Індивідуальні завдання

Варіант індивідуального завдання визначається двома параметрами: k – передостання цифра номера залікової книжки і l – остання цифра номера залікової книжки. Завдання варіанта є на перетині відповідного рядка і стовпця:

k	l									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1 31 61 91 121 151 181 211 241 271 301 331 361	2 32 62 92 122 152 182 212 242 272 302 332 362	3 33 63 93 123 153 183 213 243 273 303 333 363	4 34 64 94 124 154 184 214 244 274 304 334 364	5 35 65 95 125 155 185 215 245 275 305 335 365	6 36 66 96 126 156 186 216 246 276 306 336 366	7 37 67 97 127 157 187 217 247 277 307 337 367	8 38 68 98 128 158 188 218 248 278 308 338 368	9 39 69 99 129 159 189 219 249 279 309 339 369	10 40 70 100 130 160 190 220 250 280 310 340 370
1	11 41 71 101 131 161 191 221 251 281 311 341 371	12 42 72 102 132 162 192 222 252 282 312 342 372	13 43 73 103 133 163 193 223 253 283 313 343 373	14 44 74 104 134 164 194 224 254 284 314 344 374	15 45 75 105 135 165 195 225 255 285 315 345 375	16 46 76 106 136 166 196 226 256 286 316 346 376	17 47 77 107 137 167 197 227 257 287 317 347 377	18 48 78 108 138 168 198 228 258 288 318 348 378	19 49 79 109 139 169 199 229 259 289 319 349 379	20 50 80 110 140 170 200 230 260 290 320 350 380
2	21 51 81 111 141 171 201 231 261 291 321	22 52 82 112 142 172 202 232 262 292 322	23 53 83 113 143 173 203 233 263 293 323	24 54 84 114 144 174 204 234 264 294 324	25 55 85 115 145 175 205 235 265 295 325	26 56 86 116 146 176 206 236 266 296 326	27 57 87 117 147 177 207 237 267 297 327	28 58 88 118 148 178 208 238 268 298 328	29 59 89 119 149 179 209 239 269 299 329	30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330

	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	35	36	36	38	39	40	41	42	43	44
	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141
	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178
	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193
	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232
	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263
	300	299	298	297	296	295	294	293	292	291
	327	326	325	324	323	322	321	320	319	318
	359	358	357	356	355	354	353	352	351	350
	385	384	383	382	381	380	379	378	377	376
4	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
	179	180	151	152	153	154	155	156	157	158
	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203
	233	234	235	236	237	238	239	240	211	212
	264	265	266	267	268	269	270	241	242	243
	290	289	288	287	286	285	284	283	282	281
	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308
	349	348	347	346	345	344	343	342	341	340
	375	374	373	372	371	370	369	368	367	366
5	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2
	55	56	57	58	59	60	31	32	33	34
	88	89	90	61	62	63	64	65	66	67
	120	91	92	93	94	95	95	97	98	99
	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
	204	205	206	207	208	209	210	183	182	181
	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222
	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253
	280	279	278	277	276	275	274	273	272	271
	307	306	305	304	303	302	301	330	329	328
	339	338	337	336	335	334	333	332	331	360
	365	364	363	362	361	390	389	388	387	386

6	7 40 72 97 130 156 197 219 252 284 315 351 363	8 41 73 98 131 157 198 220 253 285 314 352 364	9 42 74 99 132 158 199 221 254 286 313 353 365	10 43 75 100 133 159 200 222 255 287 312 352 366	11 44 76 101 134 160 210 223 256 288 311 351 367	12 45 77 102 135 161 209 224 257 289 310 350 368	13 46 78 103 136 162 208 225 258 290 309 349 369	14 47 79 104 137 163 207 226 259 291 308 348 370	15 48 80 105 138 164 206 227 260 292 307 347 371	16 49 81 106 139 165 205 228 261 293 306 346 372
7	17 50 82 107 140 166 204 229 262 294 305 345 373	18 51 83 108 141 167 203 230 263 295 304 344 374	19 52 84 109 142 168 202 231 264 296 303 343 375	20 53 85 110 143 169 201 232 265 297 302 342 376	21 54 86 111 144 170 196 233 266 298 301 341 377	22 55 87 112 145 171 195 234 267 299 316 340 378	23 56 88 113 146 172 194 235 268 300 317 339 379	24 57 89 114 147 173 193 236 269 271 318 338 380	25 58 90 115 148 174 192 237 270 272 319 337 381	26 59 61 116 149 175 191 238 241 273 320 336 382
8	27 60 62 117 150 176 185 239 242 274 321 335 383	28 31 63 118 129 177 186 240 243 275 322 334 384	29 32 64 119 128 178 187 211 244 276 323 333 385	30 33 65 120 127 179 188 212 245 277 324 332 386	1 34 66 95 126 180 189 213 246 278 325 331 387	2 35 67 96 125 151 190 214 247 279 326 360 388	3 36 68 97 124 152 184 215 248 280 327 359 389	4 37 69 98 123 153 183 216 249 281 328 358 390	4 38 70 99 122 154 182 217 250 282 329 357 361	6 39 71 100 121 155 181 218 251 283 330 356 362
9	13 44 80 120	14 45 81 119	15 46 82 118	16 47 83 117	17 48 84 116	18 49 85 97	19 50 86 114	20 51 87 113	21 52 88 112	22 53 89 111

	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126
	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177
	201	202	203	204	205	205	207	208	209	210
	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
	270	269	268	267	266	265	264	263	262	261
	277	279	281	283	285	286	287	288	289	297
	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318
	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345
	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1

Знайти області визначення функцій:

1) $u=\sqrt{3-x^2-y^2}\cdot\arcsin(2x-3y)$;	2) $u=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2+y^2-10}$;
3) $u=\sqrt{5-x^2-y^2}\cdot\arccos(3x-5y)$;	4) $u=\sqrt{2x-5y}\cdot\ln\left(x^2+y^2-5\right)$;
5) $u=\dfrac{\sqrt{4x-5y}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;	6) $u=\dfrac{\sqrt{3x+2y}}{\ln\left(5-x^2-y^2\right)}$;
7) $u=\sqrt{6-x^2-y^2}\cdot\arcsin(2x+3y)$;	8) $u=\sqrt{3x-5y}\cdot\sqrt{x^2+y^2-12}$;
9) $u=\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\arccos(3x-7y)$;	10) $u=\sqrt{2x+7y}\cdot\ln\left(x^2+y^2-9\right)$;
11) $u=\dfrac{\sqrt{4x+9y}}{\sqrt{11-x^2-y^2}}$;	12) $u=\dfrac{\sqrt{3x+7y}}{\ln\left(5-2x^2-5y^2\right)}$;
13) $u=\sqrt{5-x^2-2y^2}\cdot\arcsin(2x+5y)$;	14) $u=\sqrt{4x-7y}\cdot\sqrt{x^2+y^2-14}$;
15) $u=\sqrt{7-x^2-3y^2}\cdot\arccos(4x-5y)$;	16) $u=\sqrt{2x-8y}\cdot\ln\left(x^2+y^2-6\right)$;
17) $u=\dfrac{\sqrt{4x-7y}}{\sqrt{14-3x^2-5y^2}}$;	18) $u=\dfrac{\sqrt{3x+9y}}{\ln\left(15-2x^2-y^2\right)}$;
19) $u=\sqrt{9-2x^2-y^2}\cdot\arcsin(5x-3y)$;	20) $u=\sqrt{5x-8y}\cdot\sqrt{x^2+y^2-10}$;
21) $u=\sqrt{8-2x^2-y^2}\cdot\arccos(3x+8y)$;	22) $u=\sqrt{2x+6y}\cdot\ln\left(x^2+y^2-14\right)$;
23) $u=\dfrac{\sqrt{2x-5y}}{\sqrt{11-x^2-y^2}}$;	24) $u=\dfrac{\sqrt{3x+7y}}{\ln\left(21-x^2-y^2\right)}$;
25) $u=\sqrt{11-x^2-2y}\cdot\arcsin(2x-7y)$;	26) $u=\sqrt{12-3x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2-15}$;

27) $u=\sqrt{6-x^2-3y^2}\cdot\arccos(6x-5y)$;	28) $u=\sqrt{7x-5y}\cdot\ln\left(x^2+y^2-25\right)$;
29) $u=\dfrac{\sqrt{4x-9y}}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$;	30) $u=\dfrac{\sqrt{3x+8y}}{\ln\left(36-x^2-y^2\right)}$.

Завдання 2

Задано функцію $u=f(x,y)$. Перевірити рівність $u''_{xy}=u''_{yx}$. Перевірити, чи ця функція задовольняє задане рівняння:

31) $u=x^y$; $\quad y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(1+y\ln x\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}$;
32) $u=e^{x/2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{y}{2}\right)$; $\quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\dfrac{1}{2}e^x\sin^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$;
33) $u=x^y\cdot y^x$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(x+\ln u\right)\cdot u$;
34) $u=\dfrac{xy}{x+y}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$;
35) $u=e^{xy}$; $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xyu=0$;
36) $u=\dfrac{y}{x}$; $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;
37) $u=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\dfrac{x+y}{x-y}$;
38) $u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;
39) $u=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$;
40) $u=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$;
41) $u=\ln\left(x^2-y^2\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

42) $u = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$; $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$;
43) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
44) $u = x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$;
45) $u = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$; $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$;
46) $u = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2$;
47) $u = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0$;
48) $u = \dfrac{xy}{x + y}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$;
49) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;
50) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;
51) $u = xy + xe^{y/x}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u + xy$;
52) $u = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}u$;
53) $u = x^y$; $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$;
54) $u = e^x\cos y$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
55) $u = x^y \cdot y^x$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u)u$;
56) $u = \dfrac{y}{x}$; $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
57) $u = \arcsin\dfrac{x}{x + y}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;
58) $u = \sqrt{2xy + y^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{u}$;

59) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;
60) $u=\left(x^2+y^2\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$.

Завдання 3

Задано функцію $u=f(x,y)$. Обчислити диференціали першого і другого порядку. Перевірити рівність $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

61) $u=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+2y}}$;	62) $u=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{y}$;	63) $u=\ln\left(2x^2-3y^2\right)$;
64) $u=\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{x}{x+y}}$;	65) $u=\cos\dfrac{x+y}{x-y}$;	66) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y^3}$;
67) $u=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$;	68) $u=\operatorname{arcctg}(2x-3y)$;	69) $u=\sin\sqrt{x-y^3}$;
70) $u=\operatorname{arcctg}\left(x^2y\right)$;	71) $u=\ln\left(5x^2-y^3\right)$;	72) $u=\operatorname{arcctg}\sqrt{xy^3}$;
73) $u=\cos\sqrt{x^2-2y^2}$;	74) $u=\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)$;	75) $u=\ln\left(x^2-e^{-x}\right)$;
76) $u=\arcsin\sqrt{xy}$;	77) $u=\sin\left(x^2-3xy\right)$;	78) $u=\operatorname{arctg}\left(x^3+y^3\right)$;
79) $u=e^{-x^3+2y^2}$;	80) $u=\cos\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$;	81) $u=\arccos\dfrac{x}{y}$;
82) $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x^5y^3}$;	83) $u=\ln\left(\sqrt{x^3y}-5\right)$;	84) $u=\ln\left(\sqrt{xy^3}-2xy\right)$;
85) $u=\sin\sqrt{x^2-4y^3}$;	86) $u=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{y^3}$;	87) $u=\cos\dfrac{2x+3y}{5x-y}$;
88) $u=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^5y^3}$;	89) $u=\ln\left(x^3-e^{-5x}\right)$;	90) $u=\sin\left(x^3-3x^2y\right)$.

Завдання 4

Обчислити наближене значення функції $u = f(x, y)$, замінюючи приріст функції її диференціалом першого порядку:

91) $\sqrt{1{,}02}(2{,}03)^{1{,}02}$;	92) $\sqrt{(2{,}96)^3 + (2{,}02)^2 - 6}$;	93) $\ln\left(\sqrt[3]{0{,}97} + \sqrt[4]{1{,}02} - 1\right)$;
94) $\sqrt[5]{2{,}98^3 + 1{,}97^2 + 1}$;	95) $\dfrac{3{,}01}{3{,}01^2 + 1{,}97^3 + 3}$;	96) $2{,}96e^{0{,}02}$;
97) $2{,}02e^{0{,}03}$;	98) $2{,}01^{3{,}98}$;	99) $\sqrt{1{,}04}(1{,}04)^{2{,}92}$;
100) $\sqrt{(1{,}97)^3 + (2{,}02)^3 + 4}$;	101) $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98} + \sqrt[4]{1{,}03} - 1\right)$;	102) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}07^2}{0{,}92}$;
103) $\dfrac{4{,}02^2}{4{,}02^2 + 2{,}97^3 + 1}$;	104) $\dfrac{3{,}02}{3{,}02^2 + 1{,}96^3 + 3}$;	105) $\operatorname{arctg}\dfrac{(0{,}97)^2}{1{,}02}$;
106) $2{,}94^{4{,}08}$;	107) $\sqrt{1{,}03}(2{,}04)^{1{,}03}$;	108) $\sqrt{(3{,}06)^3 + (1{,}97)^2 - 6}$;
109) $\ln\left(\sqrt[3]{0{,}95} + \sqrt[5]{1{,}03} - 1\right)$;	110) $\sqrt[5]{3{,}08^3 + 2{,}07^2 + 1}$;	111) $\sqrt[5]{3{,}08^3 + 1{,}97^2 + 1}$;
112) $\sqrt[5]{3{,}01^3 + 1{,}96^2 + 1}$;	113) $5{,}03e^{0{,}01}$;	114) $1{,}95^{3{,}08}$;
115) $\sqrt{1{,}04}(1{,}04)^{2{,}02}$;	116) $\sqrt{(2{,}95)^3 + (2{,}04)^2 - 6}$;	117) $\ln\left(\sqrt[5]{1{,}07} + \sqrt[4]{0{,}92} - 1\right)$;
118) $\operatorname{arctg}\dfrac{0{,}95^2}{1{,}04}$;	119) $\dfrac{4{,}01}{4{,}01^2 + 2{,}97^3 + 7}$;	120) $\operatorname{arctg}\dfrac{(0{,}96)^3}{1{,}02}$.

Завдання 5

Знайти похідну функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у напрямі радіуса-вектора цієї точки. Знайти градієнт функції в цій точці:

121) $u = (z^3 - 2x) \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}, \quad M_0(0, -1, 1)$;
122) $u = \sqrt[3]{x} \cdot \ln\left(2x^2 y + zx + y^3 z\right), \quad M_0(1,1,1)$;
123) $u = z \cdot (1 + x)^{yz}, \ M_0(1,1,2)$;
124) $u = \sqrt{x^2 + z^3} \cdot \ln\left(x^3 z + xy^2 - z^3\right), \ M_0(1,1,1)$;
125) $u = \sqrt{z} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3}\right), \ M_0(1,1,1)$;
126) $u = (z^4 - 7x) \cdot \sqrt[3]{x^5 + y^2}, \quad M_0(0, -1, 1)$;
127) $u = \sqrt[3]{x + 2} \cdot \ln\left(2x^4 y + 5zx + y^3 z\right), \quad M_0(1,1,1)$;

128) $u = z \cdot (2 - x)^{-3yz}$, $M_0(1,1,2)$;
129) $u = \sqrt{x^2 + 3z^4} \cdot \ln\left(x^2 z + xy^4 - z^3\right)$, $M_0(1,1,1)$;
130) $u = \sqrt{z + 3} \cdot \ln\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3}\right)$, $M_0(1,1,1)$;
131) $u = (z^2 - 5x) \cdot \sqrt[4]{x^3 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
132) $u = \sqrt[3]{x + 2z} \cdot \ln\left(5x^2 y + 3zx + y^4 z\right)$, $M_0(1,1,1)$;
133) $u = (z + 2) \cdot (1 + x)^{-yz}$, $M_0(1,1,2)$;
134) $u = \sqrt{x^2 + 4z^2} \cdot \ln\left(x^3 z + 5xy^2 - 2z^3\right)$, $M_0(1,1,1)$;
135) $u = \sqrt{z} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3}\right)$, $M_0(1,1,1)$;
136) $u = (z^3 - 2x^4) \cdot \sqrt[3]{x^2 + 5y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
137) $u = \sqrt[3]{2x + 3y} \cdot \ln\left(2x^2 y + 6zx + y^2 z\right)$, $M_0(1,1,1)$;
138) $u = (xz + 2) \cdot (1 + x)^{-4yz}$, $M_0(1,1,2)$;
139) $u = \sqrt{x^2 + 4z^3} \cdot \ln\left(x^4 z + 2xy^2 - z^3\right)$, $M_0(1,1,1)$;
140) $u = \sqrt{3z - 2} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + 4\sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3}\right)$, $M_0(1,1,1)$;
141) $u = (z^2 - 12x) \cdot \sqrt[3]{3x^2 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
142) $u = \sqrt[3]{x + 3y} \cdot \ln\left(2x^2 y + 4z^4 x + y^3 z\right)$, $M_0(1,1,1)$;
143) $u = (yz + 2) \cdot (1 + x)^{5yz}$, $M_0(1,1,2)$;
144) $u = \sqrt{2x^2 + z^3} \cdot \ln\left(x^3 z + 3x^3 y^2 - z^3\right)$, $M_0(1,1,1)$;
145) $u = \sqrt{zy + 2} \cdot \ln\left(3\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3}\right)$, $M_0(1,1,1)$;
146) $u = (z^2 - 5x) \cdot \sqrt[4]{x^5 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
147) $u = \sqrt[5]{yx} \cdot \ln\left(2x^2 y + zx + y^3 z\right)$, $M_0(1,1,1)$;
148) $u = (zy + x) \cdot (1 + 3x)^{yz}$, $M_0(1,1,2)$;
149) $u = \sqrt{x^2 + 3z^4} \cdot \ln\left(x^3 z + 2x^5 y^2 - z^3\right)$, $M_0(1,1,1)$;
150) $u = \sqrt{zy + x^2} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + 4\sqrt{y^3} + 3\sqrt[4]{z^3}\right)$, $M_0(1,1,1)$.

Завдання 6

Знайти похідну складеної функції $u = u(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$:

151) $u = e^{2x-5y}$, $x = \cos t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
152) $u = \ln\left(x^3 - 4y^2\right)$, $x = \arcsin t$, $y = t^3$;
153) $u = y^x$, $x = \ln(2t+3)$, $y = e^t$;
154) $u = x^3 \sin(y+3)$, $x = \arccos t$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
155) $u = \arcsin\left(\dfrac{x}{y+3}\right)$, $x = \ln t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
156) $u = \sqrt[4]{x^2 - 5xy + 3y^4}$, $x = \sin t$, $y = e^{-3t}$;
157) $u = e^{3x-5y}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
158) $u = \ln\left(5x^4 - 4y^2\right)$, $x = \arcsin t^2$, $y = t^5$;
159) $u = y^{1+x}$, $x = \ln^2(5t+3)$, $y = e^{-3t}$;
160) $u = x^3 \sin^4(y+3)$, $x = \arccos t$, $y = \sqrt[5]{t^3 + 1}$;
161) $u = \arcsin\left(\dfrac{2x-5}{y+3}\right)$, $x = \ln^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
162) $u = \sqrt[5]{x^4 - 8x^3 y + 3y^4}$, $x = \sin t^2$, $y = e^{-3t}$;
163) $u = e^{2x+7y}$, $x = \cos^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
164) $u = \ln\left(x^3 - +3xy - 4y^3\right)$, $x = \arcsin t^3$, $y = t^3$;
165) $u = (2y-3)^{5x}$, $x = \ln^3(2t+3)$, $y = e^t$;
166) $u = \left(x^3 + 2y\right)\sin(y+6)$, $x = \arccos t^4$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
167) $u = \arcsin\left(\dfrac{4x-5y}{y+3}\right)$, $x = \ln^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
168) $u = \sqrt[5]{3x^4 - 5xy^2 + 3y^4}$, $x = \sin^5 t$, $y = e^{-3t}$;
169) $u = e^{4x-5y}$, $x = \cos^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
170) $u = \ln\left(5x^3 - 6y^2\right)$, $x = \arcsin t^5$, $y = t^3$;
171) $u = (3y-2x)^x$, $x = \ln^4(2t+3)$, $y = e^{-3t}$;
172) $u = (x+4)^3 \sin(5y+3)$, $x = \arccos^2 t$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
173) $u = \arcsin\left(\dfrac{x-5}{y+3}\right)$, $x = \ln^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
174) $u = \sqrt[4]{x^2 - 5x^4 y + 3y^4}$, $x = \sin^3 t$, $y = e^{-3t}$;

175) $u = xe^{2x-5y}$, $x = \cos^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
176) $u = y \cdot \ln\left(x^5 - 4y^2\right)$, $x = \arcsin t$, $y = t^3$;
177) $u = (2y-5)^x$, $x = \ln^5(2t+3)$, $y = e^t$;
178) $u = x^4 \sin(4y+3x)$, $x = \arccos t$, $y = \sqrt[5]{t^2 + 4}$;
179) $u = x^4 \arcsin\left(\dfrac{x}{y+3}\right)$, $x = \ln t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 3}$;
180) $u = \sqrt[7]{2x^3 - 5x^2 y + 3y^4}$, $x = \sin^5 t$, $y = e^{-3t}$.

Завдання 7

Дослідити на екстремум функцію:

181) $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$;
182) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 4$;
183) $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5$;
184) $z = 2x^2 - 5xy + y^2 - 14x + 9y + 10$;
185) $z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2} - 4x - 5y + 1$;
186) $z = -\dfrac{x^2}{2} - 2xy - \dfrac{y^2}{2} + 4x + 5y - 2$;
187) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$;
188) $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3$;
189) $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 10x + 1$;
190) $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$;
191) $z = -x^2 + xy - 2y^2 + 3x - 5y + 2$;
192) $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$;
193) $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 9x - 6y + 5$;
194) $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 9x + y + 3$;
195) $z = -2x^2 - 3xy - 4y^2 - 7x - 7y + 1$;
196) $z = -3x^2 + 2xy - y^2 - 14x + 6y + 8$;

197) $z=3x^2-2xy+y^2-14x-6y+7$;
198) $z=x^2-xy+3y^2+x-17y+2$;
199) $z=4x^2-xy+y^2-9x+3y-5$;
200) $z=-4x^2+xy-y^2+9x-3y+5$;
201) $z=\frac{x^2}{2}-4xy+y^2+3x+2y+3$;
202) $z=2x^2+3xy+3y^2-10x-18y+1$;
203) $z=-2x^2+3xy-3y^2-x+3y+6$;
204) $z=3x^2-xy+2y^2-5x-3y+4$;
205) $z=-2x^2+xy-\frac{y^2}{2}+7x-y+3$;
206) $z=2x^2-xy+\frac{y^2}{2}-7x+y+2$;
207) $z=-x^2+4xy-y^2-2x-2y+4$;
208) $z=x^2-6xy+3y^2-6x+14y-3$;
209) $z=-2x^2+2xy-3y^2-2x+16y-3$;
210) $z=x^2-xy+y^2-7x+2y-5$.

Завдання 8

Дослідити на екстремум функцію:

211) $u=-\frac{1}{9}(3x+2y)^3+\frac{3}{2}x^2+y^2+2xy+y$;
212) $u=-\frac{1}{6}(2x+3y)^3+x^2+\frac{3}{2}y^2+3xy-y$;
213) $u=-\frac{1}{6}(2x+y)^3+x^2+\frac{1}{2}y^2+xy+y$;
213) $u=-\frac{1}{6}(2x+y)^3+x^2+\frac{1}{2}y^2+xy+y$;
214) $u=-\frac{1}{3}(x+2y)^3+\frac{1}{2}x^2+y^2+2xy-y$;
215) $u=\frac{1}{9}(3x+2y)^3+\frac{3}{2}x^2+y^2+2xy+y$;

216) $u=\frac{1}{6}(-2x+y)^3-x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-3y;$
217) $u=\frac{1}{6}(2x+y)^3+x^2+\frac{1}{2}y^2+xy+y;$
218) $u=\frac{1}{3}(x+2y)^3+\frac{1}{2}x^2+y^2+2xy-y;$
219) $u=-\frac{1}{3}(x-2y)^3+\frac{1}{2}x^2-y^2-2xy+3y;$
220) $u=\frac{1}{9}(-3x+2y)^3-\frac{3}{2}x^2+y^2+2xy-5y;$
221) $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y;$
222) $z=x^3+8y^3-6xy+5;$
223) $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20;$
224) $z=2x^3+2y^3-6xy+5;$
225) $z=3x^3+3y^3-9xy+10;$
226) $z=x^3+y^3-3xy+5;$
227) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3;$
228) $z=x^3+8y^3-6xy+1;$
229) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y;$
230) $z=x^3+y^3-9xy+3;$
231) $z=x^3+8y^3-6xy+7;$
232) $z=x^3+y^3-6xy+8;$
233) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2;$
234) $z=x^3-2y^3-3x+6y;$
235) $z=x^3+y^3-x^2-2xy-y^2;$
236) $z=x^3-2x^2y^2+y^4;$
237) $z=-\frac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1;$
238) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2;$
239) $z=y^3-x^2-27y+3x+16;$
240) $z=2x^3+xy^2-6x^2-y^2.$

Завдання 9

Знайти екстремум функції $u = f(x, y)$ за умови $g(x, y) = 0$.

241) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} = 0$;
242) $u = 3x^2 - 10xy + 4y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 3 = 0$;
243) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 5$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{9} = 0$;
244) $u = 4x^2 + 12xy + y^2$, якщо $x^2 + 9y^2 - 25 = 0$;
245) $u = \ln(xy)$, якщо $x^3 + 3xy + y^3 = 0$;
246) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{16} = 0$;
247) $u = x^2 - 12xy + 4y^2$, якщо $x^2 + 3y^2 - 3 = 0$;
248) $u = 6 - 5x - 4y$, якщо $x^2 - y^2 - 9 = 0$;
249) $u = x^2 + xy + y^2$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
250) $u = x^2 - y^2$, якщо $(x-1)^3 + y^2 = 0$;
251) $u = xy$, якщо $x^4 + y^4 - 1 = 0$;
252) $u = x^2 - y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 2xy = 0$;
253) $u = \frac{x}{4} + \frac{y}{8}$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
254) $u = \frac{x}{10} + \frac{y}{16}$, якщо $x^2 - y^2 - 9 = 0$;
255) $u = 5 - 3x - 4y$, якщо $x^2 - y^2 - 25 = 0$;
256) $u = 4x^2 + 10xy + 7y^2$, якщо $2x^2 + y^2 - 3 = 0$;
257) $u = 1 - 4x - 8y$, якщо $x^2 - 8y^2 - 8 = 0$;
258) $u = x^2 + 6xy + y^2$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
259) $u = x^2 + 8xy + y^2$, якщо $x^2 - 4y^2 - 25 = 0$;
260) $u = x - y - 4$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
261) $u = 2x + y - 4$ якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
262) $u = xy$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
263) $u = x + 2y - 4$ якщо $x^2 + y^2 - 5 = 0$;
264) $u = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 - 25 = 0$;
265) $u = xy$, якщо $x^2 + y^2 - 16 = 0$;

266) $u = x^2 + y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
267) $u = x^2 + 2y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 2y = 0$;
268) $u = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
269) $u = 5x^2 + 10xy + 4y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 3 = 0$;
270) $u = 2x^2 + 14xy + y^2$, якщо $2x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Завдання 10

Досліджували прибуток y (тис. грн), залежно від витрат на рекламу x (тис. грн). Припускаючи, що між x та y існує лінійна залежність $y = ax + b$, методом найменших квадратів визначити параметри a та b. Визначити сподіваний прибуток, якщо на рекламу витратили 10 000 грн.

271)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,03	18,49	25,95	33,41	40,87	48,33	55,79	63,25	70,71
272)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,11	14,44	18,77	22,1	27,43	31,76	36,09	40,42	44,75
273)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,11	12,48	15,85	19,22	22,59	25,96	29,33	32,7	36,07
274)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,62	16,01	20,38	24,76	29,14	33,52	37,91	42,28	46,67
275)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,69	15,93	23,17	30,41	37,65	44,89	52,13	59,37	66,61
276)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	12,42	15,79	19,58	23,37	27,16	30,95	34,74	38,53	42,32
277)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,22	18,61	23,04	27,39	31,78	36,17	40,56	44,95	49,34
278)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,17	13,21	16,03	18,96	21,89	24,82	27,75	30,68	33,61
279)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,36	18,25	25,14	32,03	38,92	45,81	52,73	59,57	66,48
280)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,21	17,04	24,87	32,74	40,53	48,36	56,19	64,02	71,85
281)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	6,63	10,92	15,21	19,53	23,79	28,08	32,37	36,63	40,95
282)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	y_i	13,65	19,37	25,09	30,81	36,53	42,25	47,97	53,69	59,41
283)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	17,62	25,87	34,14	42,41	50,68	58,97	67,22	75,49	83,76
284)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,34	21,12	26,97	32,68	38,46	44,24	50,12	55,84	61,58
285)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,82	17,19	24,56	31,93	39,34	46,67	54,04	61,41	68,74
286)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,33	12,11	15,89	19,67	23,45	27,23	31,01	34,79	38,57
287)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	13,53	19,17	24,84	30,52	36,18	41,87	47,52	53,19	58,86
288)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,81	17,73	25,65	33,57	41,49	49,42	57,33	65,25	73,17
289)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,75	13,73	18,71	23,69	28,67	33,65	38,63	43,61	48,59
290)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,28,	18,11	25,94	33,76	41,63	49,43	57,26	65,09	72,92
291)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,03	21,49	28,95	36,41	43,87	51,33	58,79	66,25	73,71
292)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	12,11	14,44	20,77	24,1	29,43	33,76	38,09	42,42	46,75
293)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,11	16,48	19,85	23,22	26,59	29,96	33,33	36,7	40,07
294)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,62	20,01	24,38	28,76	33,14	37,52	41,91	46,28	50,67
295)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,69	16,93	24,17	31,41	38,65	45,89	53,13	60,37	67,61
296)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,42	18,79	22,58	26,37	30,16	33,95	37,74	41,53	45,32
297)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	16,22	20,61	25,04	29,39	33,78	38,17	42,56	46,95	51,34
298)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,17	18,21	21,03	23,96	26,89	29,82	32,75	35,68	38,61
299)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,36	21,25	28,14	35,03	41,92	48,81	55,73	62,57	69,48
300)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	19,21	27,04	34,87	42,74	50,53	58,36	66,19	74,02	81,85

Завдання 11

Знайти найбільше та найменше значення функції $u = f(x, y)$ в заданій замкненій області D.

301) $u = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1;$

302) $u = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0,\ x = 3, y = 0;$

303) $u = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$

304) $u = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = x^2 - 4, y = 0;$

305) $u = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6;$

306) $u = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0;$

307) $u = x^2 + xy - 2$, $D: y = 4x^2 - 4, y = 0;$

308) $u = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y$, $D: x = 2, y = 0, x - y + 2 = 0;$

309) $u = -9x^2 - 9y^2 + 6xy + 4x + 4y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2;$

310) $u = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: x^2 + y^2 \le 1;$

311) $u = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 5$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0;$

312) $u = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1;$

313) $u = 0{,}5x^2 - xy$, $D: y = \frac{1}{3}x^2, y = 3;$

314) $u = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$, $D: x = 0, y = 2, y - 2x = 0;$

315) $u = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 6y + 8$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1;$

316) $u = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0;$

317) $u = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4;$

318) $u = 0{,}5x^2 - xy$, $D: y = 2x^2, y = 8;$

319) $u = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$

320) $u = x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 2$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0;$

321) $u = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 8$, $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0;$

322) $u = 2x^2 - 0{,}5y^2 + 2xy - 4x + 2$, $y = 2x, y = 2, x = 0;$

323) $u = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 6 = 0;$

324) $u = x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0;$

325) $u = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1;$

326) $u = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2};$

327) $u = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y$, $D: x = 2, y = 0, x - y + 2 = 0;$

328) $u = x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 2,\ D: x = 3,\ y = 0,\ x - y + 1 = 0;$

329) $u = x^3 + y^3 - 3xy,\ D: x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2;$

330) $u = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 5,\ D: x = 2,\ x = 5,\ y = -1,\ y = 2.$

Завдання 12

Мале підприємство виробляє товари A та B. Щоденні витрати на виробництво x штук товару A та y штук товару B описує функція $C = C(x, y)$. Визначити кількість штук товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати були мінімальними.

331) $C = 386 - 3x - 5y + 0{,}1x^2 + 0{,}1y^2;$

332) $C = 412 - 4x - 6y + 0{,}2x^2 + 0{,}3y^2;$

333) $C = 501 - 5x - 7y + 0{,}1x^2 + 0{,}5y^2;$

334) $C = 370 - 8x - 6y + 0{,}2x^2 + 0{,}3y^2;$

335) $C = 390 - 2x - 9y + 0{,}1x^2 + 0{,}3y^2;$

336) $C = 368 - 9x - 7y + 0{,}3x^2 + 0{,}1y^2;$

337) $C = 505 - 10x - 3y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2;$

338) $C = 499 - 11x - 2y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2;$

339) $C = 398 - 12x - 3y + 0{,}5x^2 + 0{,}1y^2;$

340) $C = 299 - 2x - 11y + 0{,}1x^2 + 0{,}2y^2;$

341) $C = 331 - 3x - 12y + 0{,}1x^2 + 0{,}5y^2;$

342) $C = 432 - 4x - 14y + 0{,}2x^2 + 0{,}7y^2;$

343) $C = 543 - 15x - 5y + 0{,}3x^2 + 0{,}1y^2;$

344) $C = 654 - 16x - 7y + 0{,}4x^2 + 0{,}1y^2;$

345) $C = 499 - 5x - 15y + 0{,}1x^2 + 0{,}3y^2;$

346) $C = 401 - 7x - 16y + 0{,}1x^2 + 0{,}4y^2;$

347) $C = 670 - 17x - 8y + 0{,}5x^2 + 0{,}2y^2;$

348) $C = 597 - 13x - 3y + 0{,}5x^2 + 0{,}1y^2;$

349) $C = 637 - 8x - 17y + 0{,}2x^2 + 0{,}5y^2;$

350) $C = 743 - 14x - 5y + 0{,}7x^2 + 0{,}1y^2;$

351) $C = 547 - 3x - 13y + 0{,}1x^2 + 0{,}5y^2;$

352) $C = 699 - 5x - 14y + 0{,}1x^2 + 0{,}7y^2;$

353) $C = 591 - 15x - 6y + 0{,}5x^2 + 0{,}3y^2;$

354) $C = 679 - 16x - 8y + 0,2x^2 + 0,2y^2$;

355) $C = 704 - 6x - 15y + 0,3x^2 + 0,5y^2$;

356) $C = 800 - 8x - 16y + 0,2x^2 + 0,2y^2$;

357) $C = 987 - 17x - 9y + 0,5x^2 + 0,3y^2$;

358) $C = 941 - 18x - 10y + 0,3x^2 + 0,5y^2$;

359) $C = 2100 - 20x - 4y + 0,5x^2 + 0,2y^2$;

360) $C = 1312 - 10x - 18y + 0,5x^2 + 0,3y^2$.

Завдання 13

Кількість виробленої продукції залежно від чинників x та y виробництва описує виробнича функція $u = U(x, y)$. Знайти: а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників; б) еластичність функції за кожним із чинників; в) коефіцієнти еластичності за чинниками для $x = 1$, $y = 1$. Зробити висновки.

361) $u = xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 5x - 7y$;

362) $u = 2xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 + 21x^2 - 13y^2 + 15x - 17y$;

363) $u = -2xy^3 + 4x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 27y$;

364) $u = 5xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 7y$;

365) $u = -xy^3 - 7x^2y^2 + 5y^4 + 30x^2 - 17y^2 + 5x - 9y$;

366) $u = 5xy^3 - 8x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 7y$;

367) $u = 3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 6x - 7y$;

368) $u = -2xy^3 - 6x^2y^2 - 32y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 7y$;

369) $u = 4xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 12x^2 - 20y^2 + 8x - 5y$;

370) $u = 7xy^3 - 2x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 4x - 9y$;

371) $u = xy^3 - 16x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 17y$;

372) $u = 2xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 5x - 7y$;

373) $u = -3xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 + 21x^2 - 13y^2 + 15x - 17y$;

374) $u = -2xy^3 + 3x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 25y$;

375) $u = -5xy^3 + 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 12y$;

376) $u = -4xy^3 - 7x^2y^2 + 15y^4 + 30x^2 - 17y^2 + 5x - 19y$;

377) $u == 3xy^3 - 18x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 4y$;

378) $u = -3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 13y^2 + 6x - 9y;$

379) $u = -7xy^3 - 6x^2y^2 + 32y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 3y;$

380) $u = -4xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 32x^2 - 20y^2 + 8x - 15y;$

381) $u = -7xy^3 - 2x^2y^2 - 22y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 4x - 19y;$

382) $u = -9xy^3 - 16x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 27y;$

383) $u = 7xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 5x - 2y;$

384) $u = -2xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 - 21x^2 - 13y^2 + 15x - 33y;$

385) $u = -2xy^3 + 7x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 29y;$

386) $u = 8xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 4y;$

387) $u = -9xy^3 - 7x^2y^2 + 5y^4 - 30x^2 - 17y^2 + 5x - 8y;$

388) $u = 5xy^3 - 10x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 6y;$

389) $u = -3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 6x - 10y;$

390) $u = -2xy^3 - 9x^2y^2 - 32y^4 + 11x^2 - 20y^2 + 8x - 2y.$

Розв’язування типового варіанта

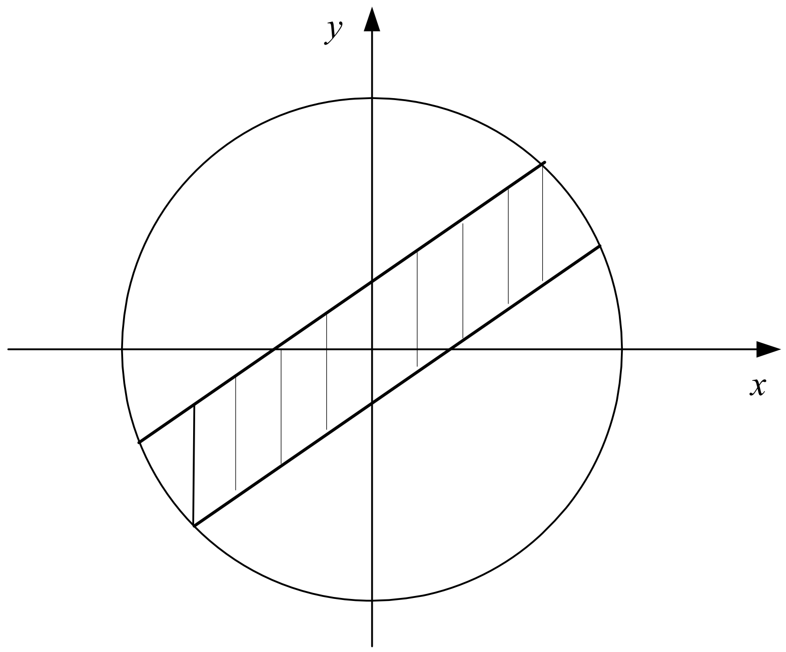
Завдання 1

Знайти області визначення функції $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \cdot \arccos(3x - 5y)$

• Функція $u = \sqrt{f(x, y)}$ визначена для тих значень x та y, для яких $f(x, y) \geq 0$, тобто $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Це круг з центром в початку координат і радіусом 2. Функція $u = \arcsin(2x - 3y)$ визначена для тих значень x та y, для яких $-1 \leq 3x - 5y \leq 1$, або $\begin{cases} 3x - 5y \leq 1; \\ 3x - 5y \geq -1. \end{cases}$ Цю систему нерівностей можна записати у вигляді $\begin{cases} 5y \geq 3x - 1; \\ 5y \leq 3x + 1. \end{cases}$ Ця система нерівностей описує множину точок площини, які лежать над прямою $5y = 3x - 1$ і під прямою $5y = 3x + 1$. Отже, областю визначення функції є ті значення x та y, які задовольняють систему

$$\begin{cases} 3x - 5y \leq 1; \\ 3x - 5y \geq -1; \\ x^2 + y^2 \leq 2. \end{cases}$$

Область визначення заданої функції зображена на рисунку.



Завдання 2

Задано функцію $u = e^{x/y^2}$. Перевірити рівність $u''_{xy} = u''_{yx}$. Перевірити, чи ця функція задовольняє рівняння $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

• Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{x/y^2}\right)'_x = e^{x/y^2}\cdot\left(\frac{x}{y^2}\right)'_x = e^{x/y^2}\cdot\left(xy^{-2}\right)'_x = \frac{1}{y^2}e^{x/y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{x/y^2}\right)'_y = e^{x/y^2}\cdot\left(\frac{x}{y^2}\right)'_y = e^{x/y^2}\cdot\left(xy^{-2}\right)'_y = -2xy^{-3}e^{x/y^2} = -\frac{2x}{y^3}e^{x/y^2}.$$

Перевіримо, чи функція $u = e^{x/y^2}$ задовольняє рівняння $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Підставимо $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в рівняння, отримаємо

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2x\cdot\frac{1}{y^2}e^{x/y^2} + y\cdot\left(-\frac{2x}{y^3}\right)e^{x/y^2} = \frac{2x}{y^2}e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^2}e^{x/y^2} = 0.$$

Отже, функція $u = e^{x/y^2}$ задовольняє рівняння $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Обчислимо мішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \left(y^{-2}\cdot e^{x/y^2}\right)'_y = -2y^{-3}e^{x/y^2} + y^{-2}e^{x/y^2}\left(-\frac{2x}{y^3}\right) = -\frac{2}{y^3}e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^5}e^{x/y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \left(-\frac{2x}{y^3}e^{x/y^2}\right)'_x = -\frac{2}{y^3}e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^3}\cdot\frac{1}{y^2}e^{x/y^2} = -\frac{2}{y^3}e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^5}e^{x/y^2}.$$

Отже, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$ ❍

Завдання 3

Задано функцію $u = \ln(x + \ln y)$. Обчислити диференціали першого і другого порядку. Перевірити рівність $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$

• Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ln(x + \ln y)\right)'_x = \frac{1}{x + \ln y}\cdot\left(x + \ln y\right)'_x = \left(x + \ln y\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln(x+\ln y)\right)_y'=\frac{1}{x+\ln y}\cdot\left(x+\ln y\right)_y'=y^{-1}\cdot\left(x+\ln y\right)^{-1}.$$

Тоді диференціал першого порядку

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(x+\ln y\right)^{-1}\mathrm{d}x+y^{-1}\left(x+\ln y\right)^{-1}\mathrm{d}y.$$

Обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\left(x+\ln y\right)^{-1}\right)_x'=-\left(x+\ln y\right)^{-2}\cdot\left(x+\ln y\right)_x'=-\left(x+\ln y\right)^{-2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(y^{-1}\cdot\left(x+\ln y\right)^{-1}\right)_y'=-\frac{1}{y^2}\left(x+\ln y\right)^{-1}-\frac{1}{y^2}\left(x+\ln y\right)^{-2}=$$

$$=-\frac{1}{y^2}\left(x+\ln y\right)^{-2}\cdot\left(1+x+\ln y\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(y^{-1}\cdot\left(x+\ln y\right)^{-1}\right)_x'=-\frac{1}{y}\left(x+\ln y\right)^{-2}\cdot\left(x+\ln y\right)_x'=-\frac{1}{y}\left(x+\ln y\right)^{-2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\left(\left(x+\ln y\right)^{-1}\right)_y'=-\left(x+\ln y\right)^{-2}\cdot\left(x+\ln y\right)_y'=-\frac{1}{y}\left(x+\ln y\right)^{-2}.$$

Запишемо диференціал другого порядку:

$$\mathrm{d}^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

Підставимо похідні другого порядку, отримаємо

$$\mathrm{d}^2 u=-\left(x+\ln y\right)^{-2}\mathrm{d}x^2+2-\frac{1}{y}\left(x+\ln y\right)^{-2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{y^2}\left(x+\ln y\right)^{-2}\cdot\left(1+x+\ln y\right)\mathrm{d}y^2.$$

З виразів мішаних похідних отримаємо $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$. ❍

Завдання 4

Обчислити наближене значення функції $(1{,}02)^{3{,}01}$.

- Розглянемо функцію $u=f(x,y)=x^y$. Оскільки функція диференційована, то $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f$. Обчислимо повний диференціал функції

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\,\mathrm{d}y.$$

Приймемо $x_0=1$, $y_0=3$, $\mathrm{d}x=0{,}02$, $\mathrm{d}y=0{,}01$. Тоді $(1{,}02)^{3{,}01}\approx 1^3+3\cdot 1^2\cdot 0{,}02+1^3\cdot\ln 1\cdot 0{,}01=1+0{,}06=1{,}06.$ ❍

Завдання 5

Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точці $M(1;3;4)$ у напрямі радіуса-вектора цієї точки. Знайти градієнт функції в цій точці:

• Визначимо координати одиничного вектора, який задає цей напрям. Радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = (1;3;4)$ має довжину $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{26}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{26}}$. Обчислимо частинні похідні цієї функції: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -2z$. Тоді похідна функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в напрямі радіуса-вектора $\overrightarrow{OM} = (1;3;4)$ має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{2x + 6y - 8z}{\sqrt{26}}.$$

Обчислимо похідну за заданим напрямом у точці $M(1;3;4)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 3 - 8\cdot 4}{\sqrt{26}} = -\frac{12}{\sqrt{26}}.$$

Градієнт функції $\overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. У нашому випадку $\overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \{2x,\, 2y,\, -2z\}$. Підставимо координати точки $M(1;3;4)$, отримаємо $\left.\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right|_M = \{2\cdot 1,\, 2\cdot 3,\, -2\cdot 4\}$, $\left.\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right|_M = \{2,\, 6,\, -8\}$. ❍

Завдання 6

Знайти похідну складеної функції $u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

• Похідну цієї складеної функції обчислюють за формулою

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_x = \frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_x = \frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt[4]{t^2+1}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_y=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_y=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\left(-\frac{x}{2y\sqrt{y}}\right)=-\frac{x}{2y^2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}=-\frac{3t^2}{2(t^2+1)}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}};$$

$$\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt[4]{t^2+1}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}6t-\frac{3t^2}{2(t^2+1)}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\frac{3t(3t^2+4)}{2(t^2+1)\cdot\sqrt[4]{t^2+1}}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}.$$

❍

Завдання 7

Дослідити на екстремум функції:

1) $u=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$; 2) $u=x^2+xy+y^2-6x-4y+5$.

• 1) Дослідимо на екстремум функцію $u=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$. Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}=4x+3y-2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3x+2y-1$. З необхідної умови екстремуму $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}4x+3y-2=0,\\ 3x+2y-1=0\end{cases}$ для визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо стаціонарну точку $M_0(-1;2)$. Обчислимо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3$. В стаціонарній точці $M_0(-1;2)$ отримаємо $a_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4$, $a_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$, $a_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3$. Обчислимо $\Delta=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=4\cdot 2-3^2=-1<0$. Отже, функція $u=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$ не має екстремуму.

2) Дослідимо на екстремум функцію $u = x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y + 5$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y - 4$. З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ для визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо стаціонарну точку $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Обчислимо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$. В стаціонарній точці $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ отримаємо $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$. Обчислимо $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$. Оскільки $a_{11} = 2 > 0$, то стаціонарна точка $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ є точкою мінімуму. Обчислимо $u_{\min.} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = -\frac{11}{3}$. ❍

Завдання 8

Дослідити на екстремум функцію $u = -\frac{1}{9}(3x + 5y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y$.

- Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(3x + 5y)^2 + 3x + 5y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + 5y + 5x - 2.$$

З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -(3x + 5y)^2 + 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + 5y + 5x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (3x + 5y)(3x + 5y - 1) = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо сукупність систем:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

З першої системи $\begin{cases} 3x+5y=0, \\ -\dfrac{5}{3}(3x+5y)^2+(3x+5y)+2x-2=0 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} 3x+5y=0, \\ 2x-2=0. \end{cases}$

Тоді $x=1,\ y=-\dfrac{3}{5}$. Маємо стаціонарну точку $M_1\left(1;-\dfrac{3}{5}\right)$.

З другої системи $\begin{cases} 3x+5y-1=0, \\ -\dfrac{5}{3}(3x+5y)^2+(3x+5y)+2x-2=0 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} 3x+5y=1, \\ 2x=\dfrac{8}{3}. \end{cases}$

Звідси $x=\dfrac{4}{3},\ y=-\dfrac{3}{5}$. Маємо стаціонарну точку $M_2\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Обчислимо похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6(3x+5y)+3x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{50}{3}(3x+5y)+5; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-10(3x+5y)+5y.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1\left(1;-\dfrac{3}{5}\right)$. Обчислимо

$$a_{11}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_1}=3; \ a_{22}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_1}=5; \ a_{12}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=5;$$

$$\Delta=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=3\cdot 5-5^2=-10<0.$$

Оскільки в точці $M_1\left(1;-\dfrac{3}{5}\right)$ виконується $\Delta<0$, то ця точка не є точкою екстремуму.

Дослідимо на екстремум точку $M_2\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{3}{5}\right)$. Обчислимо

$$a_{11}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_2}=-3; \ a_{22}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_2}=-\frac{35}{3}; \ a_{12}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{M_2}=-5;$$

$$\Delta=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=-3\cdot\left(-\frac{35}{3}\right)-(-5)^2=10>0.$$

Оскільки в точці $M_2\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{3}{5}\right)$ виконується $\Delta>0$ і $a_{11}=-3<0$, то ця точка є точкою максимуму. Обчислимо $u_{\max.}=u\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{59}{60}$. ❍

Завдання 9

Знайти екстремум функції $u = 2x + 3y$ за умови $x^2 + y^2 = 13$.

- Складемо функцію Лагранжа $L(x, y) = 2x + 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 13\right)$. Обчислимо

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L'_x = 2 + 2\lambda x,\ \frac{\partial L}{\partial y} = L'_y = 3 + 2\lambda y,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L'_\lambda = x^2 + y^2 - 13.$$

Критичні точки знайдемо з системи рівнянь $\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 13 = 0. \end{cases}$

З перших двох рівнянь визначимо $x = -\frac{1}{\lambda}, y = -\frac{3}{2\lambda}$ і підставимо в третє. Отримаємо $\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 13$, $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Звідси $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, $y_2 = -3$. Отже, маємо дві стаціонарні точки: $M_1(2;3)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, і $M_2(-2;-3)$ при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Обчислимо диференціал другого порядку

$$\mathrm{d}^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то $\mathrm{d}^2 L = 2\lambda\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)$.

Якщо $\lambda = -\frac{1}{2}$, то $\mathrm{d}^2 L = -\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) < 0$. Тому функція $u = 2x + 3y$ має умовний максимум в точці $M_1(2;3)$. Обчислимо $u_{\max.} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$.

Якщо $\lambda = \frac{1}{2}$, то $\mathrm{d}^2 L = \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) > 0$. Тому функція $u = 2x + 3y$ має умовний мінімум в точці $M_2(-2;-3)$. Обчислимо $u_{\min.} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -13$. ❍

Завдання 10

Досліджували прибуток y (тис. грн), залежно від витрат на рекламу x (тис. грн). Припускаючи, що між x та y існує лінійна залежність $y = ax + b$, методом найменших квадратів визначити параметри a та b. Визначити сподіваний прибуток, якщо на рекламу витратили 10 000 грн.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	37,58	39,81	42,18	44,58	46,73	49,31	51,48	53,79	56,73

• Припустимо, що між x та y є лінійна залежність $y = ax + b$. Оскільки точки $M_i(x_i; y_i)$ лежать не точно на прямій, а лише біля неї, то формула $y = ax + b$ є наближеною. Підставивши значення координат точок у вираз $ax + b - y$, отримаємо $ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1$, $ax_2 + b - y_2 = \varepsilon$, ..., $ax_n + b - y_n = \varepsilon_n$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ – похибки, які задають відхилення відповідної точки від прямої. Підберемо коефіцієнти прямої a та b так, щоб сума квадратів похибок $S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ була найменшою.

Дослідимо функцію $S = S(a,b)$ на екстремум. Обчислимо

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i).$$

Прирівняємо ці частинні похідні до нуля, отримаємо систему двох лінійних рівнянь для визначення двох невідомих a та b:

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b = B_1; \\ A_{21}a + A_{22}b = B_2, \end{cases}$$

де $A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $A_{22} = n$, $B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, $B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Обчислимо

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 285,$$

$$A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, \; A_{22} = n = 9,$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1 \cdot 37{,}58 + 2 \cdot 39{,}81 + 3 \cdot 42{,}18 + 4 \cdot 44{,}58 + 5 \cdot 46{,}73 + 6 \cdot 49{,}31 +$$
$$= 7 \cdot 51{,}48 + 8 \cdot 53{,}79 + 9 \cdot 56{,}73 = 2252{,}82,$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i = 37{,}58 + 39{,}81 + 42{,}18 + 44{,}58 + 46{,}73 + 49{,}31 + 51{,}48 + 53{,}79 + 56{,}73 = 422{,}19.$$

Підставимо знайдені числа в систему рівнянь, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів a і b:

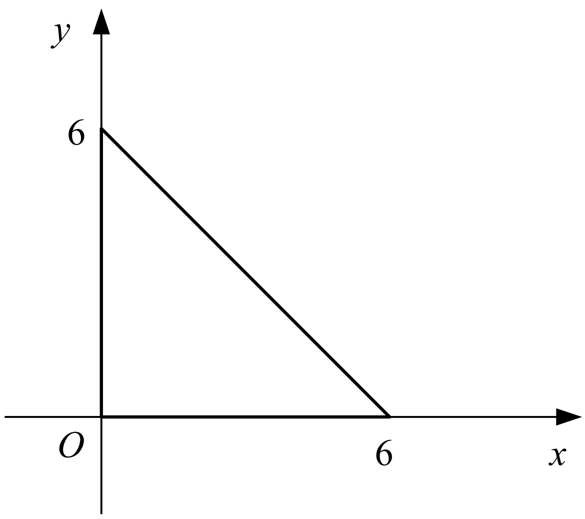
$$\begin{cases} 285a + 45b = 2252{,}82; \\ 45a + 9b = 422{,}19. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь, отримаємо $a = 2{,}36$ і $b = 35{,}11$. Отже, між x та y є лінійна залежність $y = 2{,}36x + 35{,}11$. Якщо на рекламу витратять 10 тисяч гривень , то отримають $y = 2{,}36 \cdot 10 + 35{,}11 = 58{,}71$ тисяч гривень прибутку. ❍

Завдання 11

Знайти найбільше та найменше значення функції $u = x^2 y(4 - x - y)$ в заданій замкненій області D: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6.$

- Область D – трикутник, зображений на рисунку.



Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8xy - 3yx^2 - 2xy^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2yx^2.$$

З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок:

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Звідси $x = 0,\ y = 0,$ або $\begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0. \end{cases}$ Звідси $x = 2,\ y = 1.$ Маємо дві стаціонарні точки $O(0;0),\ M(2;1).$ Обчислимо $u(0;0) = 0,\ u(2;1) = 4.$

Дослідимо функцію на границях області. Розглянемо $x = 0,\ 0 \le y \le 6.$ Тоді $u(0;y) = 0.$ Нехай $y = 0,\ 0 \le x \le 6.$ Тоді $u(x;0) = 0.$ З рівняння $x + y = 6$ $0 \le x \le 6,$ визначимо $y = 6 - x,$ підставимо в $u(x;y),$ отримаємо $\tilde{u}(x) = -2x^2(6 - x).$ Спростимо $\tilde{u}(x),$ і дослідимо на екстремум функцію $\tilde{u}(x) = 2x^3 - 12x^2,\ \ 0 \le x \le 6.$ Обчислимо $\tilde{u}'(x) = 6x^2 - 24x.$ З умови $\tilde{u}'(x) = 0$ отримаємо $6x^2 - 24x = 0,$ звідки маємо стаціонарні точки $x = 0,\ \ x = 4,$ які задовольняють умову $0 \le x \le 6.$ Обчислимо $\tilde{u}(0) = 0,\ \ \tilde{u}(4) = -64.$ Обчислимо значення функції на кінцях відрізка: $\tilde{u}(0) = 0,\ \ \tilde{u}(6) = 0.$ З чисел $u(0;0) = 0,$ $u(2;1) = 4,\ \tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}(4) = -64,\ \tilde{u}(6) = 0$ виберемо найбільше і найменше. Отже, $u_{\text{найб.}} = u(2,1) = 4,\ u_{\text{найм.}} = u(4,2) = -64.$ ❍

Завдання 12

Мале підприємство виробляє товари A та B. Щоденні витрати на виробництво x штук товару A та y штук товару B описує функція $C = 1530 - 20x - 21y + 0{,}2x^2 + 0{,}7y^2$. Визначити кількість штук товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати були мінімальними.

• Дослідимо на екстремум функцію $C = 1530 - 20x - 21y + 0{,}2x^2 + 0{,}7y^2$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial C}{\partial x} = -20 + 0{,}4x;$ $\frac{\partial C}{\partial y} = -21 + 0{,}14y$. З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} -20 + 0{,}4x = 0, \\ -21 + 0{,}14y = 0 \end{cases}$ для визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо $x = 5$, $y = 150$. Отже, маємо стаціонарну точку $M_0(5;150)$. Обчислимо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0{,}4,$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0{,}14,$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$ В стаціонарній точці $M_0(5;150)$ отримаємо $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0{,}4,$ $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0{,}14,$ $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$ Обчислимо $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}14 - 0^2 = 0{,}056 > 0.$ Оскільки $a_{11} = 0{,}4 > 0,$ то стаціонарна точка $M_0(5;150)$ є точкою мінімуму. Обчислимо

$C_{\min.} = 1530 - 20 \cdot 5 - 21 \cdot 150 + 0{,}2 \cdot 5^2 + 0{,}7 \cdot 150^2 = 14035.$ ❍

Завдання 13

Кількість виробленої продукції залежно від чинників x та y виробництва описує виробнича функція $u = 4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y$. Знайти: а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників; б) еластичність функції за кожним із чинників; в) коефіцієнти еластичності за чинниками для $x = 1$, $y = 1$. Зробити висновки.

• Щоб визначити закон зміни виробничої функції за чинниками x та y обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 16xy^2 + 40x + 15, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12xy^2 - 16x^2y + 40y^3 - 20y - 35.$$

Обчислимо еластичність функції за кожним з чинників:

$$E_x(u) = \frac{x}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4xy^3 - 16x^2y^2 + 40x^2 + 15x}{4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y},$$

$$E_y(u) = \frac{y}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{12xy^3 - 16x^2y^2 + 40y^4 - 20y^2 - 35y}{4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y}.$$

Обчислимо коефіцієнти еластичності для $x = 1, \ y = 1$.

$$E_x(u) = \frac{4 - 16 + 40 + 15}{4 - 8 + 10 + 20 - 10 + 15 - 35} = \frac{43}{-4} \approx -10{,}75,$$

$$E_x(u) = \frac{12 - 16 + 40 - 20 - 35}{4 - 8 + 10 + 20 - 10 + 15 - 35} = \frac{-19}{-4} \approx 4{,}75.$$

Отже, із зростанням чинника x на 1% і незмінності чинника y, відбудеться відносне спадання заданої виробничої функції на 10,75%. Із зростанням чинника y на 1% і незмінності чинника x, відбудеться відносне спадання заданої виробничої функції на 4,75%. ❍

Список літератури

1. *Барковський В.В, Барковська Н.В.* Математика для економістів. Вища математика. К., 1997.
2. *Домбровський І.В.*, *Крижанівський І.М., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М., Цебрій О.Р., Шинкарик М.І.* Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики. Навчальний посібник. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2004.
3. *Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О.* та ін. Збірник задач з вищої математики. К., 1967.
4. *Рябушко А.П.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. Минск, 1991.
5. *Тевяшов А*.Д., *Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс. Збірник задач і вправ. Х.: Рубікон, 1999.
6. *Тріщ Б. М*. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі: Навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008.
7. *Тріщ Б. М*. Вища математика для економістів: Підручник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2011.
8. *Тріщ Б.М.* Практикум з вищої математики. Модуль 6. Функції багатьох змінних. Навчальний посібник. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012. 109 с.