7.5. Інтегрування функцій багатьох змінних

7.5.1. Поняття подвійного інтеграла та його властивості

Нехай G – деяка замкнена обмежена область, а $z = f(x, y)$ – довільна функція, визначена й обмежена в цій області. Межа області G складається зі скінченної кількості кривих, заданих рівняннями $y = g(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $g(y)$ – неперервні функції. Розіб'ємо область G довільно на n частин G_i, $i = 1, 2, ..., n$, які не мають спільних внутрішніх точок з площами ΔS_i (рис. 7.5.1).

У кожній частині G_i виберемо довільну точку $M_i(\varsigma_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i; \eta_i)\Delta S_i, \tag{7.5.1}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ в області G. Найбільшу відстань між межовими точками цієї області назвемо *діаметром* $d(G)$ *області* G. Позначимо через λ найбільший з діаметрів частинних областей G_i, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d(G_i)\}$.

Число I називають *границею інтегральної суми* (7.5.1) при $\lambda \to 0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що незалежно від способу розбиття області G і від вибору точок $M_i(\varsigma_i; \eta_i)$, з нерівності $\lambda < \delta$ випливає нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Якщо існує границя I інтегральної суми (7.5.1) при $\lambda \to 0$, то цю границю називають *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ за областю G і позначають

$$I = \iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{7.5.2}$$

У цьому випадку функцію $f(x, y)$ називають *інтегрованою* в області G, x, y – *змінними інтегрування*, $\mathrm{d}S$ або $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ – *елементом площі*, G – *областю інтегрування.*

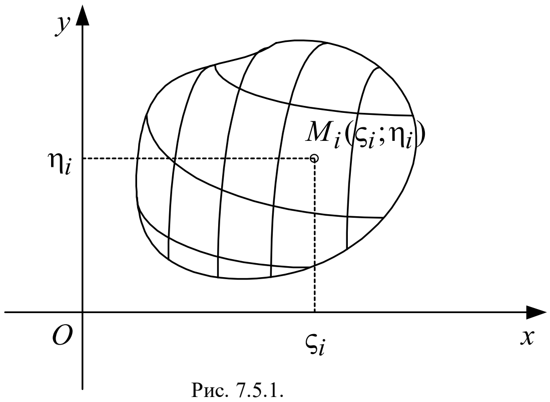

Рис. 7.5.1.

Очевидно, що функція $f(x,y)$ обмежена. Ця умова є необхідною умовою інтегрування. Вона не є достатньою, тобто існують обмежені, але неінтегровані функції. Наприклад, функція

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x \text{ і } y \text{ раціональні числа;}\\ 0, & \text{якщо } x \text{ або } y \text{ ірраціональне число,}\end{cases}$$

визначена в квадраті $G=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 1;\, 0\le y\le 1\}$, неінтегрована. Це випливає з означення подвійного інтеграла.

Зазначимо, що для з'ясування достатніх умов інтегрованості, як і у випадку функції однієї змінної, можна використати суми Дарбу, властивості яких можливо перенести на випадок подвійного інтеграла. Можна довести таке: якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в області *G*, то границя як нижніх s, так і верхніх S сум Дарбу при $\lambda\to 0$ дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ за областю *G*.

Як і у випадку визначеного інтеграла від функції однієї змінної, доведено теореми про класи інтегрованих функцій.

Теорема 7.5.1. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона інтегрована в цій області.

Як і для функцій однієї змінної, клас інтегрованих функцій є ширшим, ніж клас неперервних функцій.

Теорема 7.5.2. Нехай функція $f(x,y)$ обмежена в замкненій обмеженій області G і має розриви лише на скінченній кількості кривих цієї області, які є графіками неперервних функцій $y=g(x)$ або $x=\varphi(y)$. Тоді функція $f(x,y)$ інтегрована в області *G*.

Геометричне трактування подвійного інтеграла. Розглянемо тіло *P*, згори обмежене графіком неперервної і невід'ємної в області G функції $z=f(x,y)$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області

G, з твірними, паралельними до осі Oz, а знизу – областю G, яка лежить у площині Oxy (рис. 7.5.2).

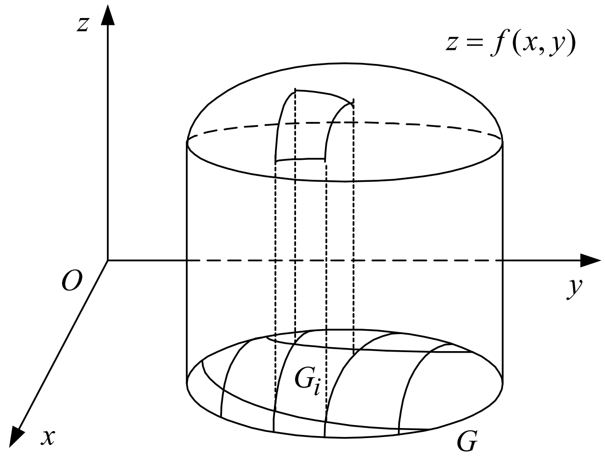

Рис. 7.5.2.

Таке тіло називають *криволінійним циліндром*. Знайдемо об'єм такого тіла. Для цього розіб'ємо область G довільно на n частин G_i, $i = 1, 2, ..., n$, які не мають спільних внутрішніх точок з площами ΔS_i, у кожній частині G_i виберемо довільну точку $M_i(\varsigma_i;\eta_i)$ і побудуємо прямий циліндричний стовпчик з основою G_i та висотою $f(\varsigma_i;\eta_i)$. Його об'єм дорівнює $V_i = f(\varsigma_i;\eta_i)\Delta S_i$.

Складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i;\eta_i)\Delta S_i,$$

яка приблизно дорівнює об'єму тіла P. Ця сума тим точніше задає шуканий об'єм, чим меншим буде кожен з діаметрів λ_i частинних областей G_i. Тому об'єм тіла P

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i)\Delta S_i. \qquad (7.5.3)$$

Звідси випливає геометричне трактування подвійного інтеграла: подвійний інтеграл від неперервної невід'ємної функції дорівнює об'єму криволінійного циліндра.

Зазначимо таке: якщо $f(x, y) \equiv 1$ в усіх точках області G, то з означення подвійного інтеграла отримаємо формулу для обчислення площі цієї області

$$S = \iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y. \qquad (7.5.4)$$

Властивості подвійного інтеграла. Головні властивості подвійного інтеграла аналогічні до відповідних властивостей визначеного інтеграла.

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрована в області G і $a \in R$, то функція $a \cdot f(x, y)$ теж інтегрована в G, і

$$\iint\limits_G a \cdot f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y = a \cdot \iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла.

2. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровані в області G, то їхня алгебрична сума теж інтегрована в цій області, і

$$\iint\limits_G \big(f(x, y) \pm g(x, y)\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y \pm \iint\limits_G g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y.$$

3. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровані в області G, то їхній добуток теж інтегрований у цій області.

4. Якщо область G є об’єднанням областей G_1 та G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, і в кожній з них функція $f(x, y)$ інтегрована, то функція інтегрована в області G, і

$$\iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y.$$

5. Якщо в усіх точках області G виконується нерівність $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y \le \iint\limits_G g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y.$$

6. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрована в області G, то функція $|f(x, y)|$ теж інтегрована, і

$$\left|\iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y\right| \le \iint\limits_G |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y.$$

Для подвійних інтегралів справджується теорема про середнє значення.

Теорема 7.5.3. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області G, то існує така точка $M(\varsigma, \eta) \in G,$ що

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le f(\varsigma,\eta)\cdot S. \qquad (7.5.5)$$

7.5.2. Обчислення подвійних інтегралів

Виведемо формули, за якими можна обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ від неперервної в області G функції $f(x,y)$.

Обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної області. Нехай область G – прямокутник зі сторонами, паралельними до осей координат.

Теорема 7.5.4. Нехай для функції $f(x,y)$ в прямокутнику $G=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b;\ c\le y\le d\ \}$ існує подвійний інтеграл

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (7.5.6)$$

і для кожного $x\in[a\,;b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (7.5.7)$$

Тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad (7.5.8)$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \qquad (7.5.9)$$

Зазначимо таке: якщо в теоремі 7.5.4 поміняти місцями змінні x та y, то доведено існування *повторного інтеграла* $\int\limits_c^d K(y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ і

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.10)$$

П р и к л а д 7.5.1. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, де $G=\{(x;y)\mid 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$.

● За формулою (7.5.9) отримаємо

$$\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg\|_0^1\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right)\Bigg\|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}. \qquad ❍$$

Зазначимо, що цей інтеграл можна обчислити за формулою (7.5.10).

Обчислення подвійного інтеграла у випадку довільної області. Множину $G=\{(x;y)\mid a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні функції, $y_1(x)\le y_2(x)$, $a\le x\le b$, будемо називати *областю, стандартною щодо осі Ox* (рис. 7.5.3).

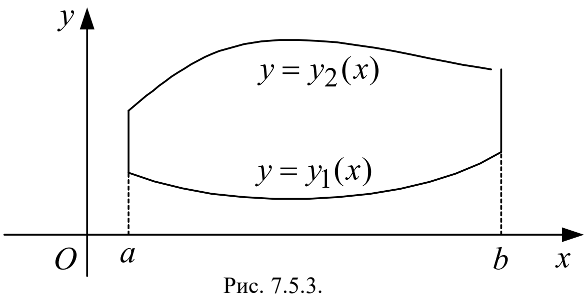

Рис. 7.5.3.

Множину $G=\{(x;y)\mid c\le y\le d;\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$, де $x_1(y)$ та $x_2(y)$ – неперервні функції, $x_1(y)\le x_2(y)$, $c\le y\le d$, будемо називати *областю, стандартною щодо осі Oy* (рис. 7.5.4).

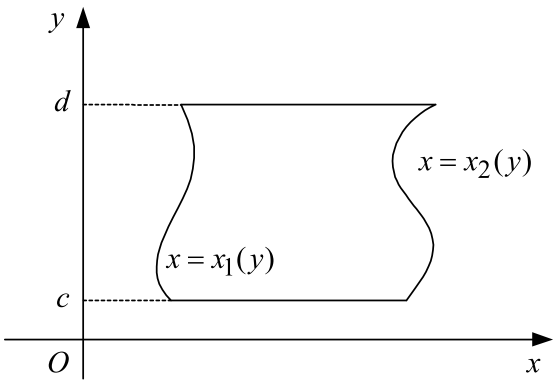

Рис. 7.5.4.

Теорема 7.5.5. Нехай функція $f(x,y)$ визначена й інтегрована в області $G=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні функції, $y_1(x)\le y_2(x)$, $a\le x\le b.$ Нехай для кожного $x\in[a;b]$ існує визначений інтеграл $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$ Тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \qquad (7.5.11)$$

Зазначимо таке: у випадку області, стандартної щодо осі Oy, можна довести, що існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(y)\,\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

і справджується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.12)$$

Якщо область G є стандартною щодо осей Ox та Oy (рис. 7.5.5),

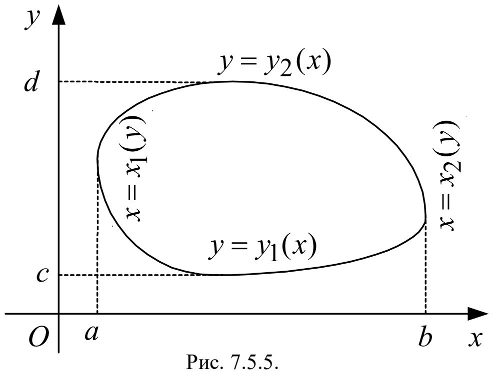

Рис. 7.5.5.

то можна застосовувати обидві формули (7.5.11) та (7.5.12). У цьому випадку отримаємо рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.13)$$

Якщо область G не є стандартною щодо осі Ox чи Oy, то потрібно розбити цю область прямими, паралельними до осей координат, на частини, кожна з яких є стандартною щодо осі Ox чи Oy, і зводити подвійний інтеграл до повторного на кожній частині (рис. 7.5.6).

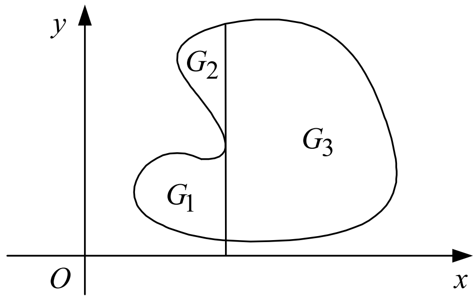

Рис. 7.5.6.

П р и к л а д 7.5.2. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_G \left(x+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, де область G обмежена кривими $y=x$ і $y=x^2$.

● Область G зображена на рис. 7.5.7.

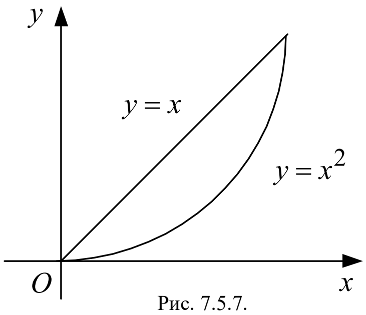

Рис. 7.5.7.

За формулою (7.5.11)

$$\iint_G \left(x+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}\left(x+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x}\right)\mathrm{d}\,x=$$

$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^6\right)\mathrm{d}\,x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{42}.$$ ❍

7.5.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Криволінійні координати. Нехай задано дві площини. У першій уведемо прямокутну систему координат Oxy, у другій – $O'uv$. Розглянемо у першій площині область G, у другій – Δ. Припустимо, що межа Γ та γ кожної з областей є кусково-гладкою функцією (рис. 7.5.8).

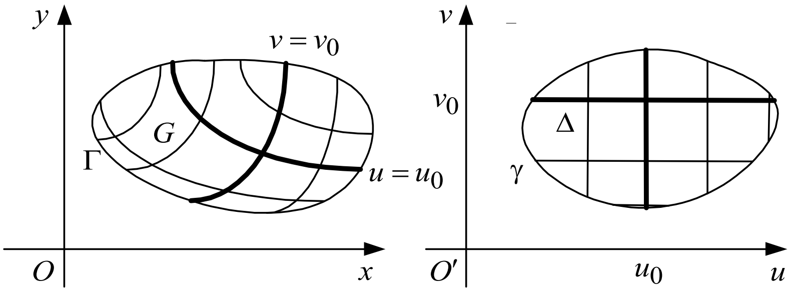

Рис. 7.5.8.

Нехай в області Δ задана система неперервних функцій

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v), \end{cases} \qquad (7.5.14)$$

яка кожній точці $M^*(u;v)$ області Δ ставить у відповідність одну точку $M(x;y)$ області G, причому жодна точка не буде пропущена. Якщо різним точкам $M^*(u;v)$ відповідають різні точки $M(x;y)$, і навпаки, то рівняння (7.5.14) можна однозначно розв'язати щодо змінних u і v, які є однозначними функціями змінних x та y в області G:

$$\begin{cases} u = u(x,y); \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{7.5.15}$$

Отже, між областями G і Δ є взаємно однозначна відповідність. Формули (7.5.14) виконують перетворення області Δ в область G, а формули (7.5.15) – обернене перетворення області G в область Δ. У цьому випадку точкам межі γ відповідають точки межі Γ, і навпаки.

Припустимо, що функції (7.5.14) мають неперервні похідні першого порядку. У цьому випадку функціональний визначник

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7.5.16}$$

є неперервною функцією від u,v в області Δ. Будемо вважати, що цей визначник завжди відмінний від нуля, а отже, внаслідок неперервності зберігає сталий знак. Зазначимо, що визначник (7.5.16) називають *якобіаном*.

Задані пари значень змінних u,v в області Δ однозначно визначають точку x,y в області G, і навпаки. Це дає підставу називати числа u,v координатами точки в області G.

Криву, складену з точок області G, у яких одна з координат зберігає стале значення, називають *координатною лінією*. Наприклад, прийнявши в (7.5.14) $v = v_0$, отримаємо параметричне зображення координатної лінії $x = x(u,v_0)$, $y = y(u,v_0)$. Оскільки координатні лінії в загальному випадку є кривими, то числа u,v, які характеризують положення точки в області G, називають *криволінійними координатами точки*. Надаючи координаті v різних можливих значень, отримаємо сім'ю координатних ліній на площині Oxy. Фіксуючи значення координати u, отримаємо іншу сім'ю координатних ліній. У випадку взаємно однозначної відповідності між областями різні лінії однієї й тієї ж сім'ї не перетинаються, і через кожну точку області G проходить по одній лінії з кожної сім'ї. Сітка координатних ліній на площині Oxy є зображенням сітки прямих $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на площині $O'uv$ (див. рис. 7.5.8).

Полярні координати. Важливим прикладом криволінійних координат є полярні координати ρ, φ, які уводять за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (7.5.17)$$

У цих формулах $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$. Деколи беруть $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Якобіан (7.5.16) у цьому випадку

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \qquad (7.5.18)$$

Теорема 7.5.6. Нехай: 1) функція $f(x,y)$ неперервна в області G; 2) перетворення (7.5.14) переводить замкнену обмежену область Δ у замкнену обмежену область G і є взаємно однозначним; 3) функції (7.5.14) мають в області Δ неперервні частинні похідні першого порядку, і якобіан (7.5.16) відмінний від нуля. Тоді

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \qquad (7.5.19)$$

Формулу (7.5.19) називають *формулою заміни змінних у подвійному інтегралі.*

П р и к л а д 7.5.3. Обчислимо інтеграл $\iint\limits_G (2x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, де G – паралелограм, обмежений прямими $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$.

● Побудуємо область G (рис. 7.5.9).

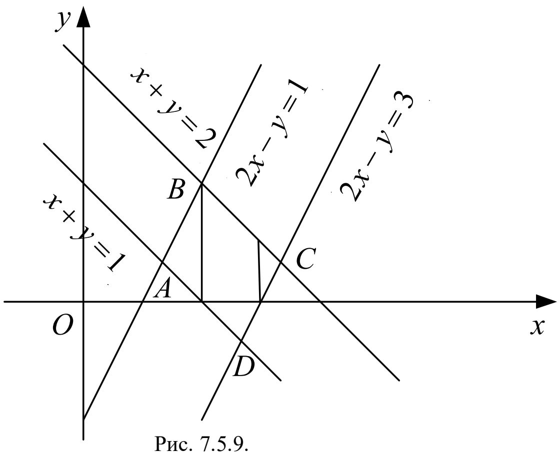

Рис. 7.5.9.

Зазначимо, що область $ABCD$ прямими, паралельними до осі Oy, можна розбити на три області, стандартні щодо осі Ox, і звести цей інтеграл до повторного. Цей спосіб громіздкий, тому використаємо заміну змінних у подвійному інтегралі. Уведемо нові змінні $x+y=u$, $2x-y=v$. Прямі $x+y=1$, $x+y=2$ переходять у прямі $u=1$, $u=2$ в системі координат $O'uv$, а прямі $2x-y=1$, $2x-y=3$ – у прямі $v=1$, $v=3$. Паралелограм G взаємно однозначно переходить у прямокутник Δ.

Виразимо x та y через змінні u, v: $x=\dfrac{u+v}{3}$, $y=\dfrac{2u-v}{3}$. Обчислимо якобіан:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}.$$

За формулою (7.5.19) отримаємо

$$\iint\limits_G (2x-y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Delta \frac{1}{3}v\,du\,dv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(\int\limits_1^3 v\,dv\right)du=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{v^2}{2}\bigg|_1^3\right)du=\frac{4}{3}\int\limits_1^2 du=\frac{4}{3}. \ ❍$$

7.5.4. Деякі геометричні застосування подвійних інтегралів

Обчислення об'єму криволінійного циліндра. З геометричного трактування подвійного інтеграла випливає, що об'єм криволінійного циліндра, обмеженого згори поверхнею $z=f(x,y)>0$, знизу площиною $z=0$ і з боків циліндричною поверхнею, напрямною якої є контур області G, а твірні паралельні до осі Oz, можна обчислити за формулою

$$V=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (7.5.20)$$

П р и к л а д 7.5.4. Обчислимо об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

● Тіло, обмежене заданими поверхнями, зображене на рис. 7.5.10.

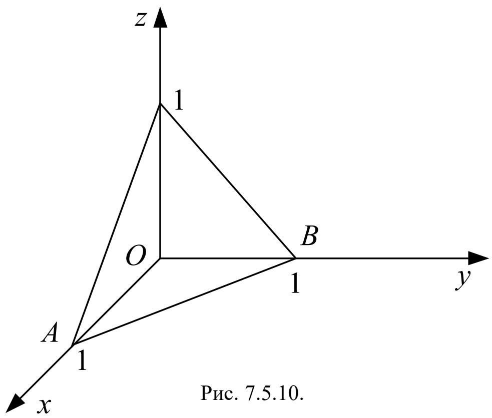

Рис. 7.5.10.

У нашому випадку $f(x, y) = 1 - x - y$. За формулою (7.5.20) об'єм тіла

$$V = \iint_G (1 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

де G – трикутник AOB, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$. Розставимо межі інтегрування у подвійному інтегралі:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}. \text{ ❍}$$

Обчислення площі плоскої фігури. Площу S області G можна обчислити за формулою $S = \iint_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Зазначимо, що ця формула універсальніша, ніж відповідна формула для площі криволінійної трапеції, яку обчислювали за допомогою визначеного інтеграла.

П р и к л а д 7.5.5. Обчислимо площу фігури, обмежену лініями $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$, $3x - 3y - 7 = 0$.

● З умови задачі випливає, що область G обмежена прямою $3x - 3y - 7 = 0$ і параболою $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$, або $(y+1)^2 = 3x$ з вершиною в точці $A(0;-1)$. З системи рівнянь

$$\begin{cases} (y+1)^2 = 3x; \\ y^2 + 2y - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

отримаємо точки $B\left(\frac{16}{3}; 3\right)$ та $C\left(\frac{1}{3}; -2\right)$ перетину цих ліній.

Обчислимо площу області G:

$$S = \int\limits_{-2}^{3}\left(\int\limits_{(y+1)^2/3}^{(7+3y)/3} \mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y = \int\limits_{-2}^{3}\left(\frac{7+3y}{3} - \frac{(y+1)^2}{3}\right)\mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{3}\left(7y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{(y+1)^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{125}{18}. \quad ❍$$

Задачі для самостійного розв'язування

7.5.1. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,\ \ 3 \le x \le 5,\ \ 0 \le y \le 1;$ 2) $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,\ \ 2 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 1.$

7.5.2. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=2;$ 2) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,\ \ y=0,\ \ y=x,\ \ x=1.$

7.5.3. Записати за допомогою подвійних інтегралів і обчислити площі фігур, обмежених лініями: 1) $xy=4,\ \ y=x,\ \ x=4;$ 2) $y=x^2,\ \ 4y=x^2,\ y=4.$

7.5.4. Побудувати області, площі яких виражають інтеграли, і змінити порядок інтегрування

1) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_x^{2-x^2} \mathrm{d}\,y;$ 2) $\int\limits_{-2}^0 \mathrm{d}y \int\limits_{y^2-4}^{9} \mathrm{d}\,x;$ 3) $\int\limits_0^4 \mathrm{d}x \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} \mathrm{d}\,y.$

7.5.5. Перейти до полярних координат і обчислити інтеграл:

$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y,\ \ D = \left\{(x;y) : x^2+y^2 = R^2,\ y \ge 0\right\}.$