$$

$$=\begin{cases} 0, & x\notin[0,\ 3];\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\in[0,\ 1];\\ 1-\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & x\in[1,\ 2];\\ \dfrac{(3-x)^2}{2}, & x\in[2,\ 3]. \end{cases}$$

Геометрично даний інтеграл дорівнює частині площі трикутника $f_{\xi_1+\xi_2}(t)$, зміщеного у точку x (див. рис. 16), довжина основи якого є перетин відрізків $[0,\ 1]$ та $[x-2,\ x]$ $(0\le x-t\le 2,\quad x-2\le t\le x)$.

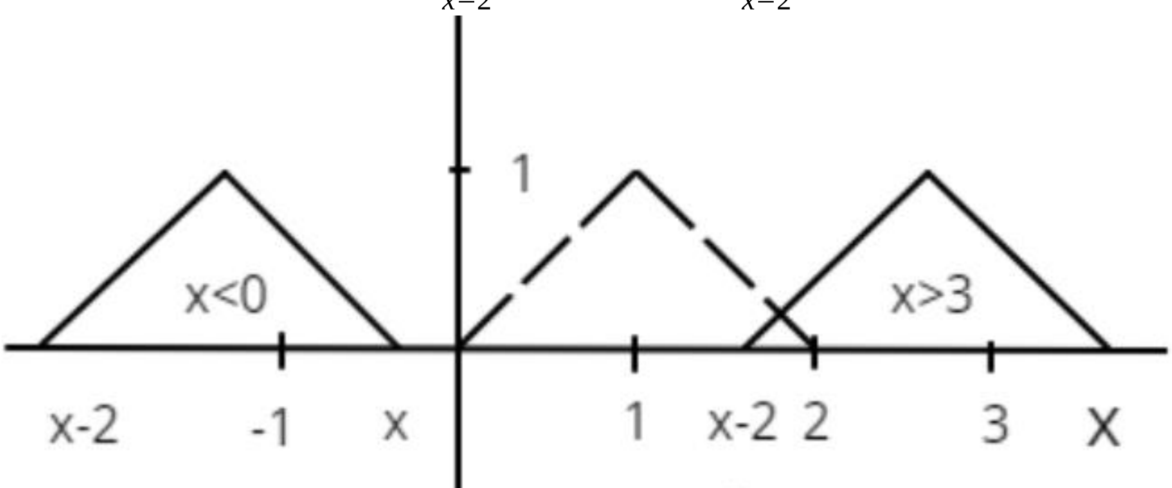
а) $x\notin[0,\ 3]$ — перетин порожня множина;

б) $x\in[0,\ 1]$ $\quad f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)=\int\limits_0^x f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt=\int\limits_0^x (x-t)dt=\dfrac{x^2}{2};$

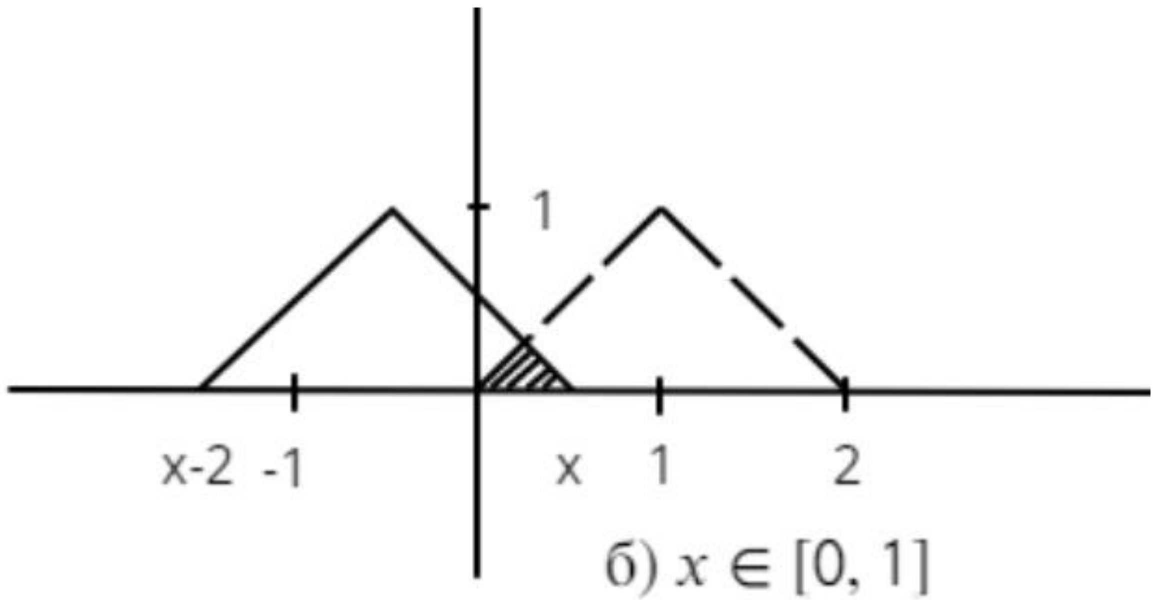
в) $x\in[1,\ 2]$ $\quad f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)=\int\limits_0^1 f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt=\int\limits_0^{x-1}(t+2-x)dt+\int\limits_{x-1}^1 (x-t)dt=$

$=1-\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(2-x)^2}{2};$

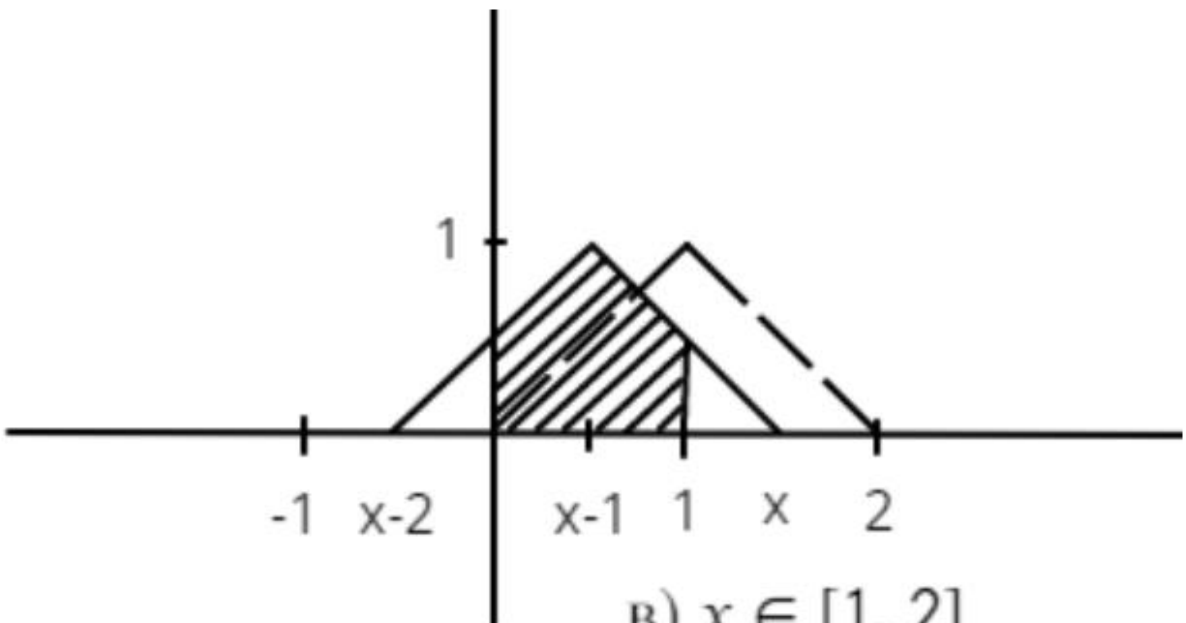
г) $x\in[2,\ 3]$ $\quad f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)=\int\limits_{x-2}^1 f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt=\int\limits_{x-2}^1 (t+2-x)dt=\dfrac{(3-x)^2}{2}.$



$a)\ x\notin[0,\ 3]$



б) $x \in [0, 1]$



в) $x \in [1, 2]$

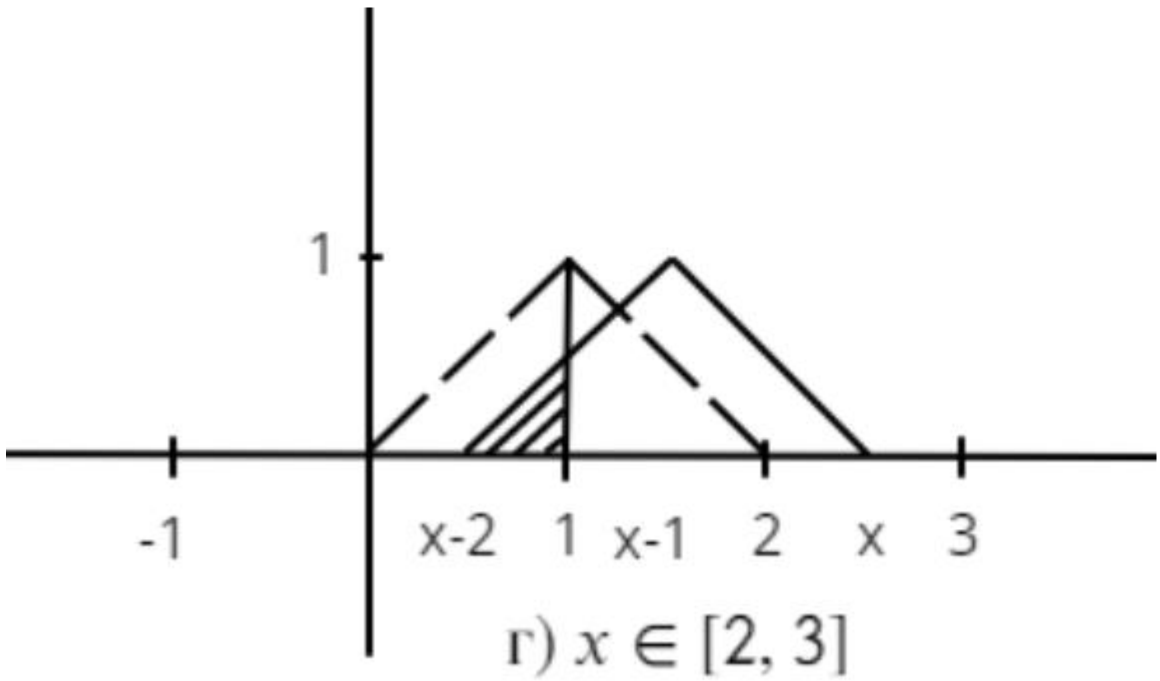


Рис. 16

Для того, щоб знайти функцію розподілу добутку двох неперервних випадкових величин $\zeta = \xi \cdot \eta$ із щільністю розподілу $f_{\xi \cdot \eta}(x, y)$, скористаємось означенням

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = P(\xi \cdot \eta < x) = \iint\limits_{D=\{u \cdot v < x\}} f_{\xi \cdot \eta}(u, v) du dv.$$

Для знаходження інтеграла розглянемо окремо випадок $x > 0$ та $x < 0$. Область інтегрування для обох випадків заштрихована множина $D = \{uv < x, x > 0\}$ — зліва, а множина $D = \{uv < x, x < 0\}$ — справа (див. рис. 17).

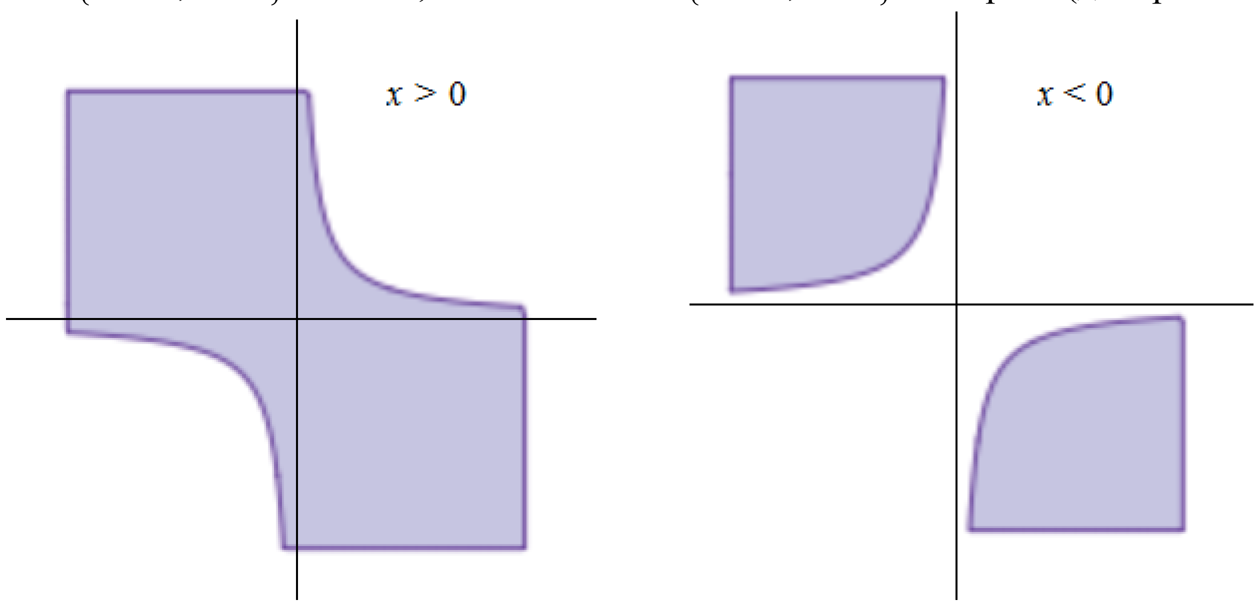


Рис. 17

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\int\limits_{\frac{x}{u}}^{\infty} f_{\xi\cdot\eta}(u,v)\,dv \right) du + \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{u}} f_{\xi\cdot\eta}(u,v)\,dv \right) du, \quad x > 0$$

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\int\limits_{\frac{y}{v}}^{\infty} f_{\xi\cdot\eta}(u,v)\,du \right) dv + \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{y}{v}} f_{\xi\cdot\eta}(u,v)\,du \right) dv, \quad x > 0\,.$$