2.4. Числові характеристики випадкових величин.

Під числовими характеристиками випадкової величини розуміють параметри, які характеризують істотні ознаки випадкової величини.

Математичне сподівання випадкової величини

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини заданої законом розподілу $P(\xi = x_i) = p_i$ $\left(\sum_i p_i = 1\right)$ називають суму добутків значень випадкової величини та відповідних ймовірностей

$$M\xi = \sum_i x_i p_i, \tag{2.8}$$

за умови, що ряд (2.8) абсолютно збіжний.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини зі щільністю розподілу $f(x)$ називають величину

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \tag{2.9}$$

за умови, що інтеграл (2.9) абсолютно збіжний.

З ймовірнісної точки зору математичне сподівання характеризує біля якої величини коливається середнє значення випадкової величини, одержане в результаті спостережень.

Властивості математичного сподівання.

1) Математичне сподівання сталої дорівнює сталій.

$\lhd$ Сталу можна розглядати як випадкову величину, яка приймає одне значення $\xi = C$ з ймовірністю $p = 1$. Тоді $MC = C \cdot 1 = C.$ $\rhd$

2) Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання.

$$M(C\xi) = CM\xi .$$

$$\lhd M(C\xi) = \sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CM\xi. \rhd$$

3) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta .$$

$\lhd$ Для простоти доведення проведемо для незалежних дискретних випадкових величин із законами розподілу

$$P(\xi = x_i) = p_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right) \text{ та } P(\eta = y_j) = q_j \quad \left(\sum_{j=1}^{m} q_j = 1\right). \tag{2.10}$$

Тоді

$$M(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)P(\xi = x_i \cap \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_i q_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_i q_j=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\sum_{j=1}^{m}q_j+\sum_{j=1}^{m}y_j q_j\sum_{i=1}^{n}p_i=M\xi+M\eta.\triangleright$$

4) Математичне сподівання різниці випадкових величин дорівнює різниці їхніх математичних сподівань

$$M(\xi-\eta)=M\xi-M\eta.$$

$\triangleleft$ Скористаємось властивостями 2 і 3

$$M(\xi-\eta)=M(\xi+(-1)\eta)=M\xi+M((-1)\eta)=M\xi+(-1)M\eta=M\xi-M\eta.\triangleright$$

5) Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань

$$M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta.$$

$\triangleleft$ Нехай маємо дві дискретні випадкові величини, розподілені за законами (2.10). Тоді

$$M(\xi\cdot\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i\cdot y_j)P(\xi=x_i\cap\eta=y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i\cdot y_j)P(\xi=x_i)P(\eta=y_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_i q_j=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\sum_{j=1}^{m}y_j q_j=M\xi\cdot M\eta.\triangleright$$

Мода та медіана випадкової величини

Модою дискретної випадкової величини заданої законом розподілу $P(\xi=x_i)=p_i$ $\left(\sum_i p_i=1\right)$ називається те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність його появи, тобто $P(\xi=Mo)=\max_i P(\xi=x_i)$.

Отож, мода дискретної випадкової величини — це найімовірніше її значення.

Модою неперервної випадкової величини називається те її можливе значення, якому відповідає точка максимуму щільності розподілу ймовірностей.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають ***одномодальним***, якщо розподіл має дві моди — ***двомодальним***, якщо розподіл не має моди, то його називають ***антимодальним.***

Медіаною неперервної випадкової величини називається те її можливе значення, для якого виконується рівність ймовірностей подій:

$$P(-\infty<\xi<Me)=P(Me\le\xi<+\infty)\quad\text{або}\quad F(Me)=\frac{1}{2}\qquad(2.11)$$

З геометричної точки зору медіана — це таке значення випадкової величини, що пряма $x=Me$, поділяє площу фігури, обмеженої графіком щільності розподілу $f(x)$ та віссю абсцис, на дві рівні частини.

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Математичне сподівання випадкової величини не дає достатньо повної інформації про випадкову величину.

Випадкові величини мають тенденцію до коливання відносно математичного сподівання, тому його називають ще ***центром розсіювання***. Для вимірювання розсіювання вводять числову характеристику, яку називають ***дисперсією***.

Відхиленням випадкової величини називається різниця $\xi - M\xi$. Математичне сподівання відхилення дорівнює нулю. Справді,

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0.$$

Ось чому відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(\xi) = M(\xi - M\xi)^2. \qquad (2.12)$$

Дисперсія дискретної випадкової величини заданої законом розподілу $P(\xi = x_i) = p_i \quad \left(\sum_i p_i = 1\right)$ обчислюється за формулою

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i\,. \qquad (2.13)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини зі щільністю розподілу $f(x)$ обчислюється за формулою

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx. \qquad (2.14)$$

Властивості дисперсії

1) $D(\xi) \geq 0.$

2) Дисперсія сталої дорівнює нулю $DC = 0, \quad C = const.$

$\triangleleft$ Справді $DC = M(C - MC) = M(C - C) = M(0) = 0.$ $\triangleright$

3) $D(C\xi) = C^2 D(\xi).$

$\triangleleft$ Маємо

$$D(C\xi) = M(C\xi - M(C\xi))^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = M(C(\xi - M\xi))^2 = M\left(C^2(\xi - M\xi)^2\right) =$$
$$= C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi. \ \triangleright$$

4) $D(C_1\xi + C_2) = C_1^2 D(\xi),$ якщо $C_i = const, \ i = 1, 2.$

$\triangleleft$Використаємо властивості математичного сподівання:

$$D(C_1\xi + C_2) = M(C_1\xi + C_2 - M(C_1\xi + C_2))^2 = M(C_1\xi + C_2 - C_1M\xi - C_2)^2 =$$
$$= M(C_1\xi - C_1M\xi)^2 = M(C_2(\xi - M\xi))^2 = M\left(C_1^2(\xi - M\xi)^2\right) = C_1^2 M(\xi - M\xi)^2 = C_1^2 D\xi. \ \triangleright$$

5) Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

$\triangleleft$ Використовуючи властивості 3 – 5 математичного сподівання, матимемо

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta-M(\xi+\eta))^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=M(\xi-M\xi)^2+$$
$$+2M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta))+M(\eta-M\eta)^2=D(\xi)+2M(\xi\eta-\xi M\eta-\eta M\xi+M\xi M\eta)+D(\eta)=$$
$$=D(\xi)+2M\xi M\eta-2M\xi M\eta-2M\xi M\eta+2M\xi M\eta+D(\eta)=D(\xi)+D(\eta).\triangleright$$

6) Дисперсія різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій

$$D(\xi-\eta)=D(\xi)+D(\eta).$$

$\triangleleft$ Ця властивість є наслідком властивостей 3 і 5. Справді

$$D(\xi-\eta)=D(\xi+(-1)\eta)=D\xi+(-1)^2D\eta=D(\xi)+D(\eta).\triangleright$$

7) Дисперсію випадкової величини можна обчислити за формулою:

$$D\xi=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2. \tag{2.15}$$

$\triangleleft$ Як і вище скористаємось властивостями математичного сподівання

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=M\left(\xi^2-2\xi M\xi+(M\xi)^2\right)=M\left(\xi^2\right)-2M\xi M\xi+(M\xi)^2=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2.\triangleright$$

Для дискретної випадкової величини формула (2.15) запишеться так

$$D(\xi)=\sum_i x_i^2p_i-(M\xi)^2. \tag{2.16}$$

Для неперервної

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M\xi)^2. \tag{2.17}$$

Якщо випадкова величина має деякі одиниці вимірювання, то дисперсія, яка характеризує розсіяння випадкової величини навколо математичного сподівання, має ті ж самі одиниці вимірювання, але у квадраті. Ось чому доцільно ввести у розгляд числову характеристику такої ж розмірності.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}. \tag{2.18}$$

Середнє квадратичне відхилення використовують тоді, коли потрібно отримати оцінку розсіяння в тих самих одиницях, в яких виражені значення самої випадкової величини.

Початковим моментом κ – го порядку називається математичне сподівання κ – го степеня випадкової величини

$$\nu_k=M\left(\xi^k\right).$$

Для дискретної та неперервної випадкової величини формули матимуть вигляд відповідно

$$\nu_k=\sum_i x_i^k p_i,\quad \nu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx.$$

Центральним моментом к – го порядку називається математичне сподівання $к$ – го степеня відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k .$$

Запишемо відповідні формули для дискретної і неперервної випадкових величин

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M\xi)^k p_i , \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f(x) dx .$$

Зокрема, $\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = M\xi, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = D\xi.$

Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує симетрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = 0$, то випадкова величина розподілена симетрично відносно $M\xi$. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то за міру відхилення розподілу випадкової величини ξ від симетрії стосовно математичного сподівання (центра розподілу) вводять безрозмірну величину — ***коефіцієнт асиметрії***

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} . \tag{2.19}$$

Центральний момент четвертого порядку характеризує гостроверхість або плосковершинність щільності (многокутника) розподілу ймовірності випадкової величини. Безрозмірна величина

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 . \tag{2.20}$$

Приклад 1. Знайти числові характеристики випадкової величини заданої законом розподілу

ξ	-5	-1	2	6	8	11
p	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2

◃ За формулою (2.8) знайдемо математичне сподівання

$$M\xi = \sum_i x_i p_i = -5 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot 0{,}2 = 3{,}6 .$$

Дисперсію знайдемо за формулою (2.16)

$$D(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i - (M\xi)^2 =$$

$$= (-5)^2 \cdot 0{,}1 + (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}1 + 11^2 \cdot 0{,}2 - 3{,}6^2 = 28{,}04 .$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 5{,}3 .$$

Мода розподілу $Mo = -1.$

Приклад 2. Задана неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|\ge a;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу та побудувати її графік. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду і медіану.

$\triangleleft$ Функцію розподілу неперервної випадкової величини знайдемо за формулою (2.6)

$$F_\xi(x)=P(\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Для $x\le -a$ щільність розподілу $f(x)=0$, тому $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$.

Якщо $-a<x<a$, то

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{-a}0\cdot dt+\int\limits_{-a}^{x}\frac{dt}{\pi\sqrt{a^2-t^2}}=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{t}{a}\Big|_{-a}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin(-1)\right)=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}.$$

Для $x\ge a$

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{-a}0\cdot dt+\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{\pi\sqrt{a^2-t^2}}+\int\limits_{a}^{x}0\cdot dt=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{t}{a}\Big|_{-a}^{a}=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin 1-\arcsin(-1)\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

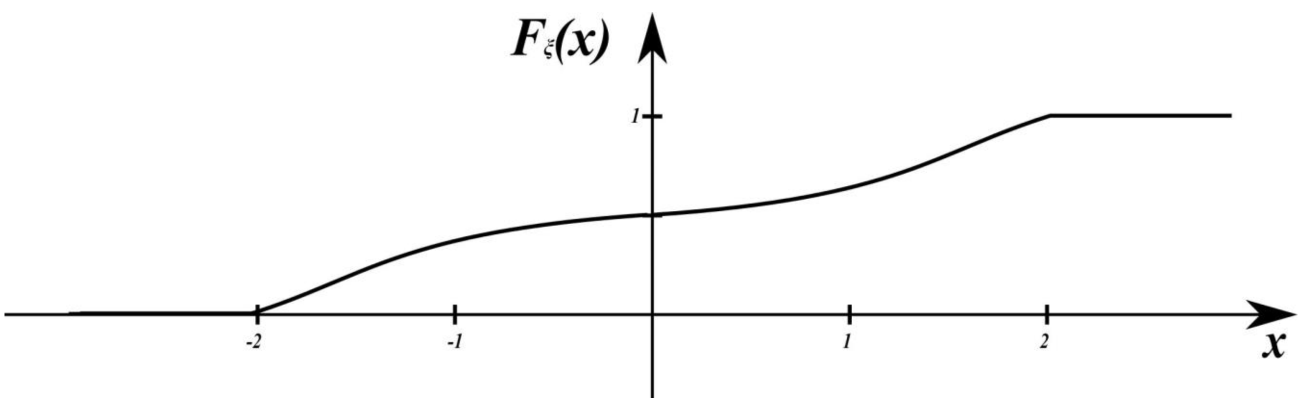

Рис. 14. Графік функції розподілу

Отож, функція розподілу виглядає так

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -a;\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}, & |x|<a;\\ 1, & x\ge a.\end{cases}$$

Математичне сподівання знаходимо за формулою (2.9)

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{xdx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a}=0.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою (2.15), тому спочатку знайдемо $M\xi^2$.

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{x^2dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}=\left\{\begin{matrix} x=a\sin t; & x=-a\to t=-\frac{\pi}{2}; \\ dx=a\cos t dt; & x=a\to t=\frac{\pi}{2}; \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}{\pi\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt=\frac{a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}.$$

Тоді дисперсія

$$D\xi=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2=\frac{a^2}{2}-0=\frac{a^2}{2}.$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Максимального значення щільність розподілу не має, тому цей розподіл є антимодальним.

Щільність розподілу є парною функцією , тому її графік симетричний відносно прямої $x=0$ (центра розподілу), тому $Me=0$.