# Розділ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

## 2.1. Функція розподілу випадкової величини.

Нехай $(\Omega, L, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

***Випадковою величиною*** $\xi$ називають відображення множини елементарних події $\Omega$ у множину дійсних чисел ***R***, при якому для довільного дійсного $x$ множина тих $\omega \in \Omega$, для яких $\xi(\omega) < x$, належить алгебрі подій даного спостереження.

***Приклад 1.*** Тричі підкидають монету. Нехай величина $\xi$ — відображення, яке вказує на кількість випадань герба у даному спостереженні. Покажемо, що $\xi$ є випадковою величиною.

$\triangleleft$ Опишемо множину елементарних подій

$$\Omega = \{\underbrace{(ГГГ)}_{\omega_1}, \underbrace{(ГГР)}_{\omega_2}, \underbrace{(ГРГ)}_{\omega_3}, \underbrace{(РГГ)}_{\omega_4}, \underbrace{(ГРР)}_{\omega_5}, \underbrace{(РГР)}_{\omega_6}, \underbrace{(РРГ)}_{\omega_7}, \underbrace{(РРР)}_{\omega_8}\}.$$

Величина $\xi$ набуває значень: 0, 1, 2, 3. Покажемо, що $\xi$ є випадковою величиною.

$x \le 0 \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \varnothing \in L$;

$0 < x \le 1 \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\omega : \xi(\omega) = 0\} = \{\omega_8\} \in L$;

$1 < x \le 2 \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\omega : \xi(\omega) = 0 \cup \xi(\omega) = 1\} = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} \in L$;

$2 < x \le 3 \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\omega : \xi(\omega) = 0 \cup \xi(\omega) = 1 \cup \xi(\omega) = 2\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} \in L$

$x > 3 \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\Omega\} \in L.$

Отже, $\xi$ — випадкова величина. $\triangleright$

***Функцією розподілу випадкової величини*** $F_\xi(x)$ називають функцію, визначену на множині дійсних чисел ***R***, яка для довільного дійсного $x$ дорівнює ймовірності того, що випадкова величина $\xi$ набуде значення меншого за $x$, тобто

$$F_\xi(x) = P(\xi(\omega) < x) \quad \forall x \in R. \tag{2.1}$$

***Властивості функції розподілу***

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x \in R$.

2) $F_\xi(-\infty) = 0; \quad F_\xi(+\infty) = 1.$

$\triangleleft$ $F_\xi(-\infty) = P(\xi(\omega) < -\infty) = P(\varnothing) = 0; \quad F_\xi(+\infty) = P(\xi(\omega) < +\infty) = P(\Omega) = 1.$ $\triangleright$

3) $F_\xi(x)$ — неспадна, тобто $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.

$\triangleleft$ $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$, тому за властивістю ймовірності $P(\xi(\omega) < x_1) \le P(\xi(\omega) < x_2)$. $\triangleright$

4) функція розподілу неперервна зліва при кожному дійсному значенні $x$, тобто $F_\xi(x-0) = F_\xi(x) \quad \forall x \in R.$

5) $P(\xi(\omega) \geq x) = 1 - F_\xi(x) \quad \forall x \in R.$ (2.2)

$\triangleleft$ Події $\xi(\omega) < x$ і $\xi(\omega) \geq x$ — протилежні, тому

$P(\xi(\omega) < x) + P(\xi(\omega) \geq x) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\xi(\omega) \geq x) = 1 - P(\xi(\omega) < x) = 1 - F_\xi(x).$ $\triangleright$

6) Ймовірність попадання випадкової величини $\xi(\omega)$ у проміжок $[x_1; x_2)$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі

$$P(x_1 \leq \xi(\omega) < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1). \quad (2.3)$$

$\triangleleft$ Подію $\xi(\omega) < x_2$ запишемо як об'єднання двох несумісних подій

$$(\xi(\omega) < x_2) = (\xi(\omega) < x_1) \cup (x_1 \leq \xi(\omega) < x_2).$$

За аксіомою додавання ймовірностей несумісних подій

$$P(\xi(\omega) < x_2) = P(\xi(\omega) < x_1) + P(x_1 \leq \xi(\omega) < x_2).$$

Звідси

$$P(x_1 \leq \xi(\omega) < x_2) = P(\xi(\omega) < x_2) - P(\xi(\omega) < x_1) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1). \triangleright$$

## 2.2. Дискретні випадкові величини

Випадкова величина $\xi(\omega)$ називається ***дискретною*** **,** якщо множина її можливих значень скінченна або зліченна.

***Законом розподілу дискретної випадкової величини*** називається перелік її можливих значень та відповідних їм ймовірностей

$$P(\xi = x_i) = p_i, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (2.4)$$

Закон розподілу можна задати таблицею

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | … |

А також зобразити його графічно. Для цього у прямокутній системі координат будують точки $M_i(x_i, p_i)$ і з'єднують їх послідовно відрізками прямих. Одержують ламану, яку називають ***многокутником розподілу***.

Знаючи закон розподілу дискретної випадкової величини, можна знайти функцію розподілу

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\left(\bigcup_{x_i < x} (\xi = x_i)\right) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i). \quad (2.5)$$

Символ $x_i < x$ означає, що підсумовують ймовірності тих значень випадкової величини, які менші за $x$.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу у точках $x = x_i$ має розриви першого роду.

***Приклад.*** Задано закон розподілу дискретної випадкової величини

| $\xi$ | 1 | 4 | 7 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 0,2 |

Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

$\triangleleft$ Значень менших за 1 випадкова величина $\xi$ не набуває, тому $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 0$ для $x \le 1$.

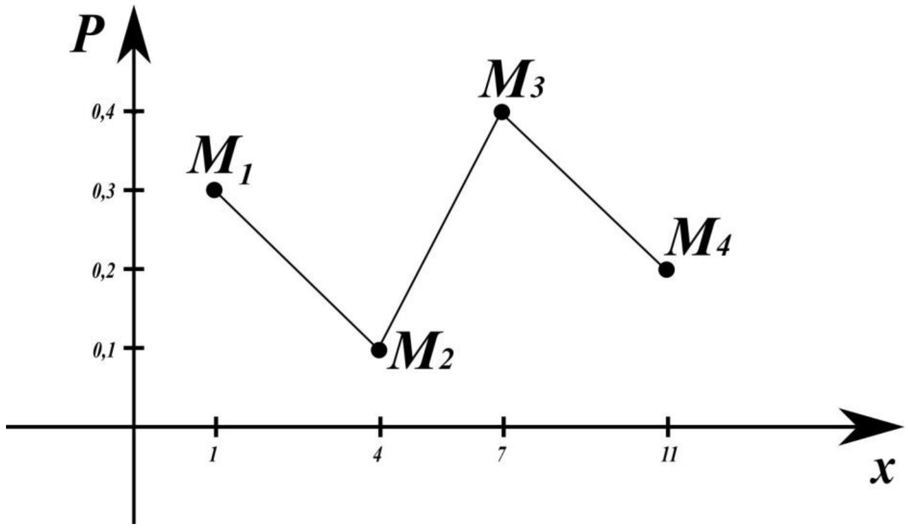


Рис. 11.

Якщо $1 < x \le 4$, то $F_\xi(x) = 0{,}3$, оскільки $\xi$ набуває одного значення 1 з ймовірністю 0,3.

Якщо $4 < x \le 7$, то $F_\xi(x) = 0{,}4$, бо $\xi$ може приймати значення 1 з ймовірністю 0,3 і значення 4 з ймовірністю 0,1. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $\xi$ може приймати одне із цих значень з ймовірністю $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

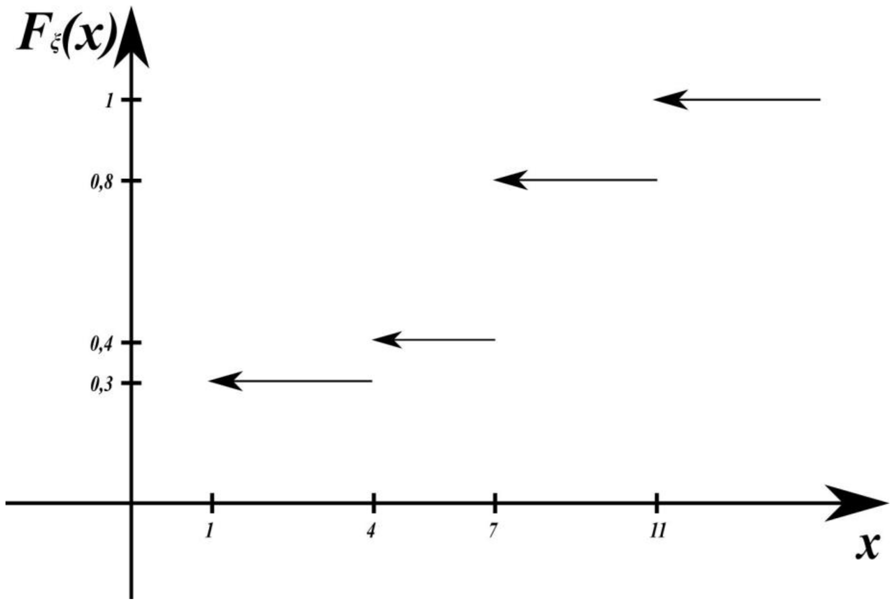


Рис. 12. Графік функції розподілу

Аналогічно, якщо $7 < x \le 11$, то $F_\xi(x) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}8.$

Якщо $x > 11$, то $F_\xi(x) = 1$, тому що подія $\xi \le 11$ — достовірна.

Отже,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0{,}3, & 1 < x \le 4; \\ 0{,}4, & 4 < x \le 7; \\ 0{,}8, & 7 < x \le 11; \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

## 2.3. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу.

Випадкова величина $\xi$ називається ***неперервною***, якщо існує визначена на множині дійсних чисел неперервна невід'ємна функція $f(x)$ така, що функція розподілу випадкової величини запишеться у вигляді

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in R. \tag{2.6}$$

Функція $f(x)$ називається ***щільністю (густина) розподілу неперервної випадкової величини***, а її графік — ***кривою розподілу.***

***Властивості щільності розподілу***

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

$\lhd \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F_\xi(+\infty) = 1. \rhd$

З геометричної точки зору це означає, що площа фігури, обмеженої графіком кривої розподілу та віссю *Ox* дорівнює 1.

2) $F_\xi'(x) = f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$.

$\lhd$ Ця властивість слідує із властивості інтеграла із змінною верхньою межею

$$F_\xi'(x) = \left( \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \right)' = f(x)$$

в точках неперервності функції $f(x)$. $\rhd$

Ось чому $f(x)$ називають ще ***диференціальною функцією розподілу***, а $F_\xi(x)$ — ***інтегральною функцією розподілу.***

3) Ймовірність того, що випадкова величина $\xi$ попаде у напівінтервал $[\alpha; \beta)$ дорівнює визначеному інтегралу від $\alpha$ до $\beta$ від щільності розподілу

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\,. \qquad (2.7)$$

◃ Скористаємось властивістю (2.3) функції розподілу

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\beta} f(t)dt - \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt. \,▹$$

4) Для неперервної випадкової величини $\xi$ ймовірність того, що до експерименту вона набуде наперед заданого значення $a$ дорівнює нулю.

◃ Для доведення скористаємось формулою (2.7)

$$P(\xi = a) = \lim_{n\to\infty} P\left(a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_{a}^{a} f(t)dt = 0. \,▹$$

5) Для неперервної випадкової величини

$$P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha \le \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \le \beta) = P(\alpha \le \xi \le \beta).$$

◃ Ця властивість є наслідком попередньої властивості. ▹

***Приклад 1.*** Задано функцію

$$f(x) = \begin{cases} C\sin 3x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right); \\ 0, & x \notin \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right); \end{cases}$$

1) За якого значення $C$ функція буде щільністю розподілу неперервної випадкової величини. 2) Побудувати функцію розподілу цієї випадкової величини.

◃ 1) Щільність розподілу випадкової величини задовольняє властивість 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} C\sin 3t dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{+\infty} 0\cdot dt = -C\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{C}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{C}{3} = 1$$

.

Звідси $C = 3$.

2) Нехай $x \le 0$, тоді $F_{\xi}(x) = P(\xi(\omega) < x) = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt = 0.$

Якщо $0 < x \le \dfrac{\pi}{6}$, тоді $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{x} 3\sin 3t dt = -\cos 3t\Big|_{0}^{x} = 1 - \cos 3x$.

Якщо $x > \frac{\pi}{6}$, тоді

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 3\sin 3t dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 0 \cdot dt = -\cos 3t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Отже, функція розподілу матиме вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \cos 3x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{6}. \end{cases} \quad \triangleright$$

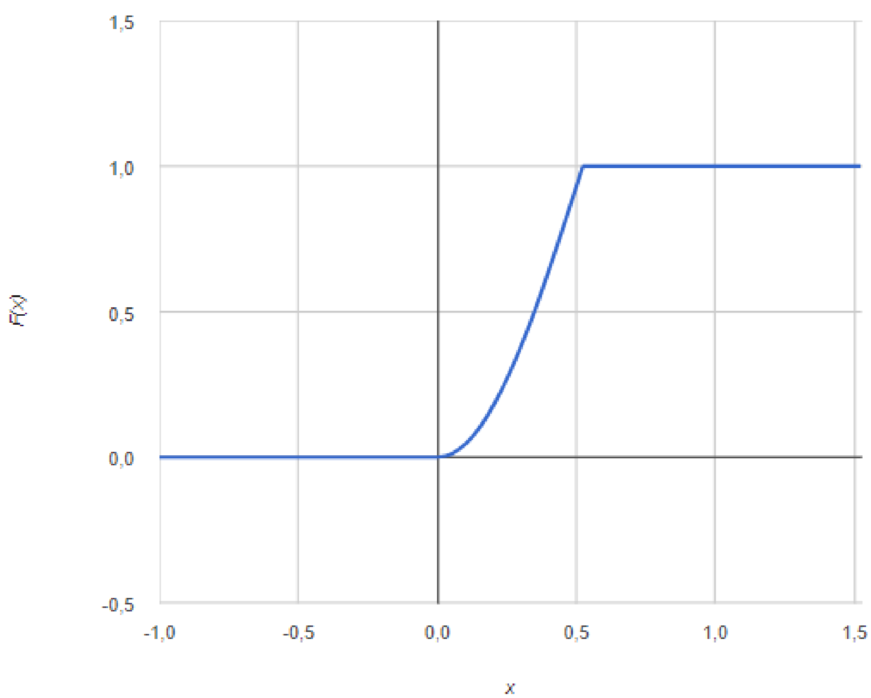


Рисунок 13. Графік функції розподілу

***Приклад 2.*** Випадкова величина $\xi$ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що внаслідок п'яти незалежних спостережень випадкова величина $\xi$ лише три рази набуде значення з інтервалу (–1; 1).

◁Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина $\xi$ прийме значення з інтервалу (–1; 1).

$$p = P(-1<\xi<1) = F_{\xi}(1) - F_{\xi}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

За формулою Бернуллі

$$P((\xi \in (-1;1)) = 3) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10\cdot\frac{4}{243} = \frac{40}{243}. \triangleright$$