7.2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

7.2.1. Похідні та диференціали першого порядку

Частинні похідні першого порядку. Нехай функція $u = f(x_1, x_2)$ визначена на деякій множині $\{M\}$ точок евклідового простору R^2. Нехай точка $M(x_1, x_2)$ – внутрішня точка множини $\{M\}$. Зафіксуємо значення аргументу x_2 і надамо аргументу x_1 деякого приросту Δx_1 такого, щоб точка $M'(x_1 + \Delta x_1, x_2)$ належала множині $\{M\}$. Запишемо в заданій точці $M(x_1, x_2)$ відношення частинного приросту $\Delta_{x_1} u$ до відповідного приросту аргументу Δx_1 :

$$\frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}.$$

Це відношення є функцією від Δx_1, яка визначена для всіх $\Delta x_1 \neq 0$.

Якщо існує границя відношення частинного приросту $\Delta_{x_1} u$ функції $u = f(x_1, x_2)$ в точці $M(x_1, x_2)$ до відповідного приросту Δx_1 аргументу x_1 при $\Delta x_1 \to 0$, то цю границю називають *частинною похідною* функції в точці *M* за аргументом x_1 і позначають одним із символів:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, u'_{x_1}, f'_{x_1}.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1}. \qquad (7.2.1)$$

Аналогічно можна дати означення частинної похідної функції за аргументом x_2, а також частинних похідних функцій багатьох змінних.

П р и к л а д 7.2.1. Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $u = \arcsin(x^2 \cdot y)$.

● За правилом відшукання похідної складеної функції отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 \cdot y)^2}} (x^2 \cdot y)'_x = \frac{2xy}{\sqrt{1 - x^4 y^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2 \cdot y\right)^2}} \left(x^2 \cdot y\right)_y' = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4 y^2}}. \qquad \circ$$

Економічна інтерпретація частинних похідних. Розглянемо виробничу функцію двох змінних $Y = F(K, L)$. Нехай основні фонди і затрати праці, відповідно, дорівнюють K_0 та L_0.

Відношення

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}$$

означає, яким є додатковий випуск продукції внаслідок зміни на одиницю основних фондів K_0 і за сталих затрат праці L_0. Припустимо, що існує частинна похідна функції $Y = F(K, L)$ в точці $M_0(K_0; L_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial K}\left(K_0; L_0\right) = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}.$$

Для малих ΔK виконується наближена рівність

$$\frac{\partial F}{\partial K}\left(K_0; L_0\right) \approx \frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}.$$

Якщо одиниці вимірювання K такі, що $\Delta K = 1$ можна вважати досить малою зміною основних фондів, то частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial K}\left(K_0; L_0\right)$ наближено дорівнює приросту, який отримає випуск $F(K_0, L_0)$ унаслідок додаткового вкладення одиниці основних фондів.

Частинну похідну $\frac{\partial F}{\partial K}$ називають *граничною фондовіддачею*, а $\frac{\partial F}{\partial L}$ – *граничною продуктивністю праці.*

П р и к л а д 7.2.2. Обчислимо граничну фондовіддачу і граничну продуктивність праці для виробничої функції Кобба–Дугласа $F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

● За означенням гранична фондовіддача

$$\frac{\partial F}{\partial K}\left(K, L\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(AK^{\alpha} L^{1-\alpha}\right) = A \cdot \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha},$$

а гранична продуктивність праці

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=\frac{\partial}{\partial L}\left(AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)=A\cdot(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}. \qquad ❍$$

Зазначимо, що для функції Кобба–Дугласа гранична фондовіддача і гранична продуктивність праці є функціями лише фондонасиченості $\frac{L}{K}$, тобто залежать лише від співвідношення між основними фондами K і затратами праці L.

Диференційованість функцій багатьох змінних. Нагадаємо, що повним приростом функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точці $M(x_1,x_2,...,x_n)$, який відповідає приростам Δx_1, $\Delta x_2,...,$ Δx_n аргументу, називають вираз

$$\Delta u=f\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n\right)-f\left(x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Функцію $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ називають *диференційованою* в заданій точці $M(x_1,x_2,...,x_n)$, якщо її повний приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta u=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+...+A_n\cdot\Delta x_n+\alpha_1\cdot\Delta x_1+...+\alpha_n\cdot\Delta x_n, \qquad (7.2.2)$$

де $A_1,A_2,...,A_n$ – числа, які не залежать від Δx_1, $\Delta x_2,...,$ Δx_n, а α_1, $\alpha_2,...,$ α_n – нескінченно малі при $\Delta x_i\to 0$, $i=1,2,...,n$ функції, які дорівнюють нулю при $\Delta x_i=0$, $i=1,2,...,n$.

Співвідношення (7.2.2) називають *умовою диференційованості* функції в заданій точці $M(x_1,x_2,...,x_n)$ евклідового простору R^n. Запишемо умову (7.2.2) в іншому вигляді. Розглянемо функцію

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_n^2},$$

яка є нескінченно малою при $\Delta x_i\to 0$, $i=1,2,...,n$. Оскільки $\frac{\Delta x_i}{\rho}\le 1$, $i=1,2,...,n$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i\right|\le\rho\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{|\alpha_i|\cdot|\Delta x_i|}{\rho}\le\rho\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|=o(\rho).$$

Отже, умову диференційованості (7.2.2) можна записати у вигляді

$$\Delta u=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+...+A_n\cdot\Delta x_n+o(\rho). \qquad (7.2.3)$$

Доведено, що умови (7.2.2) і (7.2.3) еквівалентні.

Якщо хоча б одне з чисел $A_1, A_2, ..., A_n$ відмінне від нуля, то сума $\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \Delta x_i$ є головною, лінійною щодо приростів аргументів Δx_i, $i = 1,2,...,n$ частиною приросту диференційованої функції. Зазначимо: якщо приріст функції в деякій точці можна записати у вигляді (7.2.2) чи (7.2.3) при $A_1 = A_2 = ... = A_n = 0,$ то функція диференційована в цій точці.

Наведемо необхідну умову диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.1. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то в цій точці існують частинні похідні функції за всіма аргументами, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i,\ i = 1,2,...,n, \tag{7.2.4}$$

де A_i визначають з умов (7.2.2) чи (7.2.3) диференційованості функції.

⏮ З умови (7.2.2) диференційованості функції в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ випливає, що її частинний приріст $\Delta_{x_i} u$ у цій точці можна записати у вигляді $\Delta_{x_i} u = A_i \cdot \Delta x_i + \alpha_i \cdot \Delta x_i$. Звідси $\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i$. Оскільки $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x_i = 0$, $i = 1,2,...,n$, то

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(A_i + \alpha_i\right) = A_i. \quad ⏭$$

З урахуванням (7.2.4) умову (7.2.3) диференційованості функції можна записати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\rho). \tag{7.2.5}$$

Оскільки $A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n,$ то зображення диференційованої функції у вигляді (7.2.2) і (7.2.3) єдине.

Теорема 7.2.2. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n),$ то вона неперервна в цій точці.

⏮ З умови (7.2.2) диференційованості функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \left(A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n\right) = 0,$$

що означає неперервність функції в точці $M(x_1, x_2,..., x_n)$. ⏭

Теореми 7.2.1 та 7.2.2 виражають необхідні умови диференційованості функції в точці. З цих теорем можна отримати достатні умови того, що функція недиференційована: якщо функція $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ не має хоча б однієї частинної похідної в точці $M(x_1, x_2,..., x_n)$, то вона недиференційована в цій точці; якщо функція $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ не є неперервною в деякій точці $M(x_1, x_2,..., x_n)$, то вона недиференційована в цій точці.

Для функцій однієї змінної існування похідної в точці є необхідною і достатньою умовою її диференційованості в цій точці, тому для функцій однієї змінної поняття "функція диференційована" та "існує похідна функції" тотожні. Для функцій багатьох змінних зв'язок між диференційованістю функції та існуванням частинних похідних складніший. Існування частинних похідних є лише необхідною, але не достатньою умовою диференційованості функції. Це означає, що існують функції, які в деякій точці мають усі частинні похідні, але не диференційовані в цій точці.

Наведемо достатні умови диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.3. Якщо функція $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ має частинні похідні за всіма аргументами в деякому околі точки $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2,..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, причому всі ці похідні неперервні в самій точці M_0, то функція диференційована в цій точці.

Сформулюємо теорему про диференціювання складеної функції двох змінних.

Теорема 7.2.4. Нехай функції (7.1.27) диференційовані в деякій точці $T_0\left(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2\right)$, а функція $u = f(x_1, x_2)$ диференційована у відповідній точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2\right)$, де $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i\left(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2\right)$, $i = 1,2$. Тоді складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f\big(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)\big)$$

диференційована в точці T_0. Частинні похідні цієї функції обчислюють за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}, \tag{7.2.6}$$

у яких частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ беруть у точці M_0, а частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}, \dfrac{\partial u}{\partial t_2}$ – у точці T_0.

Розглянемо випадок, коли в формулах (7.2.6) $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,2$. У цьому випадку маємо складену функцію однієї змінної t:

$$u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Похідну цієї складеної функції обчислюють за формулою

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}. \qquad (7.2.7)$$

П р и к л а д 7.2.3. Обчислимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \ln\left(u^2 + v^2\right)$, де $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

● За формулами (7.2.6) отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cdot y + \frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cdot x + \frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}. \qquad ❍$$

П р и к л а д 7.2.4. Нехай у виробничій функції Кобба–Дугласа $Y = F(K, L) = 4K^{0,25}\cdot L^{0,75}$ величини K та L залежать від часу: $K(t) = 6t^2 + 2{,}5$, $L(t) = 0{,}001t^2$. Визначимо швидкість зміни випуску продукції Y в момент часу $t = t_0$.

● За формулою (7.2.7)

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial F}{\partial K}(K, L)\cdot\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial L}(K, L)\cdot\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}(t_0) = \left(\frac{L}{K}\right)^{0,75} 12t_0 +$$

$$+3\left(\frac{K}{L}\right)^{0,25}\cdot 0{,}002t_0 = 12t_0\cdot\left(\frac{0{,}001t_0^2}{6t_0^2+2{,}5}\right)^{0,75} + 0{,}006t_0\cdot\left(\frac{6t_0^2+2{,}5}{0{,}001t_0^2}\right)^{0,25}. \qquad ❍$$

Однорідні функції. Функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задану на множині $\{M\}$, називають *однорідною функцією степеня p* на цій множині, якщо для кожної точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ множини $\{M\}$ і для кожного числа t такого, що точка $K(tx_1, tx_2, ..., tx_n)$ належить $\{M\}$, виконується нерівність

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (7.2.8)$$

Теорема 7.2.5 (теорема Ейлера про однорідні функції). Якщо в деякій області $\{M\}$ функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є диференційованою однорідною функцією степеня *p*, то в кожній точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ цієї області справджується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot x_n = p \cdot u. \qquad (7.2.9)$$

Повний диференціал функції багатьох змінних. *Диференціалом* диференційованої в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають головну, лінійну щодо приростів аргументу, частину приросту цієї функції в цій точці:

$$\mathrm{d}u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n. \qquad (7.2.10)$$

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n$, то вважають, що $\mathrm{d}u = 0$.

З теореми 7.2.1 маємо, що $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, тому диференціал функції можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \qquad (7.2.11)$$

Диференціалом $\mathrm{d}x_i$ незалежної змінної x_i називають приріст Δx_i цієї змінної. Тоді диференціал функції багатьох змінних можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n. \qquad (7.2.12)$$

Зазначимо таке: формулу (7.2.12) записали, припустивши, що аргументи $x_1, x_2, ..., x_n$ є незалежними змінними.

Доведено, що вигляд першого диференціала функції багатьох змінних не змінюється у випадку, коли аргументи x_i є функціями деяких інших змінних.

Властивість інваріантності форми першого диференціала дає змогу вивести правила диференціювання. Нехай *u* та *v* – диференційовані функції багатьох змінних. Тоді

$$\mathrm{d}(Cu) = C \cdot \mathrm{d}u, \quad C = \mathrm{const};$$

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(u \cdot v) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u; \qquad (7.2.13)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}.$$

П р и к л а д 7.2.5. У точці $M(0;1)$ обчислимо диференціал функції

$$u = \ln(x^2 + y^2 + xy).$$

● Обчислимо частинні похідні функції в точці $M(0;1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+y^2+xy},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y+x}{x^2+y^2+xy},\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Отже,

$$\mathrm{d}u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y. \qquad ❍$$

Похідна за напрямом. Градієнт. Нехай функція $u = f(M)$ двох змінних задана в деякому околі точки $M(x;y)$. Розглянемо деякий напрям, який характеризує одиничний вектор $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ (рис. 7.2.1).

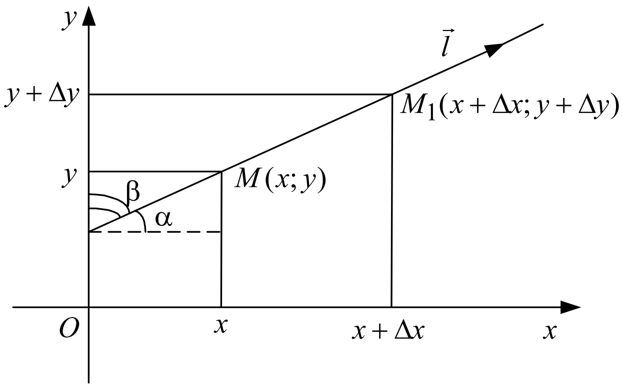

Рис. 7.2.1.

На прямій, яка проходить у напрямі $\vec{l}$, виберемо точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$ так, що довжина Δl відрізка MM_1 дорівнює $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Приріст функції $f(M)$ має вигляд

$$\Delta u = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y),$$

де $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta$. Нехай функція $f(M)$ диференційована в точці $M(x;y)$. Приріст цієї функції запишемо у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta l) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + o(\Delta l).$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δl і перейдемо в отриманому виразі до границі при $\Delta l \to 0$.

Границю відношення $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ називають *похідною функції* $u = f(M)$ *в точці* $M(x;y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Отже, отримаємо похідну за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta. \qquad (7.2.14)$$

Аналогічно, для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ похідну за напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n)$ визначають за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n, \qquad (7.2.15)$$

де $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + ... + \cos^2\alpha_n = 1$.

Приклад 7.2.6. Обчислимо похідну функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точці $M(1;3;4)$, якщо напрям збігається з радіусом-вектором цієї точки.

● Визначимо координати одиничного вектора, який задає цей напрям. Радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = (1;3;4)$ має довжину $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{26}$. Тоді $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \dfrac{4}{\sqrt{26}}$. За формулою (7.2.15) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{2x + 6y - 8z}{\sqrt{26}}.$$

Обчислимо похідну за заданим напрямом у точці $M(1;3;4)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 3 - 8\cdot 4}{\sqrt{26}} = -\frac{12}{\sqrt{26}}. \qquad ❍$$

Розглянемо функцію трьох змінних $u = f(M)$, яка диференційована в деякій точці $M(x; y; z)$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ називають вектор, координати якого дорівнюють, відповідно, частинним похідним $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ у цій точці, і позначають

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \tag{7.2.16}$$

Похідну за напрямом можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} u}, \tag{7.2.17}$$

тобто похідна за напрямом є скалярним добутком векторів $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}$.

Градієнт функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначають за формулою

$$\nabla u = \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}. \tag{7.2.18}$$

У цьому випадку для похідної за напрямом справджується формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} u}. \tag{7.2.19}$$

Перепишемо формулу $\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} u}$ у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \left|\vec{l}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{7.2.20}$$

де φ – кут між векторами $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}$. Оскільки $\left|\vec{l}\right| = 1$, то з рівності (7.2.20) випливає, що похідна за напрямом набуває найбільшого значення, якщо $\varphi = 0$, тобто коли напрями векторів $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}$ збігаються. У цьому випадку

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right|. \tag{7.2.21}$$

З цієї рівності випливає, що градієнт функції характеризує напрям і значення найбільшої швидкості зростання функції в точці.

Доведемо, що у випадку функції двох змінних $y = f(x, y)$ градієнт у точці $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярний дотичній до лінії рівня L, яка проходить через цю точку (рис. 7.2.2).

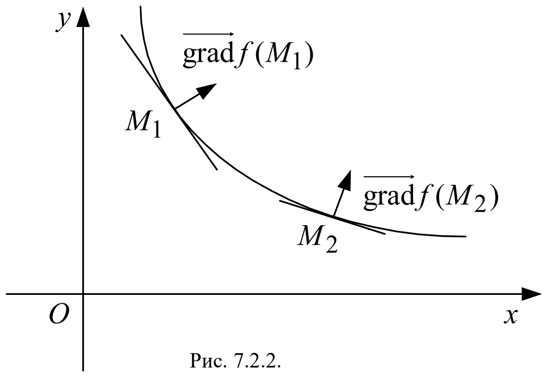

Рис. 7.2.2.

Нехай лінія рівня має рівняння $f(x, y) = C$. Розв'яжемо це рівняння щодо y: $y = g(x)$. Вектор дотичної до лінії рівня має координати $\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Запишемо диференціал функції на лінії рівня:

$$\mathrm{d}u\Big|_L = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = \overrightarrow{\mathrm{grad}\,u} \cdot \vec{s} = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$ та $\vec{s}$ перпендикулярні, тобто в заданій точці градієнт перпендикулярний до лінії рівня.

Аналогічно, для функції багатьох змінних у заданій точці градієнт перпендикулярний до множини рівня.

Приклад 7.2.7. Для функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ обчислимо градієнт і його модуль у точці $M(5;2;3)$.

- Обчислимо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}.$$

Градієнт функції

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}} \right\}.$$

У точці $M(5;2;3)$: $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}\Big|_M = \left\{ \frac{5}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}, -\frac{3}{\sqrt{20}} \right\}$, $\left| \overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}\Big|_M \right| = \sqrt{1{,}9}$. ❍

7.2.2. Похідні і диференціали вищих порядків

Частинні похідні вищих порядків. Нехай у кожній точці множини $\{M\}$ – області визначення функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, існує частинна похідна $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Ця похідна, що є функцією змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, теж визначена в області $\{M\}$. Якщо функція $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в точці M має частинну похідну за аргументом x_k, то цю частинну похідну називають *частинною похідною другого порядку*, або *другою частинною похідною*, функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці M спочатку за аргументом x_i, а потім за аргументом x_k і позначають

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \ f''_{x_i x_k}, u''_{x_i x_k}. \qquad (7.2.22)$$

Якщо $i \neq k$, то похідну називають *мішаною* частинною похідною другого порядку; якщо $i = k$, то частинну похідну другого порядку позначають

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \ f''_{x^2}, \ u''_{x^2}. \qquad (7.2.23)$$

Після того, як визначене поняття частинної похідної другого порядку, можна послідовно ввести поняття частинних похідних третього, четвертого і вищих порядків. Нехай уведене поняття частинної похідної (m – 1)-го порядку функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за аргументами $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{(m-1)}}$, причому деякі або всі індекси можуть збігатися. Якщо ця похідна (m – 1)-го порядку має в точці M частинну похідну за аргументом x_{i_m}, то цю похідну називають *частинною похідною m-го порядку*, або *m-ю частинною похідною*, функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за аргументами $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{(m-1)}}, x_{i_m}$ і позначають

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_m} \partial x_{i_{(m-1)}} ... \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{i_{(m-1)}} ... \partial x_{i_1}} \right). \qquad (7.2.24)$$

Отже, ми ввели поняття частинної похідної m-го порядку індуктивно, переходячи від похідної першого порядку до наступних похідних.

Якщо не всі індекси $i_1, i_2, ..., i_m$ дорівнюють один одному, то похідну називають *мішаною* похідною m-го порядку; якщо $i_1 = i_2 = ... = i_m$, то частинну похідну позначають

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}. \qquad (7.2.25)$$

Оскільки частинну похідну функції за аргументом x_i визначають як звичайну похідну функції однієї змінної x_i за фіксованих значень інших змінних, то для обчислення частинних похідних вищих порядків використовують правила обчислення похідних першого порядку.

П р и к л а д 7.2.8. Обчислимо частинні похідні другого порядку функції $u = x^2 y + xy^3$.

● Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + y^3, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3xy^2.$$

На підставі означення частинних похідних вищих порядків обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2y; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 6xy; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x + 3y^2. \qquad ❍$$

У цій задачі мішані частинні похідні другого порядку однакові, тобто $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, що не завжди справджується, тобто значення частинних похідних залежать від послідовності диференціювання.

Уведемо поняття *m* разів диференційованої функції багатьох змінних. Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *m* разів диференційованою в точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, якщо всі її частинні похідні (*m* – 1)-го порядку диференційовані в цій точці.

З означення *m*-разової диференційованості функції багатьох змінних і теореми 7.2.3 про достатні умови диференційованості функції отримаємо достатні умови *m*-разової диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.6. Для того, щоб функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ була *m* разів диференційованою в точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, достатньо, щоб усі її частинні похідні *m*-го порядку були неперервні в цій точці.

Достатні умови незалежності значень мішаних похідних від порядку диференціювання дають такі теореми.

Теорема 7.2.7. Нехай функція $u = f(x, y)$ двічі диференційована в точці $M(x; y)$. Тоді в цій точці $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Теорема 7.2.8. Нехай у деякому околі точки $M(x; y)$ функція $u = f(x, y)$ має частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Якщо частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ неперервні в цій точці, то вони однакові, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічна теорема справджується для функцій багатьох змінних.

Теорема 7.2.9. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована m разів у точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$. Тоді в цій точці значення будь-якої мішаної похідної m-го порядку не залежить від порядку, у якому відбуваються послідовні диференціювання.

Диференціали вищих порядків. Нехай функція $u = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x, y)$ і в деякому околі цієї точки. Диференціал функції в цій точці має вигляд

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Цей диференціал називають диференціалом першого порядку, або першим диференціалом функції $u = f(x, y)$. Для позначення диференціалів, крім символів $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ та $\mathrm{d}u$, будемо використовувати символи δx, δy, δu. Нехай функція $u = f(x, y)$ двічі диференційована в точці $M(x, y)$. Будемо вважати, що $\mathrm{d}x$ та $\mathrm{d}y$ сталі. У цьому випадку диференціал першого порядку $\mathrm{d}u$ є диференційованою в точці $M(x, y)$ функцією змінних x та y. Її диференціал у точці $M(x, y)$ має вигляд

$$\delta(\mathrm{d}u) = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\delta y.$$

Цей вираз при $\delta x = \mathrm{d}\,x$, $\delta y = \mathrm{d}\,y$ називають *диференціалом другого порядку*, або *другим диференціалом*, функції $u = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ і позначають $\mathrm{d}^2 u$. Виконаємо диференціювання в останній формулі і врахуємо рівність других мішаних похідних, отримаємо

$$\mathrm{d}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{d}\,x)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathrm{d}\,y)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}\,x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}\,y^2. \qquad (7.2.26)$$

Нехай функція $u = f(x, y)$ диференційована m разів у точці $M(x, y)$ і введене поняття диференціала $(m-1)$-го порядку, тобто $\mathrm{d}^{(m-1)} u$. Значення $\delta\left(\mathrm{d}^{(m-1)} u\right)$ диференціала від диференціала $\mathrm{d}^{(m-1)} u$, взяте при $\delta x = \mathrm{d}\,x$, $\delta y = \mathrm{d}\,y$, називають диференціалом m-го порядку, або m-м *диференціалом*, функції $u = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ і позначають $\mathrm{d}^m u$.

Вираз для першого і другого диференціалів зручно записувати у символьному вигляді. Для цього введемо оператор диференціала першого порядку

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y. \qquad (7.2.27)$$

Визначимо оператор d^2 як наслідок піднесення d до другого степеня:

$$\mathrm{d}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{d}\,x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{d}\,y^2. \qquad (7.2.28)$$

З використанням (7.2.28) формулу (7.2.26) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y\right)^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{d}\,x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{d}\,y^2\right) u. \qquad (7.2.29)$$

Аналогічно можна ввести диференціал третього порядку

$$\mathrm{d}^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y\right)^3 u =$$

$$= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathrm{d}\,x^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}\,x^2\,\mathrm{d}\,y + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\mathrm{d}\,y^3\right) u. \qquad (7.2.30)$$

У формулах (7.2.29), (7.2.30) після формального підняття до степеня досить формально перемножити функцію u на всі доданки в дужках, щоб отримати вирази для відповідного диференціала. Ці формули нагадують розклад за формулою бінома Ньютона. Вираз для диференціала m-го порядку запишемо у вигляді

$$\mathrm{d}^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y\right)^m u = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \mathrm{d}\,x^k\, \mathrm{d}\,y^{m-k}. \qquad (7.2.31)$$

Аналогічно можна ввести поняття диференціалів вищих порядків для функцій багатьох змінних.

Як видно з (7.2.31), диференціал m-го порядку є однорідним поліномом m-го порядку щодо $\mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y$.

Зазначимо, що для диференціала порядку $m \geq 2$ не справджується властивість інваріантності форми.

Приклад 7.2.9. Обчислимо диференціал другого порядку для функції $u = x^y$ в точці $M_0(1;0)$.

● Обчислимо частинні похідні першого порядку цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Обчисливши частинні похідні від частинних похідних першого порядку отримаємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x); \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

Обчислимо значення похідних другого порядку в точці $M_0(1;0)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = 1, \; \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 0.$$

Підставимо ці значення в формулу (7.2.26):

$$\left.\mathrm{d}^2 u\right|_{M_0} = 2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \qquad ❍$$

Формула Тейлора для функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.10. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена і $m+1$ разів диференційована в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, то для всіх точок цього околу її приріст можна записати у вигляді

$$\Delta u = \mathrm{d}u\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 u\Big|_{M_0} + ... + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m u\Big|_{M_0} + R_m(M'); \qquad (7.2.32)$$

де

$$R_m(M') = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} u\Big|_{M'}. \qquad (7.2.33)$$

Формулу (7.2.32) називають формулою Тейлора для функції $u = f(M)$ з центром розкладу в точці M_0 з залишковим членом $R_m(M')$ у формі Лагранжа.

У випадку функції двох змінних ця формула має вигляд

$$\Delta f(x_0, y_0) = \mathrm{d} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (7.2.34)$$

Формулу (7.2.34) називають формулою Тейлора для функції $u = f(x, y)$ з залишковим членом у формі Лагранжа

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Цю формулу можна записати у вигляді

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (7.2.35)$$

Якщо $R_m = o(\rho^m)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то отримаємо формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.

Для $m = 0$ з формули (7.2.34) отримаємо

$$\Delta f(x_0, y_0) = \mathrm{d} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \; 0 < \theta < 1,$$

або

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x +$$
$$+ f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta<1.$$

Цю формулу називають *формулою скінченних приростів*, або *формулою Лагранжа*, для функції двох змінних.

Формулу Тейлора використовують для наближених обчислень. Абсолютну похибку Δ оцінюють через залишковий член у формі Лагранжа.

Наприклад, для $m=1$ отримаємо

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d} f(x_0, y_0),$$

причому абсолютна похибка $\Delta \le \max\limits_{(x,y)\in D} \frac{1}{2!}\left|\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)\right|$.

Для $m=2$ отримаємо $\Delta f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$, причому $\Delta \le \max\limits_{(x,y)\in D} \frac{1}{3!}\left|\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0)\right|$.

Приклад 7.2.10. Розвинемо функцію $u = f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1;0)$ до членів другого порядку включно.

● Знайдемо частинні похідні другого порядку цієї функції в точці M_0:

$$u\Big|_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = \left(\frac{2y}{x^3} + \frac{y^2}{x^4}\right)e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^3}\right)e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0} = -1.$$

Далі $\Delta x = x-1$, $\Delta y = y$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $R_2(x,y) = o(\rho^2) = o\left((x-1)^2+y^2\right)$. Підставимо отримані вирази у формулу (7.2.35), отримаємо

$$e^{\frac{y}{x}} = 1 + 0\cdot(x-1) + 1\cdot y - \frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot(-1)(x-1)\cdot y + 1\cdot y^2\right) +$$
$$+ o\left((x-1)^2+y^2\right) = 1 + y - (x-1)y + \frac{1}{2}y^2 + o\left((x-1)^2+y^2\right).$$

❍

7.2.3. Локальний екстремум функцій багатьох змінних

Необхідні умови локального екстремуму. Нехай функція багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ евклідового простору R^n. Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум* (*локальний мінімум*), якщо існує такий δ-окіл точки M_0, що для всіх точок M з цього околу виконується нерівність $f(M_0) \geq f(M)$ $\left(f(M_0) \leq f(M)\right)$. У цьому випадку точку M_0 називають точкою *локального максимуму* (*локального мінімуму*), а число $f(M_0)$ – *локальним максимумом* (*локальним мінімумом*). Точки локального максимуму (мінімуму) називають точками *локального екстремуму.*

З означення локального екстремуму випливає таке: якщо в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \leq 0$, то в точці M_0 функція має локальний максимум; якщо в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \geq 0$, то в точці M_0 функція має локальний мінімум. Якщо ж в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0)$ може змінювати знак, то ця точка не є точкою екстремуму функції $u = f(M)$.

Визначимо необхідні умови існування локальних екстремумів функції.

Теорема 7.2.11 (необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ часткові похідні першого порядку за всіма змінними $x_1, x_2, ..., x_n$ і має в цій точці локальний екстремум, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0,\ ...,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) = 0. \qquad (7.2.36)$$

⏮ Зафіксуємо всі, крім першого, аргументи функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто візьмемо $x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,\ ...,\ x_n = x_n^0$. У цьому випадку отримаємо функцію однієї змінної $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$. Оскільки за умовою теореми функція $u = f(M)$ має локальний екстремум у точці M_0, то функція однієї змінної $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ має локальний екстремум у точці $x_1 = x_1^0$. З необхідної умови екстремуму функції однієї змінної маємо, що її похідна в цій точці дорівнює нулю. Похідна цієї функції однієї змінної в точці $x_1 = x_1^0$ збігається з частинною похідною $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, тому $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0.$

Аналогічно можна довести решту рівностей у (7.2.36). ⏭

Зазначимо, що умови рівності нулю в точці M_0 усіх частинних похідних першого порядку є необхідними, але не достатніми умовами локального екстремуму в цій точці. Наприклад, для функції $u = f(x, y) = xy$ частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$ в точці $M_0(0;0)$ дорівнюють нулю, але в цій точці функція не має екстремуму. Справді, $f(M_0) = 0,$ але в будь-якому околі цієї точки функція набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Точки, в яких усі частинні похідні першого порядку функції $u = f(M)$ дорівнюють нулю, називають *стаціонарними точками* цієї функції. В кожній стаціонарній точці функція $u = f(M)$ може мати локальний екстремум, а може і не мати. Очевидно, для відшукання всіх стаціонарних точок функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ досить розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0; \\ \text{.........................}; \\ \dfrac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

З теореми 7.2.11 отримаємо інший вигляд необхідних умов локального екстремуму.

Теорема 7.2.12. Якщо функція $u = f(M)$ диференційована в точці M_0 і має в цій точці локальний екстремум, то її диференціал $\mathrm{d}u\Big|_{M_0}$ у цій точці дорівнює нулю, тобто

$$\mathrm{d}u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_n = 0. \quad (7.2.37)$$

Достатні умови локального екстремуму. Нехай функція $u = f(M)$ тричі диференційована в стаціонарній точці M_0. Тоді за формулою Тейлора приріст функції в околі цієї точки

$$\Delta u(M_0) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(M_0) + o\left(\rho^2\right). \quad (7.2.38)$$

Доведено таке: якщо аргументи двічі диференційованої функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є незалежними змінними або лінійними функціями деяких незалежних змінних, то другий диференціал цієї функції в заданій точці M_0 є квадратичною формою щодо диференціалів аргументів $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n$:

$$\mathrm{d}^2 u\Big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k\,, \tag{7.2.39}$$

де

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0). \tag{7.2.40}$$

Матрицю цієї квадратичної форми називають матрицею Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \tag{7.2.41}$$

На підставі (7.2.38) можна стверджувати, що знак приросту $\Delta u(M_0)$ функції в достатньо малому околі точки M_0 визначений знаком її другого диференціала (7.2.39). Наведемо без доведення теорему, яка дає достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема 7.2.13 (достатні умови існування локального екстремуму). Нехай функція $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ один раз диференційована в деякому околі стаціонарної точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ і двічі диференційована в самій точці M_0. Якщо другий диференціал цієї функції є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від змінних $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n$, то функція $u = f(M)$ має в точці M_0 локальний мінімум (максимум). Якщо другий диференціал є знакозмінною квадратичною формою, то функція $u = f(M)$ в точці M_0 не має локального екстремуму.

Якщо другий диференціал функції в стаціонарній точці є квазізнаковизначеною квадратичною формою, то функція може мати локальний екстремум у цій точці, а може і не мати його. В цьому випадку проводять додаткові дослідження, зокрема, використовуючи диференціали вищих порядків.

На практиці часто трапляється задача про відшукання екстремуму функції двох змінних $u = f(M) = f(x, y)$. Позначимо значення частинних похідних другого порядку цієї функції в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$, відповідно, через a_{11}, a_{12}, a_{22}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = a_{12}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = a_{22}. \qquad (7.2.42)$$

Теорема 7.2.14. Нехай функція $u = f(x, y)$ один раз диференційована в околі стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ і двічі диференційована в самій точці M_0. Тоді якщо в точці M_0 виконується умова

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0, \qquad (7.2.43)$$

то функція $u = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ локальний екстремум, а саме: максимум у випадку $a_{11} < 0$ і мінімум у випадку $a_{11} > 0$. Якщо в точці M_0 виконується умова $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то функція не має локального екстремуму в цій точці.

Приклад 7.2.11. Дослідимо функцію $u = x^3 - 3x^2 y + y^4 + 2$ на локальний екстремум.

● Щоб знайти стаціонарні точки функції, визначимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + 4y^3$$

та прирівняємо їх до нуля. Розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0; \\ -3x^2 + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

є дві стаціонарні точки $M_1(6;3)$ та $M_2(0;0)$.

Визначимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2.$$

У точці $M_1(6;3)$ матриця Гессе диференціала другого порядку має вигляд

$$H(x; y)\Big|_{M_1(6;3)} = \begin{pmatrix} 6x - 6y & -6x \\ -6x & 12y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -36 \\ -36 & 108 \end{pmatrix},$$

а її головні мінори $a_{11} = 18$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 648$ є додатними.

Отже, на підставі теореми 7.2.14 у точці $M_1(6;3)$ функція має локальний мінімум

$$u_{\min} = u(6;3) = 6^3 - 3\cdot 6\cdot 3^2 + 3^4 + 2 = -25.$$

У точці $M_2(0;0)$ матриця Гессе диференціала другого порядку

$$H(x;y)\Big|_{M_2(0;0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому в цій точці функція потребує додаткових досліджень. Обчислимо приріст функції в точці $M_2(0;0)$:

$$\Delta u(0;0) = \mathrm{d}u(0;0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 u(0;0) + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 u(0;0) + o\left(\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3\right) =$$

$$= \Delta x^3 - 3\Delta x^2 \Delta y + o\left(\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3\right).$$

Очевидно, що приріст функції в околі точки $M_2(0;0)$ змінює знак, тому в цій точці функція не має екстремуму. ❍

Глобальний екстремум функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена і неперервна в деякій обмеженій і замкненій області D евклідового простору і має в цій області обмежені частинні похідні першого порядку, можливо, за винятком окремих точок. За другою теоремою Вейєрштрасса, в області D ця функція досягає найбільшого та найменшого значення. *Глобальним*, або *абсолютним*, екстремумом функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в замкненій області D називають її найбільше або найменше значення в цій області. Функція може досягати глобального екстремуму або в точках локальних екстремумів, або на межі області D. Тому, щоб знайти глобальний екстремум функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в замкненій області D, потрібно знайти всі точки можливого локального екстремуму всередині області та на її межі, обчислити значення функції в кожній з цих точок і вибрати серед обчислених значень найбільше і найменше.

П р и к л а д 7.2.12. Знайдемо найменше і найбільше значення функції $u = 4x^2 + y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

● Визначимо точки можливого екстремуму всередині круга. Для цього обчислимо похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x} = 8x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ і прирівняємо їх до нуля. Отримаємо єдину стаціонарну точку $O(0;0)$, яка лежить усередині цього круга. Значення функції в цій точці $u(0,0) = 0$. На межі круга $y^2 = 1 - x^2$, тому $u = 1 + 3x^2, -1 \le x \le 1$. Очевидно, що на межі круга $u_{\text{найм}} = 1$, $u_{\text{найб}} = 4$. Отже, найбільше значення $u_{\max}=4$ функція набуває на межі області, а найменше $u_{\min}=0$ – усередині області.

7.2.4. Метод найменших квадратів

У різних дослідженнях доводиться використовувати емпіричні формули, які дають змогу аналітично зображати результати статистичного опрацювання експерименту. Нехай є результати $u_1, u_2, ..., u_n$ спостережень у точках M_1, M_2, ..., M_n над деякою величиною *u*. Потрібно підібрати таку функцію $u=f(M)$, щоб вона найточніше відображала залежність величини *u* від точок M_1, M_2, ..., M_n.

Задача відшукання емпіричних формул складається з двох етапів:

1) визначають загальний вигляд залежності $u=f(M)$ з точністю до невідомих параметрів, які є в цій залежності;
2) ці невідомі параметри підбирають так, щоб у точках спостереження M_1, M_2, ..., M_n значення функції $u=f(M)$ найменше відрізнялися від спостережуваних значень $u_1, u_2, ..., u_n$.

Нехай унаслідок аналізу результатів досліджень визначили, що спостережувані значення $u_1, u_2, ..., u_n$ в точках M_1, M_2, ..., M_n бажано наблизити емпіричною формулою

$$u=f(M)=a_1\varphi_1(M)+a_2\varphi_2(M)+...+a_m\varphi_m(M), \qquad (7.2.44)$$

де $a_1, a_2, ..., a_m$ – невідомі параметри. Виберемо ці параметри так, щоб у точках спостереження M_1, M_2, ..., M_n значення функції $u=f(M)$ найменше відрізнялися від спостережуваних значень $u_1, u_2, ..., u_n$ (рис. 7.2.3).

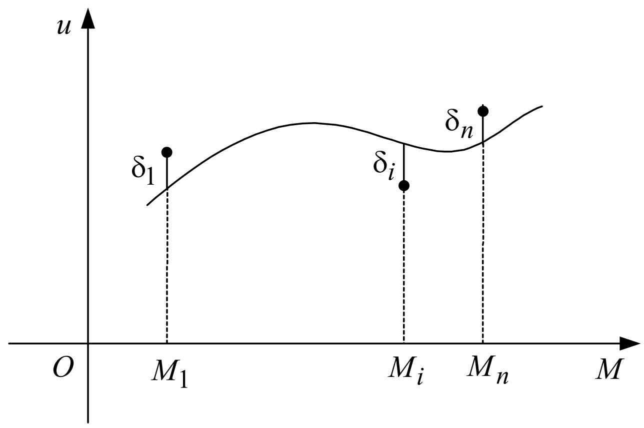

Рис. 7.2.3.

Позначимо ці відхилення через δ_i. Метод найменших квадратів полягає в мінімізації суми квадратів відхилень як функції параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$:

$$S(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i - f(M_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(M_i) \right)^2 .$$

Обчислимо частинні похідні цієї функції і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(M_i) \right) \cdot \varphi_j(M_i) = 0, \quad j = 1,2,...,m.$$

Звідси отримаємо систему m лінійних рівнянь для визначення невідомих параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$:

$$\begin{cases} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + ... + A_{1m}a_m = B_1; \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + ... + A_{2m}a_m = B_2; \\ ....; \\ A_{m1}a_1 + A_{m2}a_2 + ... + A_{mm}a_m = B_m, \end{cases} \qquad (7.2.45)$$

де

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(M_i) \cdot \varphi_k(M_i), \;\; B_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_j(M_i), \;\; j,k = 1,2,...,m. \quad (7.2.46)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь і отримаємо стаціонарну точку $N(a_1; a_2; ...; a_m)$. Доведено, що функція $S(a_1, a_2, ..., a_m)$ в цій стаціонарній точці досягає найменшого значення.

Під час опрацювання результатів спостережень найчастіше використовують наближення лінійною або квадратичною функцією однієї змінної. У цьому випадку маємо набір значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_n$ і набір значень функції $y_1, y_2, ..., y_n$. У випадку лінійної функції емпірична формула (7.2.44) має вигляд

$$y = ax + b.$$

Система рівнянь (7.2.45) у цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b = B_1; \\ A_{21}a + A_{22}b = B_2, \end{cases} \qquad (7.2.47)$$

де

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad A_{22} = n, \quad B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \quad B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \quad (7.2.48)$$

У випадку квадратичної функції емпірична формула (7.2.44) має вигляд

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Система рівнянь (7.2.45) у цьому разі така:

$$\begin{cases} A_{11} \cdot a + A_{12} \cdot b + A_{13} \cdot c = B_1; \\ A_{21} \cdot a + A_{22} \cdot b + A_{23} \cdot c = B_2; \\ A_{31} \cdot a + A_{32} \cdot b + A_{33} \cdot c = B_3, \end{cases} \quad (7.2.49)$$

де

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^4, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad A_{13} = A_{31} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad A_{22} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$A_{23} = A_{32} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad A_{33} = n, \quad B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \quad B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \quad B_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \quad (7.2.50)$$

П р и к л а д 7.2.13. Менеджер з реклами фірми досліджував залежність збуту продукції y (тис. штук) від витрат на рекламу x (тис. грн):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Припустимо, що між змінними x та y існує квадратична залежність $y = ax^2 + bx + c$, і обчислимо значення параметрів.

● За формулами (7.2.50) обчислимо $A_{11} = 979$, $A_{12} = 225$, $A_{13} = 55$, $A_{21} = 225$, $A_{22} = 55$, $A_{23} = 15$, $A_{31} = 55$, $A_{32} = 15$, $A_{33} = 5$, $B_1 = 680{,}2$, $B_2 = 169{,}8$, $B_3 = 49{,}0$.

Підставимо обчислені коефіцієнти в систему (7.2.49):

$$\begin{cases} 969 \cdot a + 225 \cdot b + 55 \cdot c = 680{,}2; \\ 225 \cdot a + 55 \cdot b + 15 \cdot c = 169{,}8; \\ 55 \cdot a + 15 \cdot b + 5 \cdot c = 49{,}0. \end{cases}$$

Методом Гаусса знайдемо розв’язок цієї системи: $a = 0{,}3$, $b = 0{,}48$, $c = 5{,}06$.

Отже, залежність збуту продукції від витрат на рекламу має вигляд $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06$. ❍

Задачі для самостійного розв'язування

7.2.1. Обчислити частинні похідні першого порядку функцій:

1) $u = x^3 + 3x^2 y - y^3$; 2) $u = \dfrac{xy}{x-y}$; 3) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 4) $u = \sin(x+y)$;

5) $u = x^2 \sin y$; 6) $u = xye^{x+2y}$; 7) $u = e^{-x/y}$; 8) $u = \left(3x^2y^2 - 1\right)^4$; 9) $u = 2^{x^2 y^4}$;

10) $u = \arcsin x\sqrt{y}$; 11) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; 12) $u = x^y$.

7.2.2. Довести, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$, якщо $z = \sqrt{x}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$.

7.2.3 Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

1) $z = \dfrac{y}{x}$; 2) $z = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$; 3) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$; 4) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; 5) $z = \sin(xy)$.

7.2.4. Обчислити $\mathrm{d}u$ і Δu для функції $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, якщо x змінюється від 2 до 2,1 а y – від 1 до 0,9.

7.2.5. Обчислити наближено зміну функції $z = \dfrac{x+3y}{y-3x}$, якщо x змінюється від $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ і y від $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.

7.2.6. Обчислити наближено:

1) $\sqrt{(6{,}02)^2 + (7{,}97)^2}$; 2) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$; 3) $1{,}04^{2{,}02}$; 4) $0{,}98^{3{,}03}$.

7.2.7. Обчислити $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, якщо:

1) $z = x^2 + xy^2$, $x = e^{2t}$, $y = \sin t$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

7.2.8. Обчислити $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо:

1) $z = \dfrac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$; 2) $z = x^2 y^2$, $x = u + v$, $y = \dfrac{u}{v}$.

7.2.9. Обчислити похідну функції $z = x^3 y - 5xy^2 + 8$ в точці $M(1;1)$ у напрямі бісектриси першого координатного кута.

7.2.10. Обчислити похідну функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $M(1;1;1)$ у напрямі $\vec{l} = \left(\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ\right)$. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}\, u}$ у цій точці.

7.2.11. Обчислити похідну функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в точці $M(2;3;6)$, у напрямі $\vec{l} = (1;2;-2)$.

7.2.12. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}\, u}$ і $\left|\overrightarrow{\text{grad}\, u}\right|$ у заданій точці:

1) $u = 4 - x^2 - y^2$, $M(1;2)$; 2) $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $M(0;3)$.

7.2.13. Перевірити теорему Ейлера про однорідні функції:

1) $z = x^3 + x^2 y - y^3$; 2) $z = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$; 3) $z = \dfrac{y^3}{x^3 - y^3}$; 4) $z = \ln\left(\dfrac{y}{x} - 1\right)$.

7.2.14. Обчислити частинні похідні другого порядку:

1) $z = \dfrac{x^2}{1 - 2y}$; 2) $z = \sin x \cos y$; 3) $z = x + y + \dfrac{xy}{x - y}$; 4) $z = xe^y$.

7.2.15. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо:

1) $z = x^3 + x^2 y - 3xy^2 + y^4$; 2) $z = x^y$; 3) $z = x\sin(ax + by)$; 4) $z = \dfrac{x^2}{y^3}$.

7.2.16. Обчислити частинні похідні третього порядку:

1) $z = x^4 + 5y^3 + 3x - y$; 2) $z = \sin(3x - 2y)$; 3) $z = \dfrac{x}{y}$; 4) $z = x^2 y^3$.

7.2.17. Обчислити $\mathrm{d}^2 z$, якщо:

1) $z = \text{arctg}\,\dfrac{x + y}{1 - xy}$; 2) $z = e^x \cos y$; 3) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$; 4) $z = e^{-xy^2}$.

7.2.18. Розвинути функцію $z = x^2 - 3xy + y^2$ за степенями $x - 1$ та $y + 1$.

7.2.19. Розвинути функцію $z = x^3 + xy^2$ за формулою Тейлора в околі точки $M(1;1)$.

7.2.20. Розвинути функцію $z = e^x \sin y$ за степенями x та y, обмежившись членами третього порядку.

7.2.21. Розвинути функцію $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ за степенями $x-1$ та y, знайшовши члени другого порядку включно.

7.2.22. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$; 2) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;

3) $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$; 4) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

7.2.23. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

7.3. Умовний екстремум функції багатьох змінних

7.3.1. Неявні функції та дії над ними

Неявні функції визначені одним рівнянням. Часто трапляються випадки, коли змінна u, яка є функцією аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, задана за допомогою функціонального рівняння

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0. \qquad (7.3.1)$$

Якщо $F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0$ для всіх $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, то в цьому випадку кажуть, що функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, як функція аргументів $(x_1, x_2, ..., x_n) \in\subset R^n$, задана неявно. Рівняння (7.3.1) може задавати декілька функцій, тому потрібно з'ясувати, за яких умов це рівняння однозначно задає u як функцію змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Розглянемо спочатку випадок неявної функції двох змінних

$$F(x, y) = 0. \qquad (7.3.2)$$

Наприклад, якщо задане рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \ f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \ -1 \le x \le 1$$

– неявні функції, задані цим рівнянням. Якщо домагатися, щоб неявна функція задовольняла деякі додаткові умови, то можливо, що така функція буде єдиною. Наприклад, якщо значення неявної функції, визначеної рівнянням $x^2 + y^2 = 1$ на відрізку $[-1; 1]$ невід'ємні, то є лише одна така функція

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \ -1 \le x \le 1.$$

Сформулюємо умови, за яких існує єдина неявна функція, визначена рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема 7.3.1. Нехай функція $F(x, y)$ неперервна в деякому прямокутному околі

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta \}$$

точки $M_0(x_0; y_0)$ і для кожного фіксованого $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна за y на інтервалі $(y - \eta, y + \eta)$. Тоді якщо $F(x_0, y_0) = 0$, то існують околи $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 та $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ точки y_0 такі, що для кожного $x \in U(x_0)$ існує єдиний розв'язок $y \in U(y_0)$ рівняння $F(x, y) = 0$. Цей розв'язок $y = f(x)$ неперервний у точці x_0 і $f(x_0) = y_0$.

Теорема 7.3.2. Нехай функція $F(x, y)$ неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і має в цьому околі частинну похідну $F'_y(x, y)$, неперервну в точці $M_0(x_0; y_0)$. Тоді якщо $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то існують такі околи $U(x_0)$, $U(y_0)$ точок x_0 та y_0, що для будь-якого $x \in U(x_0)$ існує єдиний розв'язок $y = f(x) \in U(y_0)$ рівняння $F(x, y) = 0$. Цей розв'язок неперервний для всіх $x \in U(x_0)$ і $f(x_0) = y_0$.

Якщо функція $F(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ частинну похідну $F'_y(x, y)$, неперервну в точці $M_0(x_0; y_0)$, то функція $y = f(x)$ теж має в точці x_0 похідну, яку обчислюють за формулою

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}, \tag{7.3.3}$$

неперервну в околі точки x_0.

Аналогічно можна ввести поняття неявної функції, визначеної рівнянням

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = F(\bar{x}, u) = 0. \tag{7.3.4}$$

7.3.2. Умовний екстремум

У математиці та її застосуваннях часто доводиться розв'язувати задачу на відшукання екстремумів функції, коли її аргументи задовольняють певні додаткові співвідношення (в'язі). Такі екстремуми *називають умовними*, на відміну від безумовних екстремумів, вивчених раніше.

Нехай в області $D \subset R^n$ $(n \geq 2)$ задано функцію

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{7.3.5}$$

та m $(1 \leq m < n)$ рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ ....; \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \qquad (7.3.6)$$

Функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за наявності в'язей (7.3.6) досягає в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ умовного максимуму (мінімуму), якщо координати цієї точки задовольняють систему рівнянь (7.3.6) та існує такий окіл точки M_0, у якому для всіх точок $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цього околу, координати яких задовольняють систему рівнянь (7.3.6), виконується нерівність

$$f(M) \le f(M_0) \quad (f(M) \ge f(M_0)).$$

Розглянемо умовні екстремуми для функцій двох змінних.

Розглянемо функцію $u = f(x, y)$, аргументи x та y якої задовольняють умову $g(x, y) = 0$.

Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають точкою *умовного максимуму* (*мінімуму*), якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x; y)$ з цього околу, які задовольняють умову $g(x, y) = 0$, виконується нерівність

$$f(x_0; y_0) \ge f(x; y) \quad (f(x_0; y_0) \le f(x; y)). \qquad (7.3.7)$$

Нехай з рівняння $g(x, y) = 0$ визначили змінну y як функцію змінної x, тобто

$$y = \varphi(x). \qquad (7.3.8)$$

Підставимо (7.3.8) у функцію $u = f(x, y)$ і отримаємо функцію однієї змінної $u = f(x, \varphi(x))$. Екстремум цієї функції і буде умовним екстремумом функції $u = f(x, y)$.

П р и к л а д 7.3.1. Знайдемо екстремум функції $u = x^2 + y^2$, якщо її аргументи задовольняють умову $x + y - 4 = 0$.

● Екстремуми цієї функції шукають не на всій площині Oxy, а лише на прямій $x + y - 4 = 0$ (рис. 7.3.1). Підставимо $y = 4 - x$ у рівняння $u = x^2 + y^2$ і зведемо задачу на умовний екстремум до відшукання безумовного екстремуму функції $\tilde{u} = 2x^2 - 8x + 16$. Обчислимо $\tilde{u}' = 4x - 8$. З необхідної умови існування екстремуму $\tilde{u}'(x) = 0$ отримаємо стаціонарну точку $x_0 = 2$. Оскільки $\tilde{u}''(x) = 4 > 0$, то функція $\tilde{u} = 2x^2 - 8x + 16$ в точці $x_0 = 2$ має мінімум. Тому функція $u = x^2 + y^2$ з умовою $x+y-4=0$ в точці $M_0(2;2)$ має умовний мінімум, і $u_{\min}=u(2,2)=8$. Зазначимо, що безумовний мінімум ця функція має в точці $O(0;0)$, і $u_{\min}=u(0,0)=0$. ❍

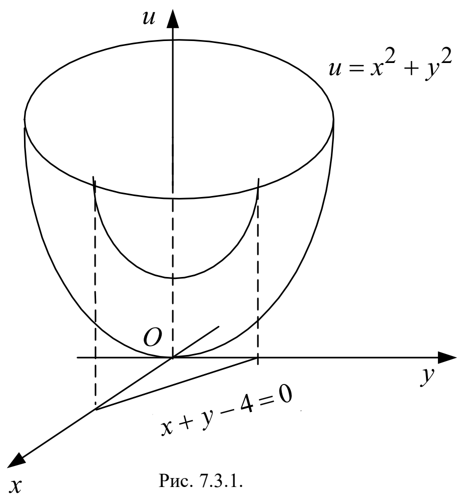

Рис. 7.3.1.

Метод невизначених множників Лагранжа. Нехай потрібно знайти екстремум функції (7.3.5) за наявності в'язей (7.3.6). Уведемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – параметри, які називають *множниками Лагранжа*.

Доведено таке: якщо $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ – точка умовного екстремуму функції (7.3.5) за наявності в'язей (7.3.6), то існують числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ такі, що $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)$ є розв'язком системи $n+m$ рівнянь з $n+m$ змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)}{\partial \lambda_j} \equiv F_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{7.3.9}$$

У цьому разі достатньою умовою наявності умовного екстремуму в точці M_0 є знаковизначеність у цій точці диференціала другого порядку

$$\left. \mathrm{d}^2 L \right|_{\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d} x_i \,\mathrm{d} x_j \qquad (7.3.10)$$

за умови, що диференціали аргументів $\mathrm{d} x_1, \mathrm{d} x_2, ..., \mathrm{d} x_n$ пов’язані співвідношеннями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i = 0, \quad k = \overline{1, m}. \qquad (7.3.11)$$

Зазначимо, що в цьому випадку диференціал $\mathrm{d}^2 L$ в (7.3.10) є квадратичною формою щодо $n-m$ незалежних змінних $\mathrm{d} x_{i_1}, \mathrm{d} x_{i_2}, ..., \mathrm{d} x_{i_{n-m}}$, оскільки решту m змінних $\mathrm{d} x_{i_{n-m+1}}, \mathrm{d} x_{i_{n-m+2}}, ..., \mathrm{d} x_{i_n}$ можна виразити через $\mathrm{d} x_{i_1}, \mathrm{d} x_{i_2}, ...,$ $\mathrm{d} x_{i_{n-m}}$ як розв’язки системи (7.3.11).

Приклад 7.3.2. Методом множників Лагранжа знайдемо точки умовного екстремуму функції $u = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ за умови $x + y + z = 1$.

- Уведемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + \lambda(x + y + z - 1).$$

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 6y + \lambda$, $\frac{\partial L}{\partial z} = -2z + \lambda$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 1$ і прирівняємо їх до нуля: $\begin{cases} 4x + \lambda = 0; \\ 6y + \lambda = 0; \\ -2z + \lambda = 0; \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$ Звідси $x = -3$, $y = -2$, $z = 6$, $\lambda = 12$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 4, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 6, \ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -2, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial zy} = 0$$

і запишемо диференціал другого порядку

$$\mathrm{d}^2 L = 4 \,\mathrm{d} x^2 + 6 \,\mathrm{d} y^2 - 2 \,\mathrm{d} z^2.$$

Урахуємо, що $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0,$ тобто $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$ отримаємо

$$\mathrm{d}^2 L=4\,\mathrm{d}x^2+6\,\mathrm{d}y^2-2(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2=2\,\mathrm{d}x^2-4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}y^2.$$

Матриця диференціала другого порядку $H=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix},$ її головні мінори $M_1=2,\ M_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4$ додатні.

Отже, у точці $A(-3;-2;6)$ функція має умовний мінімум $u_{\min}=-6.$ ❍

Задачі для самостійного розв'язування

7.3.1. Визначити екстремум функції $z=x^2+y^2,$ якщо $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1.$

7.3.2. Визначити екстремум функції $u=x+y+z,$ якщо $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1.$

7.3.3. Визначити екстремум функції $z=xy,$ якщо $x^2+y^2=1.$