Розділ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

7.1. Функції багатьох змінних та їхні границі. Неперервність

У попередніх розділах ми вивчали функції однієї змінної. Однак багато явищ, зокрема й економічних, залежить від багатьох чинників. Для вивчення таких залежностей уводять функції багатьох змінних.

7.1.1. Поняття евклідового простору та функції багатьох змінних

Евклідів простір та множини у ньому. Викладаючи теорію функцій багатьох змінних, будемо використовувати геометричну термінологію, яка узагальнює і формалізує наші уявлення про площину і реальний тривимірний геометричний простір.

Множину всіх можливих упорядкованих сукупностей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називають *n-вимірним координатним простором* і позначають A^n. Кожну впорядковану сукупність $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *точкою* *n*-вимірного координатного простору і записують $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називають координатами точки *M*. Координатний простір A^n можна розглядати як множину всіх векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо сумою векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ назвати вектор $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, а добутком вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на дійсне число λ – вектор $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, то отримаємо лінійний простір A^n.

У курсі аналітичної геометрії введено поняття координатної площини і координатного простору. Узагальненням цих понять є координатний простір A^n.

Уведемо поняття *метрики* (*відстані*) між двома точками деякої множини. Якщо кожній парі точок M_1, M_2 деякої множини поставити у відповідність певне невід'ємне число $\rho(M_1, M_2)$ за правилом, що задовольняє такі три аксіоми:

1) $\rho(M_1, M_2) \ge 0$, причому $\rho(M_1, M_2) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $M_1 = M_2$;

2) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;

3) $\rho(M_1, M_2) \le \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$,

то кажуть, що на цій множині задана метрика (відстань) $\rho(M_1, M_2)$.

Координатний простір A^n називають *n-вимірним евклідовим простором*, якщо відстань між будь-якими двома його точками $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ та $M''(x_1'', x_2'', ..., x_n'')$ можна обчислити за формулою

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + ... + (x_n' - x_n'')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')^2}. \quad (7.1.1)$$

Евклідів *n*-вимірний простір будемо позначати символом R^n. Зазначимо, що простір R^1 із метрикою

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2} = |x_1 - x_2|, \quad (7.1.2)$$

де x_1 і x_2 – координати точок M_1 і M_2, збігається з числовою прямою, простір R^2 з метрикою

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (7.1.3)$$

де $(x_i; y_i)$ – координати точок M_i, $i = 1,2$ – з координатною площиною, а простір R^3 з метрикою

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \qquad (7.1.4)$$

де $(x_i; y_i; z_i)$ – координати точок M_i, $i = 1,2,3,$ – з координатним простором, які вивчають в аналітичній геометрії. Уведене поняття *n*-вимірного евклідового простору є узагальненням понять евклідової площини й евклідового простору, вивчених в аналітичній геометрії.

Розглянемо деякі множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n.

1. Множину $\{M\}$ усіх точок *M* евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють нерівність

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2 < R^2, \qquad (7.1.5)$$

називають *відкритою n-вимірною кулею* з радіусом *R* і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Відкрита *n*-вимірна куля з радіусом *R* і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ – це множина всіх точок *M* простору R^n, які задовольняють нерівність

$$\rho(M, M_0) < R. \qquad (7.1.6)$$

2. Множину $\{M\}$ усіх точок *M* евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють нерівність

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2 \le R^2, \qquad (7.1.7)$$

або

$$\rho(M, M_0) \le R, \qquad (7.1.8)$$

називають *замкненою n-вимірною кулею* з радіусом *R* і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

3. Множину $\{M\}$ усіх точок *M* евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють рівність

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2 = R^2, \qquad (7.1.9)$$

або

$$\rho(M, M_0) = R, \qquad (7.1.10)$$

називають *n-вимірною сферою* з радіусом *R* і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Зазначимо: якщо до відкритої *n*-вимірної кулі з радіусом *R* і центром у точці M_0 приєднати *n*-вимірну сферу з радіусом *R* і центром у точці M_0, то отримаємо замкнену *n*-вимірну кулю з радіусом *R* і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

4. Відкриту *n*-вимірну кулю з радіусом $\varepsilon > 0$ і центром у точці M_0 називають ε-*околом точки* M_0 і позначають $U(M_0; \varepsilon)$.

5. Відкриту *n*-вимірну кулю з радіусом $\varepsilon > 0$ і центром у точці M_0, з якої видалена сама точка M_0, називають *проколеним* ε-*околом точки* M_0 і позначають $\overset{\circ}{U}(M_0; \varepsilon)$.

6. Точку *M* множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *внутрішньою точкою* цієї множини, якщо існує деякий ε-окіл точки *M*, усі точки якого належать множині $\{M\}$ (рис. 7.1.1).

7. Множину, яка складається тільки зі своїх внутрішніх точок, називають *відкритою множиною*. Прикладом відкритої множини в просторі R^1 є інтервал $(a;b)$, а в просторі R^2 – кільце $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$, $a < b$.

8. Будь-яку відкриту множину, яка містить точку *M*, називають околом цієї точки і позначають $U(M)$. Окіл точки *M* без самої точки *M* називають проколеним околом цієї точки і позначають $\overset{\circ}{U}(M)$.

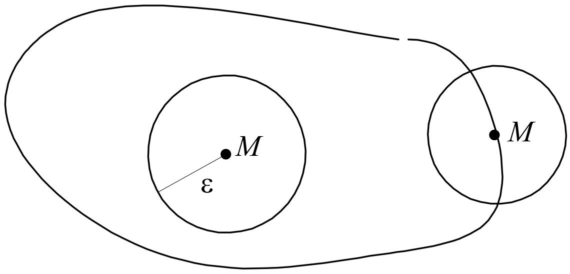

Рис. 7.1.1.

9. Точку *M* множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *зовнішньою точкою* цієї множини, якщо існує деякий ε-окіл точки *M*, усі точки якого не належать множині $\{M\}$.

10. Точку *M* множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *межовою точкою* множини $\{M\}$, якщо ця точка не є ні внутрішньою, ні зовнішньою точкою цієї множини. Зазначимо, що точка *M* є межовою точкою множини $\{M\}$ тоді й тільки тоді, коли в будь-якому ε-околі цієї точки є точки, що належать множині $\{M\}$, і точки, які їй не належать (див. рис. 7.1.1). Межова точка може належати або не належати цій множині. Наприклад, кожна точка *n*-вимірної сфери з радіусом *R* і центром у точці M_0 є межовою як для відкритої *n*-вимірної кулі з центром у точці M_0 і їй не належить, так і для замкненої, якій належить.

Очевидно, що межові точки не можуть бути ні внутрішніми, ні зовнішніми точками множини.

11. Довільну множину $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *замкненою*, якщо ця множина містить усі свої межові точки.

12. Множину $\{M\}$ точок *M* евклідового простору R^n називають *обмеженою*, якщо існує *n*-вимірна куля, яка містить усі точки цієї множини.

13. Множину $\{M\}$ точок *M* евклідового простору R^n називають *зв'язною*, якщо будь-які дві точки цієї множини можна з'єднати неперервною лінією, яка належить множині $\{M\}$.

14. Кожну відкриту і зв'язну множину в евклідовому просторі R^n називають *областю*.

15. Якщо множина $\{M\}$ є областю, то множину $\overline{\{M\}}$, отриману приєднанням до $\{M\}$ усіх її межових точок, називають *замкненою областю*.

Наприклад, відкрита *n*-вимірна куля є обмеженою, зв'язною і відкритою множиною, тобто вона є обмеженою областю в евклідовому просторі R^n.

16. Область, будь-які дві точки якої можна сполучити відрізком прямої, усі точки якого належать цій області, називають *опуклою*.

17. Точку M простору R^n називають *граничною* точкою множини $\{M\}$, якщо будь-який окіл точки *M* містить хоча б одну точку множини $\{M\}$.

Поняття функції багатьох змінних. Якщо кожній точці *M* з множини $\{M\}$ точок *n*-вимірного евклідового простору R^n за деяким законом f відповідає певне дійсне число *u*, то на множині $\{M\}$ задана функція $u = u(M)$ або $u = f(M)$. У цьому випадку множину $\{M\}$ називають областю задання, або областю визначення, функції $u = f(M)$ і позначають $D(f)$. Число u, яке відповідає точці M, називають *значенням функції в цій точці*. Сукупність $U = \{u\}$ усіх значень функції $u = f(M)$ називають множиною значень цієї функції і позначають $E(f)$.

Оскільки точка M має координати $x_1, x_2, ..., x_n$, то функцію n змінних записують $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називають аргументами функції f, а число $f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ – значенням функції в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

Функції багатьох змінних можна задавати аналітичним і табличним способами. Аналітичним способом функцію задають за допомогою формули.

Розглянемо приклади деяких функцій багатьох змінних, які задані аналітично:

1) $u = f(M) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$. Областю визначення цієї функції є множина точок, координати яких задовольняють умову $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0$, або $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. Ця множина – еліпсоїд з півосями a, b, c;

2) $u = f(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}}$.

Областю визначення цієї функції є множина точок, координати яких задовольняють умову $1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 > 0$, або $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < 1$. Це є відкрита n-вимірна куля в евклідовому просторі.

Часто функцію багатьох змінних задають табличним способом. Наприклад, розглянемо функцію, яка описує залежність обсягу Q виробленої продукції від витрат капіталу K та трудових ресурсів L.

K	*L*			
	0	10	20	30
0	0	0	0	0
5	0	25	39	48
10	0	32	48	54
15	0	37	50	61
20	0	43	55	67

З таблиці бачимо, що зі збільшенням затрат хоча б одного ресурсу зростає виробництво продукції, а також, що однаковий результат можна отримати для різних затрат робочої сили та капіталу: $Q(5;30) = Q(10;20)$.

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена на множині $\{M\} \subset R^n$. *Графіком* цієї функції називають множину точок

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in \{M\}\}$$

простору R^{n+1}. Зокрема, графіком функції двох змінних $z = f(x, y), (x, y) \in D$ є множина точок $\Gamma(f) = \left\{(x, y, f(x, y)) \in R^3 \mid (x, y) \in D\right\}$, яка за певних умов, накладених на функцію f, є деякою поверхнею S у просторі R^3.

Множиною рівня функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка відповідає числу C, називають множину точок $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють рівняння

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C. \tag{7.1.11}$$

У випадку функції двох змінних це рівняння має вигляд

$$f(x,y)=C. \tag{7.1.12}$$

Якщо (7.1.12) є рівнянням лінії, то множину рівня називають *лінією рівня.* Зазначимо, що для деяких значень параметра C множина рівня може бути порожньою. Якщо взяти числа $C_1, C_2, ..., C_n, ...$, які утворюють арифметичну прогресію з різницею d, то отримаємо набір ліній рівня, за взаємним розміщенням яких можна робити висновок про графік функції, тобто про форму поверхні. Там, де лінії розміщені густіше, функція змінюється швидше, а в тих місцях, де лінії рівня розміщені рідше, функція змінюється повільніше.

П р и к л а д 7.1.1. Побудуємо лінії рівня функції $z=x^2+y^2$.

● Лінії рівня цієї функції визначає рівняння $x^2+y^2=C,\ \ 0\le C<+\infty$. Надаючи C різних значень, отримаємо множину ліній рівня, які є концентричними колами з центром у початку координат і радіусами $R=\sqrt{C}$. Якщо $C=0$, то коло вироджується в точку $O(0;0)$ (рис. 7.1.2).

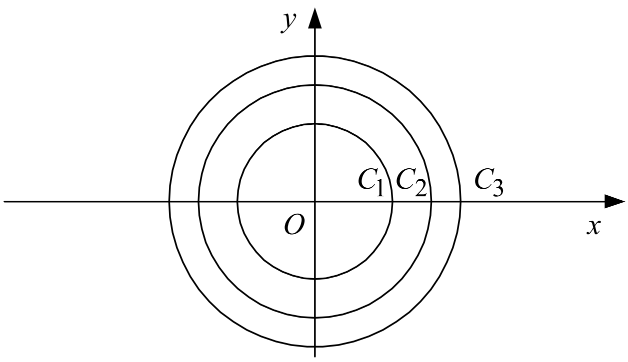

Рис. 7.1.2.

З аналітичної геометрії відомо, що графіком цієї функції є параболоїд обертання.

Функцію $f(M)$, називають обмеженою згори (знизу) на множині $\{M\}\in R^n$, якщо існує таке число $B\ (b)$, що для всіх $M\in\{M\}$ виконується нерівність $f(M)\le B\ \ (f(M)\ge b)$.

Функції багатьох змінних в економіці. Функції багатьох змінних використовують для математичного опису економічних понять і явищ. Наведемо приклади найпоширеніших з них.

Виробничі функції. Залежність між виробничими затратами і випуском продукції описують виробничі функції. Нехай є n видів виробничих затрат, яким відповідають незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо y – обсяг випущеної продукції, то функцію $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ називають *виробничою функцією*. Оскільки у виробничій функції $x_i\ge 0,\ \ i=1,2,...,n,$ то область визначення цієї функції є множина R_+^n. Очевидно, якщо нема деякого ресурсу, тобто $x_i=0$, то і випуск продукції дорівнює нулю, тобто

$$f(x_1,x_2,...x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)=0.$$

Функція затрат. Нехай виробнича система випускає n видів продукції $y_1, y_2, ..., y_n$, а x – сукупні затрати, які забезпечують цей випуск. Тоді функцію $x=F(y_1,y_2,...,y_n)$ називають *функцією затрат*.

Функція попиту описує залежність попиту на n товарів від їхньої ціни:

$$Q=D(p_1,p_2,...,p_n).$$

Наведемо приклади функцій багатьох змінних, які часто трапляються в математиці й економіці.

1. Функцію

$$u=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b, \tag{7.1.13}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – сталі, називають лінійною функцією. Вона є рівнянням гіперплощини в евклідовому просторі.

2. Функцію

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{7.1.14}$$

де a_{ij} – сталі, називають квадратичною формою від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. В економіці використовують поняття *функції корисності*, яка виражає корисність від набуття *n* різних товарів. Найчастіше вона має вигляд

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i), \ a_i > 0, \ c_i \ge 0, \tag{7.1.15}$$

її називають логарифмічною функцією корисності.

4. Виробнича функція Кобба–Дугласа, яка визначає обсяг випуску продукції *Q*, якщо затрати капіталу *K* і трудових ресурсів *L*:

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}, \tag{7.1.16}$$

де $A > 0$ – параметр, який визначає конкретна технологія, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

В економіці лініями рівня є ізокванти та криві індиферентності. Лініями рівня виробничої функції є ізокванти. *Ізокванта* – крива, утворена множиною точок, що відповідають різним варіантам поєднання двох будь-яких видів витрат, які забезпечують одну й ту ж кількість виготовленої продукції (рис. 7.1.3).

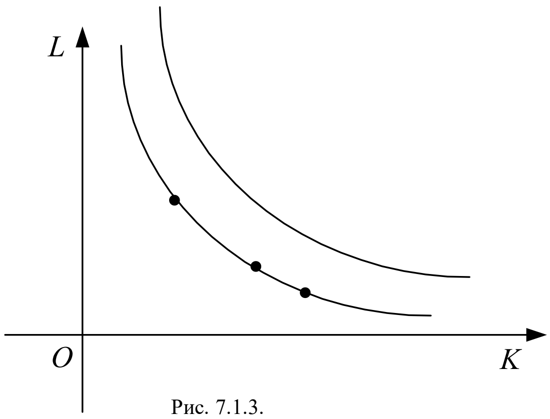

Рис. 7.1.3.

Крива індиферентності відображає зміну поєднання двох різних благ за умови, що загальна корисність цих благ стала.

П р и к л а д 7.1.2. Визначимо рівняння лінії рівня для виробничої функції Кобба–Дугласа $Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

● Рівняння лінії рівня у цьому випадку має вигляд $AK^{\alpha} L^{1-\alpha} = C$, де C – довільна стала. Для $C > 0$ маємо сім'ю гіпербол, які розташовані у першому квадранті (див. рис. 7.1.3). ❍

7.1.2. Границя функції багатьох змінних

Послідовність точок простору R^n та її границя. Нехай кожному натуральному числу k відповідає точка M_k евклідового простору R^n. У цьому випадку отримаємо послідовність

$M_1, M_2, ..., M_k, ...$ точок простору, яку будемо позначати $\{M_k\}$. Уведемо поняття збіжної послідовності та її границі.

Послідовність $\{M_k\}$ точок евклідового простору R^n називають *збіжною,* якщо існує точка A цього простору така, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $k_0(\varepsilon)$, що для всіх $k > k_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $\rho(M_k, A) < \varepsilon$. У цьому випадку точку A називають *границею послідовності* $\{M_k\}$ і записують

$$\lim_{k\to\infty} M_k = A. \tag{7.1.17}$$

Зазначимо, що границя A послідовності $\{M_k\}$ точок деякої замкнутої множини $\{M\}$ належить цій множині.

Теорема 7.1.1. Послідовність точок $\{M_k\}$ евклідового простору R^n збігається до точки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ цього простору тоді й тільки тоді, коли числові послідовності $\left\{x_1^{(k)}\right\}, \left\{x_2^{(k)}\right\}, ..., \left\{x_n^{(k)}\right\}$ збігаються до чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Уведемо поняття обмеженої послідовності точок простору R^n. Послідовність $\{M_k\}$ точок евклідового простору R^n називають *обмеженою*, якщо існує таке число $B > 0$, що для всіх k виконується умова $\rho(O, M_k) \le B$, де O – точка, усі координати якої дорівнюють нулю. З означення випливає, що всі точки обмеженої послідовності належать замкнутій кулі радіусом B з центром у початку координат.

Границя функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(M)$ визначена на множині $\{M\}$ точок евклідового простору R^n. Виберемо в просторі R^n точку A, яка, можливо, і не належить множині $\{M\}$, але в будь-якому δ-околі цієї точки є хоча б одна точка множини $\{M\}$, відмінна від A.

Дамо означення *границі функції за Гейне*. Число B називають *границею функції* $u = f(M)$ в точці A, якщо для будь-якої збіжної до A послідовності $\{M_k\}$ точок області визначення $\{M\}$ цієї функції, $M_k \ne A$, відповідна числова послідовність значень функції $\{f(M_k)\}$ збігається до числа B.

Дамо означення *границі функції за Коші.* Число B називають *границею функції* $u = f(M)$ в точці A, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для будь-якої точки M з області визначення $\{M\}$ цієї функції, яка задовольняє нерівність $0 < \rho(M, A) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - B| < \varepsilon$.

Границю функції $u = f(M)$ в точці A будемо позначати так:

$$\lim_{M\to A} f(M) = B, \tag{7.1.18}$$

або

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = B. \tag{7.1.19}$$

Такі границі називають n-кратними, наприклад, подвійними для функцій двох змінних чи потрійними для функцій трьох змінних.

Доведено, що ці два означення еквівалентні.

Уведемо поняття границі функції $u = f(M)$ при $M \to \infty$. Припустимо, що для будь-якого $\delta > 0$ існує хоча б одна точка M з множини $\{M\}$, на якій визначена ця функція, яка лежить поза кулею радіусом δ з центром у початку координат.

Число B називають границею функції $u = f(M)$ при $M \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок M з множини $\{M\}$, на якій визначена ця функція, що задовольняють умову $\rho(M, O) > \delta$, виконується нерівність $|f(M) - B| < \varepsilon$, і позначають

$$\lim_{M\to\infty} f(M) = B. \tag{7.1.20}$$

Для границі функцій багатьох змінних справджується багато теорем, аналогічних до відповідних теорем для границі функцій однієї змінної.

Теорема 7.1.2. Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ задані на множині $\{M\}$ і мають у точці A, відповідно, границі B і C. Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$, $g(M) \neq 0$, мають у точці A, відповідно, границі $B \pm C$, $B \cdot C$, B/C, $C \neq 0$.

Поняття границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних мають багато спільного, проте між ними є суттєва різниця. Якщо для функції однієї змінної $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то це означає, що односторонні границі функції існують і дорівнюють A. Правильним є й обернене твердження, тобто з існування і рівності односторонніх границь випливає існування границі функції в точці. Для функції багатьох, наприклад, двох змінних, точка $M(x; y)$ може прямувати до точки $M_0(x_0; y_0)$ різними способами: уздовж прямої або уздовж деякої кривої (рис. 7.1.4).

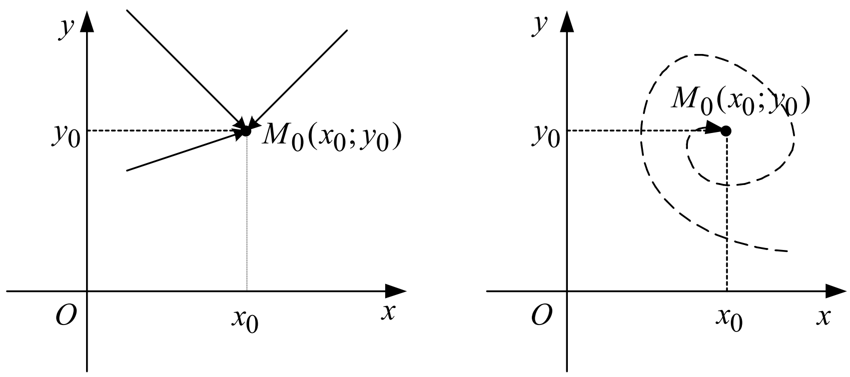

Рис. 7.1.4.

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ справджується тоді й тільки тоді, коли точка $M(x; y)$ може прямувати до точки $M_0(x_0; y_0)$ різними способами, а результат єдиний.

П р и к л а д 7.1.3. Обчислимо границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy + 2x}$.

● $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy + 2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot \dfrac{xy}{xy + 2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{xy + 2x} = = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{y + 2} = 1 \cdot 0 = 0.$ ❍

П р и к л а д 7.1.4. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

● Нехай точка $M(x; y)$ прямує до точки $O(0;0)$ уздовж прямої $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{k \cdot x^2}{x^2 + k^2 \cdot x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{k^2}{1 + k^2} = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

Оскільки для різних значень k отримаємо різні значення границі, то границі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. ❍

Функцію $u = f(M)$ називають *нескінченно малою* в точці A, якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$. Якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M) = B$, то функція $\alpha(M) = f(M) - B$ є нескінченно малою в точці A. Справді, $\lim\limits_{M\to A} \alpha(M) = \lim\limits_{M\to A} \big(f(M) - B\big) = \lim\limits_{M\to A} f(M) - B = B - B = 0$. Звідси випливає таке: якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M) = B$, то $f(M) = B + \alpha(M)$, де $\lim\limits_{M\to A} \alpha(M) = 0$. Нескінченно малі функції багатьох змінних порівнюють так само, як нескінченно малі функції однієї змінної.

Повторні границі. Для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ багатьох змінних можна ввести поняття повторних границь. Розглянемо, наприклад, функцію двох змінних $u = f(x, y)$. Нехай ця функція задана в деякому прямокутному околі $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ точки $M_0(x_0; y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Нехай для кожного фіксованого значення $y = y_*$, яке задовольняє умову $|y - y_0| < d_2$, існує границя функції $u = f(x, y)$ однієї змінної x в точці $x = x_0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_*}} f(x, y) = g(y),$$

і нехай існує границя функції $g(y)$ в точці y_0:

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = B.$$

У цьому випадку існує повторна границя B для функції $u = f(x, y)$ в точці M_0:

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = B.$$

Аналогічно можна ввести повторну границю

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y).$$

Теорема 7.1.3. Нехай функція $u = f(x, y)$ задана в деякому прямокутному околі $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ точки $M_0(x_0; y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Якщо: 1) існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = B$;

2) для довільного $y = y_*$, що задовольняє умову $|y - y_0| < d_2$, існує границя

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_*}} f(x, y) = g(y);$$

3) для довільного $x = x_*$, що задовольняє умову $|x - x_0| < d_1$, існує границя

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ x=x_*}} f(x, y) = w(y),$$

то існують повторні границі

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

які дорівнюють між собою і подвійній границі:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = B.$$

Зазначимо, що обернене твердження неправильне. Для функції n змінних є $n!$ повторних границь.

П р и к л а д 7.1.5. Обчислимо повторні границі функції

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точці $O(0;0)$.

● $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=x_0\neq 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{x_0^2}\right) = 0.$ Аналогічно отримаємо, що $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0.$ ❍

Зазначимо: у прикладі 7.1.4 доведено, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. Отже, з існування і рівності повторних границь у точці не випливає існування подвійної границі функції в цій точці.

7.1.3. Неперервність функцій багатьох змінних

Поняття неперервності функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(M)$ задана на деякій множині $\{M\}$ евклідового простору R^n. Нехай точка A належить множині $\{M\}$ і є граничною точкою цієї множини. Це означає, що в будь-якому δ-околі точки A є точки множини $\{M\}$.

Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці A*, якщо існує границя цієї функції в точці A і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A). \qquad (7.1.21)$$

Зазначимо, що оскільки $\lim\limits_{M\to A} M = A,$ то рівність (7.1.21) можна записати у вигляді

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(\lim_{M\to A} M).$$

Отже, для неперервної в заданій точці A функції символи $\lim$ та f можна поміняти місцями.

Точки простору R^n, у яких функція $u = f(M)$ не є неперервною, називають *точками розриву* цієї функції. З означення неперервності випливає, що точка A є точкою розриву функції $u = f(M)$, якщо

1) функція $u = f(M)$ не визначена в точці A;

2) функція визначена в точці A, але $\lim\limits_{M\to A} f(M)$ не існує, або якщо ця границя існує, але не дорівнює $f(A)$, тобто $\lim\limits_{M\to A} f(M) \neq f(A)$.

Точку A називають точкою *усувного розриву* функції $u = f(M)$, якщо існує $\lim\limits_{M \to A} f(M)$, але функція не визначена в точці A, або

$$\lim_{M \to A} f(M) \neq f(A).$$

Дамо означення *неперервності функції в точці за Гейне*. Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці A, якщо для будь-якої збіжної до точки A послідовності точок $\{M_k\}$ з множини $\{M\}$ задання цієї функції відповідна послідовність $\{f(M_k)\}$ значень функції збігається до числа $f(A)$.

Дамо означення *неперервності функції за Коші*. Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці A, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для будь-якої точки M з множини $\{M\}$ задання цієї функції, яка задовольняє умову $\rho(M, A) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Функцію $u = f(M)$, яка визначена на множині $\{M\}$, називають *неперервною на цій множині*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Нехай точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ належать області визначення функції $u = f(M)$. *Повним приростом*, або *приростом*, функції $u = f(M)$ у точці A називають функцію

$$\Delta u = f(M) - f(A). \tag{7.1.22}$$

Позначимо $x_1 - a_1 = \Delta x_1$, $x_2 - a_2 = \Delta x_2$, ..., $x_n - a_n = \Delta x_n$. Тоді повний приріст функції $u = f(M)$ в точці A можна записати так:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n). \tag{7.1.23}$$

Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, якщо її повний приріст у цій точці є нескінченно малою функцією, тобто

$$\lim_{M \to A} \Delta u(M) = \lim_{M \to A} \big(f(M) - f(A)\big) = 0, \tag{7.1.24}$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \big(f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)\big) = 0.$$

П р и к л а д 7.1.6. Дослідимо на неперервність у точці $O(0;0)$ функцію
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

- Оскільки $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$, то

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2xy} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin x \sin y}{xy} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 = f(0;0).$$

Отже, функція неперервна в початку координат. ❍

Неперервність функції за однією змінною. Для функції багатьох змінних можна ввести поняття неперервності за однією змінною за фіксованих значень інших змінних. Розглянемо часткові прирости функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з області $\{M\}$ визначення цієї функції. Зафіксуємо всі, крім першого, аргументи функції. Надамо аргументу x_1 деякого приросту Δx_1 такого, щоб точка $M(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n)$ належала множині $\{M\}$. Відповідний приріст функції називають *частковим приростом* функції в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, що відповідає приросту Δx_1 аргументу x_1, і позначають $\Delta_{x_1} u$:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (7.1.25)$$

Аналогічно вводять поняття часткових приростів $\Delta_{x_k} u$ за рештою змінних.

Уведемо поняття неперервності функції за однією змінною. Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *неперервною в точці* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ *за змінною* x_k, якщо частковий приріст $\Delta_{x_k} u$ цієї функції в точці *M* є нескінченно малою функцією від Δx_k, тобто якщо

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0. \qquad (7.1.26)$$

Очевидно, що з неперервності функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ випливає її неперервність за кожною змінною. Обернене твердження неправильне, тобто з неперервності функції в точці *M* за кожною змінною $x_1, x_2, ..., x_n$ не завжди випливає її неперервність у цій точці.

Неперервність складеної функції. Уведемо поняття складеної функції двох змінних. Нехай функції

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2) \end{cases} \qquad (7.1.27)$$

визначені на множині $\{T\}$ точок евклідового простору R^2. Тоді кожній точці $T(t_1, t_2)$ з множини $\{T\}$ за формулами (7.1.27) відповідає точка $M(x_1, x_2)$ евклідового простору R^2. Позначимо через $\{M\}$ множину всіх таких точок. Нехай $u = f(x_1, x_2)$ задана на множині $\{M\}$. Тоді на множині $\{T\}$ точок евклідового простору R^2 задана складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)).$$

Теорема 7.1.4. Нехай функції $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ неперервні в точці $A(a_1, a_2)$, а функція $u = f(x_1, x_2)$ неперервна в точці $B(b_1, b_2)$, де $b_i = \varphi_i(a_1, a_2)$, $i = 1,2$. Тоді складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2))$$

неперервна в точці $A(a_1, a_2)$.

Головні властивості неперервних функцій багатьох змінних. Неперервним функціям багатьох змінних притаманні властивості, аналогічні до властивостей неперервних функцій однієї змінної. Сформулюємо їх у вигляді теорем.

Теорема 7.1.5. Якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ задані на одній і тій же множині $\{M\}$ і неперервні в деякій точці *A* цієї множини, то функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M)/g(M), g(M) \neq 0$, теж неперервні в цій точці *A*.

Теорема 7.1.6. Будь-яка елементарна функція багатьох змінних неперервна в кожній точці області визначення.

Наприклад, розглянемо виробничу функцію двох змінних $Y = F(K, L)$, де *K*– обсяг основних фондів; *L* – затрати праці; *Y* – обсяг випущеної продукції. Областю визначення такої функції є деяка множина $D \subset R_+^2$. Виробнича функція, у більшості випадків, є елементарною функцією двох змінних.

За теоремою 7.1.6 вона неперервна в будь-якій точці $M_0(K_0;L_0)\in D$. Це означає: якщо зміни основних фондів ΔK і затрат праці ΔL досить малі, то зміна випуску продукції $\Delta Y = F(K_0+\Delta K; L_0+\Delta L) - F(K_0;L_0)$ теж буде малою.

Теорема 7.1.7 (перша теорема Больцано–Коші). Якщо функція $u = f(M)$ визначена і неперервна на замкненій обмеженій і зв'язній множині $\{M\}$ евклідового простору R^n, а в двох точках цієї множини набуває значень з протилежними знаками, то на множині $\{M\}$ знайдеться точка M_0 така, що $f(M_0)=0$.

Теорема 7.1.8 (друга теорема Больцано–Коші). Якщо функція $u = f(M)$ визначена і неперервна на замкненій обмеженій і зв'язній множині $\{M\}$ евклідового простору R^n, а в двох точках цієї множини набуває різних значень $f(M_1)=A$, $f(M_2)=B$, $A\neq B$, то яке б не було число *C*, що міститься між числами *A* та *B*, на множині $\{M\}$ знайдеться точка *N* така, що $f(N)=C$.

Теорема 7.1.9 (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $u = f(M)$ неперервна на замкненій обмеженій множині $\{M\}$, то вона обмежена на цій множині.

Задачі для самостійного розв'язування

7.1.1. Задано функцію $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}+y\right)$. Обчислити $f\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7.1.2. Задано функцію $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x+2y}$. Обчислити $f(2;-2)$, $f(1;-3)$.

7.1.3. Визначити та зобразити області визначення таких функцій:

1) $u=x^2-y$; 2) $u=\dfrac{x+y}{x-y}$; 3) $u=\dfrac{1}{x^2-y^2}$; 4) $u=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

7.1.4. Знайти лінії рівня функцій і побудувати їхні графіки:

1) $u=x+y$; 2) $u=x^2+y^2$; 3) $u=x^2-y^2$; 4) $u=\dfrac{x}{y}$.

7.1.5. Обчислити:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} x^2y$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

7.1.6. Довести, що такі границі не існують:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$.

7.1.7. Обчислити повторні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ та $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, якщо $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$, $x_0=0$, $y_0=0$.

7.1.8. Чи існує границя та повторні границі функції $f(x,y)$ у точці $(x_0; y_0)$, якщо:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; 2) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{x + y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$?

7.1.9. Знайти точки розриву функцій:

1) $u = \dfrac{xy}{2x - y}$; 2) $u = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$; 3) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; 4) $u = \dfrac{y^2 + x}{y^2 - x}$.

7.1.10. Дослідити функцію на неперервність за окремими змінними і за сукупністю змінних:

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0; \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \end{cases}$$ у точках $O(0;0)$ і $A(1;2)$.

7.1.11. Перевірити, чи обмежені функції:

1) $u = x^2 - y^2$ у крузі $\{(x;y) : x^2 + y^2 \le 25\}$; 2) $u = x^2 - y^2$ поза кругом $\{(x;y) : x^2 + y^2 \le 25\}$.