

Індивідуальні завдання

Варіант індивідуального завдання визначається двома параметрами: k – передостання цифра номера залікової книжки і l – остання цифра номера залікової книжки. Завдання варіанта є на перетині відповідного рядка і стовпця:

k	l									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
2	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	351 381	352 382	353 383	354 384	355 385	356 386	357 387	358 388	359 389	360 390
3	3 35 68 100 150 169 184 223 254 300 327 359 385	4 36 69 101 149 170 185 224 255 299 326 358 384	5 36 70 102 148 171 186 225 256 298 325 357 383	6 38 71 103 147 172 187 226 257 297 324 356 382	7 39 72 104 146 173 188 227 258 296 323 355 381	8 40 73 105 145 174 189 228 259 295 322 354 380	9 41 74 106 144 175 190 229 260 294 321 353 379	10 42 75 107 143 176 191 230 261 293 320 352 378	11 43 76 108 142 177 192 231 262 292 319 351 377	12 44 77 109 141 178 193 232 263 291 318 350 376
4	13 45 78 110 140 179 194 233 264 290 317 349 375	14 46 79 111 139 180 195 234 265 289 316 348 374	15 47 80 112 138 151 196 235 266 288 315 347 373	16 48 81 113 137 152 197 236 267 287 314 346 372	17 49 82 114 136 153 198 237 268 286 313 345 371	18 50 83 115 135 154 199 238 269 285 312 344 370	19 51 84 116 134 155 200 239 270 284 311 343 369	20 52 85 117 133 156 201 240 271 283 310 342 368	21 53 86 118 132 157 202 241 272 282 309 341 367	22 54 87 119 131 158 203 242 273 281 308 340 366
5	23 55 88 120 130 159 204 213 244 280 307 339 365	24 56 89 91 129 160 205 214 245 279 306 338 364	25 57 90 92 128 161 206 215 246 278 305 337 363	26 58 61 93 127 162 207 216 247 277 304 336 362	27 59 62 94 126 163 208 217 248 276 303 335 361	28 60 63 95 125 164 209 218 249 275 302 334 390	29 31 64 95 124 165 210 219 250 274 301 333 389	30 32 65 97 123 166 183 220 251 273 330 332 388	1 33 66 98 122 167 182 221 252 272 329 331 387	2 34 67 99 121 168 181 222 253 271 328 360 386

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
	197	198	199	200	210	209	208	207	206	205
	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261
	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293
	315	314	313	312	311	310	309	308	307	306
	351	352	353	352	351	350	349	348	347	346
	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372
7	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	82	83	84	85	86	87	88	89	90	61
	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116
	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
	204	203	202	201	196	195	194	193	192	191
	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238
	262	263	264	265	266	267	268	269	270	241
	294	295	296	297	298	299	300	271	272	273
	305	304	303	302	301	316	317	318	319	320
	345	344	343	342	341	340	339	338	337	336
	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382
8	27	28	29	30	1	2	3	4	4	6
	60	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
	117	118	119	120	95	96	97	98	99	100
	150	129	128	127	126	125	124	123	122	121
	176	177	178	179	180	151	152	153	154	155
	185	186	187	188	189	190	184	183	182	181
	239	240	211	212	213	214	215	216	217	218
	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251
	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283
	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
	335	334	333	332	331	360	359	358	357	356
	383	384	385	386	387	388	389	390	361	362
9	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	120	119	118	117	116	97	114	113	112	111

135	134	133	132	131	130	129	128	127	126
168	169	170	171	172	173	174	175	176	177
201	202	203	204	205	205	207	208	209	210
215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
270	269	268	267	266	265	264	263	262	261
277	279	281	283	285	286	287	288	289	297
309	310	311	312	313	314	315	316	317	318
336	337	338	339	340	341	342	343	344	345
377	378	379	380	381	382	383	384	385	386

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1

Знайти області визначення функцій:

1) $u = \sqrt{3 - x^2 - y^2} \cdot \arcsin(2x - 3y)$;	2) $u = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 10}$;
3) $u = \sqrt{5 - x^2 - y^2} \cdot \arccos(3x - 5y)$;	4) $u = \sqrt{2x - 5y} \cdot \ln(x^2 + y^2 - 5)$;
5) $u = \frac{\sqrt{4x - 5y}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;	6) $u = \frac{\sqrt{3x + 2y}}{\ln(5 - x^2 - y^2)}$;
7) $u = \sqrt{6 - x^2 - y^2} \cdot \arcsin(2x + 3y)$;	8) $u = \sqrt{3x - 5y} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 12}$;
9) $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \cdot \arccos(3x - 7y)$;	10) $u = \sqrt{2x + 7y} \cdot \ln(x^2 + y^2 - 9)$;
11) $u = \frac{\sqrt{4x + 9y}}{\sqrt{11 - x^2 - y^2}}$;	12) $u = \frac{\sqrt{3x + 7y}}{\ln(5 - 2x^2 - 5y^2)}$;
13) $u = \sqrt{5 - x^2 - 2y^2} \cdot \arcsin(2x + 5y)$;	14) $u = \sqrt{4x - 7y} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 14}$;
15) $u = \sqrt{7 - x^2 - 3y^2} \cdot \arccos(4x - 5y)$;	16) $u = \sqrt{2x - 8y} \cdot \ln(x^2 + y^2 - 6)$;
17) $u = \frac{\sqrt{4x - 7y}}{\sqrt{14 - 3x^2 - 5y^2}}$;	18) $u = \frac{\sqrt{3x + 9y}}{\ln(15 - 2x^2 - y^2)}$;
19) $u = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2} \cdot \arcsin(5x - 3y)$;	20) $u = \sqrt{5x - 8y} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 10}$;
21) $u = \sqrt{8 - 2x^2 - y^2} \cdot \arccos(3x + 8y)$;	22) $u = \sqrt{2x + 6y} \cdot \ln(x^2 + y^2 - 14)$;
23) $u = \frac{\sqrt{2x - 5y}}{\sqrt{11 - x^2 - y^2}}$;	24) $u = \frac{\sqrt{3x + 7y}}{\ln(21 - x^2 - y^2)}$;
25) $u = \sqrt{11 - x^2 - 2y} \cdot \arcsin(2x - 7y)$;	26) $u = \sqrt{12 - 3x^2 - y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 15}$;

27) $u = \sqrt{6 - x^2 - 3y^2} \cdot \arccos(6x - 5y);$	28) $u = \sqrt{7x - 5y} \cdot \ln(x^2 + y^2 - 25);$
29) $u = \frac{\sqrt{4x - 9y}}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}};$	30) $u = \frac{\sqrt{3x + 8y}}{\ln(36 - x^2 - y^2)}.$

Завдання 2

Задано функцію $u = f(x, y)$. Перевірити рівність $u''_{xy} = u''_{yx}$. Перевірити, чи ця функція задовольняє задане рівняння:

31) $u = x^y; \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x};$
32) $u = e^{x/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2} e^x \sin^2\left(\frac{y}{2}\right);$
33) $u = x^y \cdot y^x; \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + \ln u) \cdot u;$
34) $u = \frac{xy}{x+y}; \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u;$
35) $u = e^{xy}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0;$
36) $u = \frac{y}{x}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
37) $u = \frac{x^2 + y^2}{x - y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{x + y}{x - y};$
38) $u = \arcsin \frac{x}{x+y}; \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
39) $u = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right); \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u;$
40) $u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy); \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0;$
41) $u = \ln(x^2 - y^2); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

42) $u = y \ln(x^2 - y^2); \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2};$
43) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
44) $u = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u;$
45) $u = y \ln(x^2 - y^2); \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2};$
46) $u = \ln(x^2 + xy + y^2); x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2;$
47) $u = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$
48) $u = \frac{xy}{x + y}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u;$
49) $u = \ln(x^2 + y^2); y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
50) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
51) $u = xy + xe^{y/x}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u + xy;$
52) $u = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} u;$
53) $u = x^y; \frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u;$
54) $u = e^x \cos y; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
55) $u = x^y \cdot y^x; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u)u;$
56) $u = \frac{y}{x}; x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
57) $u = \arcsin \frac{x}{x + y}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
58) $u = \sqrt{2xy + y^2}; \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u};$

59) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
60) $u = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}; x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$

Завдання 3

Задано функцію $u = f(x, y)$. Обчислити диференціали першого і другого порядку. Перевірити рівність $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

61) $u = \sin \sqrt{\frac{y}{x+2y}};$	62) $u = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y};$	63) $u = \ln(2x^2 - 3y^2);$
64) $u = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{x+y}};$	65) $u = \cos \frac{x+y}{x-y};$	66) $u = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^3};$
67) $u = \ln(\sqrt{xy} - 1);$	68) $u = \operatorname{arctg}(2x - 3y);$	69) $u = \sin \sqrt{x - y^3};$
70) $u = \operatorname{arctg}(x^2 y);$	71) $u = \ln(5x^2 - y^3);$	72) $u = \operatorname{arctg} \sqrt{xy^3};$
73) $u = \cos \sqrt{x^2 - 2y^2};$	74) $u = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2);$	75) $u = \ln(x^2 - e^{-x});$
76) $u = \arcsin \sqrt{xy};$	77) $u = \sin(x^2 - 3xy);$	78) $u = \operatorname{arctg}(x^3 + y^3);$
79) $u = e^{-x^3 + 2y^2};$	80) $u = \cos \sqrt{\frac{x}{y^3}};$	81) $u = \arccos \frac{x}{y};$
82) $u = \operatorname{arctg} \sqrt{x^5 y^3};$	83) $u = \ln(\sqrt{x^3 y} - 5);$	84) $u = \ln(\sqrt{xy^3} - 2xy);$
85) $u = \sin \sqrt{x^2 - 4y^3};$	86) $u = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^3};$	87) $u = \cos \frac{2x + 3y}{5x - y};$
88) $u = \operatorname{arctg} \sqrt{x^5 y^3};$	89) $u = \ln(x^3 - e^{-5x});$	90) $u = \sin(x^3 - 3x^2 y).$

Завдання 4

Обчислити наближене значення функції $u = f(x, y)$, замінюючи приріст функції її диференціалом першого порядку:

91) $\sqrt{1,02}(2,03)^{1,02}$;	92) $\sqrt{(2,96)^3 + (2,02)^2 - 6}$;	93) $\ln(\sqrt[3]{0,97} + \sqrt[4]{1,02} - 1)$;
94) $\sqrt[5]{2,98^3 + 1,97^2 + 1}$;	95) $\frac{3,01}{3,01^2 + 1,97^3 + 3}$;	96) $2,96e^{0,02}$;
97) $2,02e^{0,03}$;	98) $2,01^{3,98}$;	99) $\sqrt{1,04}(1,04)^{2,92}$;
100) $\sqrt{(1,97)^3 + (2,02)^3 + 4}$;	101) $\ln(\sqrt[5]{0,98} + \sqrt[4]{1,03} - 1)$;	102) $\operatorname{arctg} \frac{1,07^2}{0,92}$;
103) $\frac{4,02^2}{4,02^2 + 2,97^3 + 1}$;	104) $\frac{3,02}{3,02^2 + 1,96^3 + 3}$;	105) $\operatorname{arctg} \frac{(0,97)^2}{1,02}$;
106) $2,94^{4,08}$;	107) $\sqrt{1,03}(2,04)^{1,03}$;	108) $\sqrt{(3,06)^3 + (1,97)^2 - 6}$;
109) $\ln(\sqrt[3]{0,95} + \sqrt[5]{1,03} - 1)$;	110) $\sqrt[5]{3,08^3 + 2,07^2 + 1}$;	111) $\sqrt[5]{3,08^3 + 1,97^2 + 1}$;
112) $\sqrt[5]{3,01^3 + 1,96^2 + 1}$;	113) $5,03e^{0,01}$;	114) $1,95^{3,08}$;
115) $\sqrt{1,04}(1,04)^{2,02}$;	116) $\sqrt{(2,95)^3 + (2,04)^2 - 6}$;	117) $\ln(\sqrt[5]{1,07} + \sqrt[4]{0,92} - 1)$;
118) $\operatorname{arctg} \frac{0,95^2}{1,04}$;	119) $\frac{4,01}{4,01^2 + 2,97^3 + 7}$;	120) $\operatorname{arctg} \frac{(0,96)^3}{1,02}$.

Завдання 5

Знайти похідну функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у напрямі радіуса-вектора цієї точки. Знайти градієнт функції в цій точці:

121) $u = (z^3 - 2x) \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, $M_0(0, -1, 1)$;
122) $u = \sqrt[3]{x} \cdot \ln(2x^2y + zx + y^3z)$, $M_0(1, 1, 1)$;
123) $u = z \cdot (1 + x)^{yz}$, $M_0(1, 1, 2)$;
124) $u = \sqrt{x^2 + z^3} \cdot \ln(x^3z + xy^2 - z^3)$, $M_0(1, 1, 1)$;
125) $u = \sqrt{z} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1, 1, 1)$;
126) $u = (z^4 - 7x) \cdot \sqrt[3]{x^5 + y^2}$, $M_0(0, -1, 1)$;
127) $u = \sqrt[3]{x+2} \cdot \ln(2x^4y + 5zx + y^3z)$, $M_0(1, 1, 1)$;

128) $u = z \cdot (2 - x)^{-3yz}$, $M_0(1,1,2)$;
129) $u = \sqrt{x^2 + 3z^4} \cdot \ln(x^2z + xy^4 - z^3)$, $M_0(1,1,1)$;
130) $u = \sqrt{z+3} \cdot \ln(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1,1,1)$;
131) $u = (z^2 - 5x) \cdot \sqrt[4]{x^3 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
132) $u = \sqrt[3]{x+2z} \cdot \ln(5x^2y + 3zx + y^4z)$, $M_0(1,1,1)$;
133) $u = (z+2) \cdot (1+x)^{-yz}$, $M_0(1,1,2)$;
134) $u = \sqrt{x^2 + 4z^2} \cdot \ln(x^3z + 5xy^2 - 2z^3)$, $M_0(1,1,1)$;
135) $u = \sqrt{z} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1,1,1)$;
136) $u = (z^3 - 2x^4) \cdot \sqrt[3]{x^2 + 5y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
137) $u = \sqrt[3]{2x+3y} \cdot \ln(2x^2y + 6zx + y^2z)$, $M_0(1,1,1)$;
138) $u = (xz+2) \cdot (1+x)^{-4yz}$, $M_0(1,1,2)$;
139) $u = \sqrt{x^2 + 4z^3} \cdot \ln(x^4z + 2xy^2 - z^3)$, $M_0(1,1,1)$;
140) $u = \sqrt{3z-2} \cdot \ln(\sqrt{x} + 4\sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1,1,1)$;
141) $u = (z^2 - 12x) \cdot \sqrt[3]{3x^2 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
142) $u = \sqrt[3]{x+3y} \cdot \ln(2x^2y + 4z^4x + y^3z)$, $M_0(1,1,1)$;
143) $u = (yz+2) \cdot (1+x)^{5yz}$, $M_0(1,1,2)$;
144) $u = \sqrt{2x^2 + z^3} \cdot \ln(x^3z + 3x^3y^2 - z^3)$, $M_0(1,1,1)$;
145) $u = \sqrt{zy+2} \cdot \ln(3\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1,1,1)$;
146) $u = (z^2 - 5x) \cdot \sqrt[4]{x^5 + y^2}$, $M_0(0,-1,1)$;
147) $u = \sqrt[5]{yx} \cdot \ln(2x^2y + zx + y^3z)$, $M_0(1,1,1)$;
148) $u = (zy+x) \cdot (1+3x)^{yz}$, $M_0(1,1,2)$;
149) $u = \sqrt{x^2 + 3z^4} \cdot \ln(x^3z + 2x^5y^2 - z^3)$, $M_0(1,1,1)$;
150) $u = \sqrt{zy+x^2} \cdot \ln(\sqrt{x} + 4\sqrt{y^3} + 3\sqrt[4]{z^3})$, $M_0(1,1,1)$.

Завдання 6

Знайти похідну складеної функції $u = u(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$:

151) $u = e^{2x-5y}$, $x = \cos t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
152) $u = \ln(x^3 - 4y^2)$, $x = \arcsin t$, $y = t^3$;
153) $u = y^x$, $x = \ln(2t + 3)$, $y = e^t$;
154) $u = x^3 \sin(y + 3)$, $x = \arccos t$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
155) $u = \arcsin\left(\frac{x}{y+3}\right)$, $x = \ln t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
156) $u = \sqrt[4]{x^2 - 5xy + 3y^4}$, $x = \sin t$, $y = e^{-3t}$;
157) $u = e^{3x-5y}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
158) $u = \ln(5x^4 - 4y^2)$, $x = \arcsin t^2$, $y = t^5$;
159) $u = y^{1+x}$, $x = \ln^2(5t + 3)$, $y = e^{-3t}$;
160) $u = x^3 \sin^4(y + 3)$, $x = \arccos t$, $y = \sqrt[5]{t^3 + 1}$;
161) $u = \arcsin\left(\frac{2x-5}{y+3}\right)$, $x = \ln^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
162) $u = \sqrt[5]{x^4 - 8x^3y + 3y^4}$, $x = \sin t^2$, $y = e^{-3t}$;
163) $u = e^{2x+7y}$, $x = \cos^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
164) $u = \ln(x^3 - 3xy - 4y^3)$, $x = \arcsin t^3$, $y = t^3$;
165) $u = (2y - 3)^{5x}$, $x = \ln^3(2t + 3)$, $y = e^t$;
166) $u = (x^3 + 2y)\sin(y + 6)$, $x = \arccos t^4$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
167) $u = \arcsin\left(\frac{4x-5y}{y+3}\right)$, $x = \ln^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
168) $u = \sqrt[5]{3x^4 - 5xy^2 + 3y^4}$, $x = \sin^5 t$, $y = e^{-3t}$;
169) $u = e^{4x-5y}$, $x = \cos^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
170) $u = \ln(5x^3 - 6y^2)$, $x = \arcsin t^5$, $y = t^3$;
171) $u = (3y - 2x)^x$, $x = \ln^4(2t + 3)$, $y = e^{-3t}$;
172) $u = (x + 4)^3 \sin(5y + 3)$, $x = \arccos^2 t$, $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$;
173) $u = \arcsin\left(\frac{x-5}{y+3}\right)$, $x = \ln^5 t$, $y = \sqrt[3]{t^4 + 3}$;
174) $u = \sqrt[4]{x^2 - 5x^4y + 3y^4}$, $x = \sin^3 t$, $y = e^{-3t}$;

175) $u = xe^{2x-5y}$, $x = \cos^4 t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 1}$;
176) $u = y \cdot \ln(x^5 - 4y^2)$, $x = \arcsin t$, $y = t^3$;
177) $u = (2y - 5)^x$, $x = \ln^5(2t + 3)$, $y = e^t$;
178) $u = x^4 \sin(4y + 3x)$, $x = \arccost$, $y = \sqrt[5]{t^2 + 4}$;
179) $u = x^4 \arcsin\left(\frac{x}{y+3}\right)$, $x = \ln t$, $y = \sqrt[3]{t^5 + 3}$;
180) $u = \sqrt[7]{2x^3 - 5x^2y + 3y^4}$, $x = \sin^5 t$, $y = e^{-3t}$.

Завдання 7

Дослідити на екстремум функцію:

181) $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$;
182) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 4$;
183) $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5$;
184) $z = 2x^2 - 5xy + y^2 - 14x + 9y + 10$;
185) $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y + 1$;
186) $z = -\frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{y^2}{2} + 4x + 5y - 2$;
187) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$;
188) $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3$;
189) $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 10x + 1$;
190) $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$;
191) $z = -x^2 + xy - 2y^2 + 3x - 5y + 2$;
192) $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$;
193) $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 9x - 6y + 5$;
194) $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 9x + y + 3$;
195) $z = -2x^2 - 3xy - 4y^2 - 7x - 7y + 1$;
196) $z = -3x^2 + 2xy - y^2 - 14x + 6y + 8$;

197) $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 6y + 7;$
198) $z = x^2 - xy + 3y^2 + x - 17y + 2;$
199) $z = 4x^2 - xy + y^2 - 9x + 3y - 5;$
200) $z = -4x^2 + xy - y^2 + 9x - 3y + 5;$
201) $z = \frac{x^2}{2} - 4xy + y^2 + 3x + 2y + 3;$
202) $z = 2x^2 + 3xy + 3y^2 - 10x - 18y + 1;$
203) $z = -2x^2 + 3xy - 3y^2 - x + 3y + 6;$
204) $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 5x - 3y + 4;$
205) $z = -2x^2 + xy - \frac{y^2}{2} + 7x - y + 3;$
206) $z = 2x^2 - xy + \frac{y^2}{2} - 7x + y + 2;$
207) $z = -x^2 + 4xy - y^2 - 2x - 2y + 4;$
208) $z = x^2 - 6xy + 3y^2 - 6x + 14y - 3;$
209) $z = -2x^2 + 2xy - 3y^2 - 2x + 16y - 3;$
210) $z = x^2 - xy + y^2 - 7x + 2y - 5.$

Завдання 8

Дослідити на екстремум функцію:

211) $u = -\frac{1}{9}(3x + 2y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy + y;$
212) $u = -\frac{1}{6}(2x + 3y)^3 + x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy - y;$
213) $u = -\frac{1}{6}(2x + y)^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + y;$
213) $u = -\frac{1}{6}(2x + y)^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + y;$
214) $u = -\frac{1}{3}(x + 2y)^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2xy - y;$
215) $u = \frac{1}{9}(3x + 2y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy + y;$

216) $u = \frac{1}{6}(-2x + y)^3 - x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 3y;$
217) $u = \frac{1}{6}(2x + y)^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + y;$
218) $u = \frac{1}{3}(x + 2y)^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2xy - y;$
219) $u = -\frac{1}{3}(x - 2y)^3 + \frac{1}{2}x^2 - y^2 - 2xy + 3y;$
220) $u = \frac{1}{9}(-3x + 2y)^3 - \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 5y;$
221) $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y;$
222) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$
223) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20;$
224) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5;$
225) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10;$
226) $z = x^3 + y^3 - 3xy + 5;$
227) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3;$
228) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$
229) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$
230) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 3;$
231) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 7;$
232) $z = x^3 + y^3 - 6xy + 8;$
233) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$
234) $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y;$
235) $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2;$
236) $z = x^3 - 2x^2y^2 + y^4;$
237) $z = -\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1;$
238) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$
239) $z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16;$
240) $z = 2x^3 + xy^2 - 6x^2 - y^2.$

Завдання 9

Знайти екстремум функції $u = f(x, y)$ за умови $g(x, y) = 0$.

241) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} = 0$;
242) $u = 3x^2 - 10xy + 4y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 3 = 0$;
243) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 5$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{9} = 0$;
244) $u = 4x^2 + 12xy + y^2$, якщо $x^2 + 9y^2 - 25 = 0$;
245) $u = \ln(xy)$, якщо $x^3 + 3xy + y^3 = 0$;
246) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{16} = 0$;
247) $u = x^2 - 12xy + 4y^2$, якщо $x^2 + 3y^2 - 3 = 0$;
248) $u = 6 - 5x - 4y$, якщо $x^2 - y^2 - 9 = 0$;
249) $u = x^2 + xy + y^2$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
250) $u = x^2 - y^2$, якщо $(x-1)^3 + y^2 = 0$;
251) $u = xy$, якщо $x^4 + y^4 - 1 = 0$;
252) $u = x^2 - y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 2xy = 0$;
253) $u = \frac{x}{4} + \frac{y}{8}$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
254) $u = \frac{x}{10} + \frac{y}{16}$, якщо $x^2 - y^2 - 9 = 0$;
255) $u = 5 - 3x - 4y$, якщо $x^2 - y^2 - 25 = 0$;
256) $u = 4x^2 + 10xy + 7y^2$, якщо $2x^2 + y^2 - 3 = 0$;
257) $u = 1 - 4x - 8y$, якщо $x^2 - 8y^2 - 8 = 0$;
258) $u = x^2 + 6xy + y^2$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
259) $u = x^2 + 8xy + y^2$, якщо $x^2 - 4y^2 - 25 = 0$;
260) $u = x - y - 4$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
261) $u = 2x + y - 4$ якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
262) $u = xy$, якщо $x^2 - y^2 - 16 = 0$;
263) $u = x + 2y - 4$ якщо $x^2 + y^2 - 5 = 0$;
264) $u = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 - 25 = 0$;
265) $u = xy$, якщо $x^2 + y^2 - 16 = 0$;

266) $u = x^2 + y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
267) $u = x^2 + 2y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 2y = 0$;
268) $u = \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$, якщо $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
269) $u = 5x^2 + 10xy + 4y^2$, якщо $x^2 + y^2 - 3 = 0$;
270) $u = 2x^2 + 14xy + y^2$, якщо $2x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Завдання 10

Досліджували прибуток y (тис. грн), залежно від витрат на рекламу x (тис. грн). Припускаючи, що між x та y існує лінійна залежність $y = ax + b$, методом найменших квадратів визначити параметри a та b . Визначити сподіваний прибуток, якщо на рекламу витратили 10 000 грн.

271)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,03	18,49	25,95	33,41	40,87	48,33	55,79	63,25	70,71
272)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,11	14,44	18,77	22,1	27,43	31,76	36,09	40,42	44,75
273)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,11	12,48	15,85	19,22	22,59	25,96	29,33	32,7	36,07
274)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,62	16,01	20,38	24,76	29,14	33,52	37,91	42,28	46,67
275)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,69	15,93	23,17	30,41	37,65	44,89	52,13	59,37	66,61
276)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	12,42	15,79	19,58	23,37	27,16	30,95	34,74	38,53	42,32
277)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,22	18,61	23,04	27,39	31,78	36,17	40,56	44,95	49,34
278)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,17	13,21	16,03	18,96	21,89	24,82	27,75	30,68	33,61
279)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	11,36	18,25	25,14	32,03	38,92	45,81	52,73	59,57	66,48
280)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,21	17,04	24,87	32,74	40,53	48,36	56,19	64,02	71,85
281)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	6,63	10,92	15,21	19,53	23,79	28,08	32,37	36,63	40,95
282)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	y_i	13,65	19,37	25,09	30,81	36,53	42,25	47,97	53,69	59,41
283)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	17,62	25,87	34,14	42,41	50,68	58,97	67,22	75,49	83,76
284)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,34	21,12	26,97	32,68	38,46	44,24	50,12	55,84	61,58
285)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,82	17,19	24,56	31,93	39,34	46,67	54,04	61,41	68,74
286)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,33	12,11	15,89	19,67	23,45	27,23	31,01	34,79	38,57
287)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	13,53	19,17	24,84	30,52	36,18	41,87	47,52	53,19	58,86
288)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,81	17,73	25,65	33,57	41,49	49,42	57,33	65,25	73,17
289)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	8,75	13,73	18,71	23,69	28,67	33,65	38,63	43,61	48,59
290)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	10,28	18,11	25,94	33,76	41,63	49,43	57,26	65,09	72,92
291)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,03	21,49	28,95	36,41	43,87	51,33	58,79	66,25	73,71
292)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	12,11	14,44	20,77	24,1	29,43	33,76	38,09	42,42	46,75
293)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,11	16,48	19,85	23,22	26,59	29,96	33,33	36,7	40,07
294)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,62	20,01	24,38	28,76	33,14	37,52	41,91	46,28	50,67
295)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	9,69	16,93	24,17	31,41	38,65	45,89	53,13	60,37	67,61
296)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,42	18,79	22,58	26,37	30,16	33,95	37,74	41,53	45,32
297)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	16,22	20,61	25,04	29,39	33,78	38,17	42,56	46,95	51,34
298)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	15,17	18,21	21,03	23,96	26,89	29,82	32,75	35,68	38,61
299)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	14,36	21,25	28,14	35,03	41,92	48,81	55,73	62,57	69,48
300)	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	19,21	27,04	34,87	42,74	50,53	58,36	66,19	74,02	81,85

Завдання 11

Знайти найбільше та найменше значення функції $u = f(x, y)$ в заданій замкненій області D .

301) $u = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;

302) $u = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$;

303) $u = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;

304) $u = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = x^2 - 4, y = 0$;

305) $u = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$;

306) $u = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0$;

307) $u = x^2 + xy - 2$, $D: y = 4x^2 - 4, y = 0$;

308) $u = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y$, $D: x = 2, y = 0, x - y + 2 = 0$;

309) $u = -9x^2 - 9y^2 + 6xy + 4x + 4y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$;

310) $u = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$;

311) $u = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 5$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$;

312) $u = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$;

313) $u = 0,5x^2 - xy$, $D: y = \frac{1}{3}x^2, y = 3$;

314) $u = 2x^2 + 2xy - 0,5y^2 - 4x$, $D: x = 0, y = 2, y - 2x = 0$;

315) $u = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 6y + 8$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;

316) $u = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$;

317) $u = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$;

318) $u = 0,5x^2 - xy$, $D: y = 2x^2, y = 8$;

319) $u = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;

320) $u = x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 2$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$;

321) $u = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 8$, $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$;

322) $u = 2x^2 - 0,5y^2 + 2xy - 4x + 2$, $y = 2x, y = 2, x = 0$;

323) $u = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 6 = 0$;

324) $u = x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$;

325) $u = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$;

326) $u = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$;

327) $u = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y$, $D: x = 2, y = 0, x - y + 2 = 0$;

$$328) u = x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 2, D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0;$$

$$329) u = x^3 + y^3 - 3xy, D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2;$$

$$330) u = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 5, D: x = 2, x = 5, y = -1, y = 2.$$

Завдання 12

Мале підприємство виробляє товари A та B . Щоденні витрати на виробництво x штук товару A та y штук товару B описує функція $C = C(x, y)$. Визначити кількість штук товарів A і B , яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати були мінімальними.

$$331) C = 386 - 3x - 5y + 0,1x^2 + 0,1y^2;$$

$$332) C = 412 - 4x - 6y + 0,2x^2 + 0,3y^2;$$

$$333) C = 501 - 5x - 7y + 0,1x^2 + 0,5y^2;$$

$$334) C = 370 - 8x - 6y + 0,2x^2 + 0,3y^2;$$

$$335) C = 390 - 2x - 9y + 0,1x^2 + 0,3y^2;$$

$$336) C = 368 - 9x - 7y + 0,3x^2 + 0,1y^2;$$

$$337) C = 505 - 10x - 3y + 0,2x^2 + 0,1y^2;$$

$$338) C = 499 - 11x - 2y + 0,2x^2 + 0,1y^2;$$

$$339) C = 398 - 12x - 3y + 0,5x^2 + 0,1y^2;$$

$$340) C = 299 - 2x - 11y + 0,1x^2 + 0,2y^2;$$

$$341) C = 331 - 3x - 12y + 0,1x^2 + 0,5y^2;$$

$$342) C = 432 - 4x - 14y + 0,2x^2 + 0,7y^2;$$

$$343) C = 543 - 15x - 5y + 0,3x^2 + 0,1y^2;$$

$$344) C = 654 - 16x - 7y + 0,4x^2 + 0,1y^2;$$

$$345) C = 499 - 5x - 15y + 0,1x^2 + 0,3y^2;$$

$$346) C = 401 - 7x - 16y + 0,1x^2 + 0,4y^2;$$

$$347) C = 670 - 17x - 8y + 0,5x^2 + 0,2y^2;$$

$$348) C = 597 - 13x - 3y + 0,5x^2 + 0,1y^2;$$

$$349) C = 637 - 8x - 17y + 0,2x^2 + 0,5y^2;$$

$$350) C = 743 - 14x - 5y + 0,7x^2 + 0,1y^2;$$

$$351) C = 547 - 3x - 13y + 0,1x^2 + 0,5y^2;$$

$$352) C = 699 - 5x - 14y + 0,1x^2 + 0,7y^2;$$

$$353) C = 591 - 15x - 6y + 0,5x^2 + 0,3y^2;$$

- 354) $C = 679 - 16x - 8y + 0,2x^2 + 0,2y^2$;
 355) $C = 704 - 6x - 15y + 0,3x^2 + 0,5y^2$;
 356) $C = 800 - 8x - 16y + 0,2x^2 + 0,2y^2$;
 357) $C = 987 - 17x - 9y + 0,5x^2 + 0,3y^2$;
 358) $C = 941 - 18x - 10y + 0,3x^2 + 0,5y^2$;
 359) $C = 2100 - 20x - 4y + 0,5x^2 + 0,2y^2$;
 360) $C = 1312 - 10x - 18y + 0,5x^2 + 0,3y^2$.

Завдання 13

Кількість виробленої продукції залежно від чинників x та y виробництва описує виробнича функція $u = U(x, y)$. Знайти: а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників; б) еластичність функції за кожним із чинників; в) коефіцієнти еластичності за чинниками для $x = 1$, $y = 1$. Зробити висновки.

- 361) $u = xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 5x - 7y$;
 362) $u = 2xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 + 21x^2 - 13y^2 + 15x - 17y$;
 363) $u = -2xy^3 + 4x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 27y$;
 364) $u = 5xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 7y$;
 365) $u = -xy^3 - 7x^2y^2 + 5y^4 + 30x^2 - 17y^2 + 5x - 9y$;
 366) $u = 5xy^3 - 8x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 7y$;
 367) $u = 3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 6x - 7y$;
 368) $u = -2xy^3 - 6x^2y^2 - 32y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 7y$;
 369) $u = 4xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 12x^2 - 20y^2 + 8x - 5y$;
 370) $u = 7xy^3 - 2x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 4x - 9y$;
 371) $u = xy^3 - 16x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 17y$;
 372) $u = 2xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 5x - 7y$;
 373) $u = -3xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 + 21x^2 - 13y^2 + 15x - 17y$;
 374) $u = -2xy^3 + 3x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 25y$;
 375) $u = -5xy^3 + 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 12y$;
 376) $u = -4xy^3 - 7x^2y^2 + 15y^4 + 30x^2 - 17y^2 + 5x - 19y$;
 377) $u = 3xy^3 - 18x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 4y$;

- 378) $u = -3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 13y^2 + 6x - 9y$;
379) $u = -7xy^3 - 6x^2y^2 + 32y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 3y$;
380) $u = -4xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 32x^2 - 20y^2 + 8x - 15y$;
381) $u = -7xy^3 - 2x^2y^2 - 22y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 4x - 19y$;
382) $u = -9xy^3 - 16x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 27y$;
383) $u = 7xy^3 - 4x^2y^2 - 3y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 5x - 2y$;
384) $u = -2xy^3 - 5x^2y^2 - 8y^4 - 21x^2 - 13y^2 + 15x - 33y$;
385) $u = -2xy^3 + 7x^2y^2 - 5y^4 + 23x^2 - 14y^2 + 51x - 29y$;
386) $u = 8xy^3 - 6x^2y^2 - 2y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 8x - 4y$;
387) $u = -9xy^3 - 7x^2y^2 + 5y^4 - 30x^2 - 17y^2 + 5x - 8y$;
388) $u = 5xy^3 - 10x^2y^2 - 3y^4 + 10x^2 - 10y^2 + 8x - 6y$;
389) $u = -3xy^3 - 6x^2y^2 - 12y^4 + 10x^2 - 20y^2 + 6x - 10y$;
390) $u = -2xy^3 - 9x^2y^2 - 32y^4 + 11x^2 - 20y^2 + 8x - 2y$.

Розв'язування типового варіанта

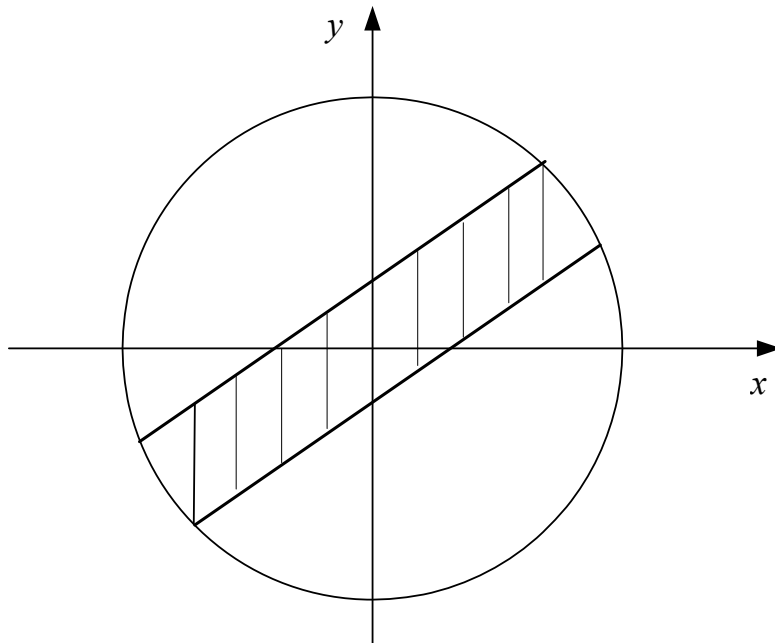
Завдання 1

Знайти області визначення функції $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \cdot \arccos(3x - 5y)$

• Функція $u = \sqrt{f(x, y)}$ визначена для тих значень x та y , для яких $f(x, y) \geq 0$, тобто $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Це круг з центром в початку координат і радіусом 2. Функція $u = \arcsin(2x - 3y)$ визначена для тих значень x та y , для яких $-1 \leq 3x - 5y \leq 1$, або $\begin{cases} 3x - 5y \leq 1; \\ 3x - 5y \geq -1. \end{cases}$ Цю систему нерівностей можна записати у вигляді $\begin{cases} 5y \geq 3x - 1; \\ 5y \leq 3x + 1. \end{cases}$ Ця система нерівностей описує множину точок площини, які лежать над прямою $5y = 3x - 1$ і під прямою $5y = 3x + 1$. Отже, областю визначення функції є ті значення x та y , які задовольняють систему

$$\begin{cases} 3x - 5y \leq 1; \\ 3x - 5y \geq -1; \\ x^2 + y^2 \leq 2. \end{cases}$$

Область визначення заданої функції зображена на рисунку.



Завдання 2

Задано функцію $u = e^{x/y^2}$. Перевірити рівність $u''_{xy} = u''_{yx}$. Перевірити, чи ця функція задовольняє рівняння $2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

- Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{x/y^2} \right)'_x = e^{x/y^2} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_x = e^{x/y^2} \cdot (xy^{-2})'_x = \frac{1}{y^2} e^{x/y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{x/y^2} \right)'_y = e^{x/y^2} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_y = e^{x/y^2} \cdot (xy^{-2})'_y = -2xy^{-3} e^{x/y^2} = -\frac{2x}{y^3} e^{x/y^2}.$$

Перевіримо, чи функція $u = e^{x/y^2}$ задовольняє рівняння $2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Підставимо $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ в рівняння, отримаємо

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y^2} e^{x/y^2} + y \cdot \left(-\frac{2x}{y^3} \right) e^{x/y^2} = \frac{2x}{y^2} e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^2} e^{x/y^2} = 0.$$

Отже, функція $u = e^{x/y^2}$ задовольняє рівняння $2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Обчислимо мішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \left(y^{-2} \cdot e^{x/y^2} \right)'_y = -2y^{-3} e^{x/y^2} + y^{-2} e^{x/y^2} \left(-\frac{2x}{y^3} \right) = -\frac{2}{y^3} e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^5} e^{x/y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{2x}{y^3} e^{x/y^2} \right)'_x = -\frac{2}{y^3} e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{1}{y^2} e^{x/y^2} = -\frac{2}{y^3} e^{x/y^2} - \frac{2x}{y^5} e^{x/y^2}.$$

Отже, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. ○

Завдання 3

Задано функцію $u = \ln(x + \ln y)$. Обчислити диференціали першого і другого порядку. Перевірити рівність $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

- Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\ln(x + \ln y))'_x = \frac{1}{x + \ln y} \cdot (x + \ln y)'_x = (x + \ln y)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\ln(x + \ln y))'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot (x + \ln y)'_y = y^{-1} \cdot (x + \ln y)^{-1}.$$

Тоді диференціал першого порядку

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (x + \ln y)^{-1} dx + y^{-1}(x + \ln y)^{-1} dy.$$

Обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ((x + \ln y)^{-1})'_x = -(x + \ln y)^{-2} \cdot (x + \ln y)'_x = -(x + \ln y)^{-2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (y^{-1} \cdot (x + \ln y)^{-1})'_y = -\frac{1}{y^2}(x + \ln y)^{-1} - \frac{1}{y^2}(x + \ln y)^{-2} = \\ &= -\frac{1}{y^2}(x + \ln y)^{-2} \cdot (1 + x + \ln y); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (y^{-1} \cdot (x + \ln y)^{-1})'_x = -\frac{1}{y}(x + \ln y)^{-2} \cdot (x + \ln y)'_x = -\frac{1}{y}(x + \ln y)^{-2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = ((x + \ln y)^{-1})'_y = -(x + \ln y)^{-2} \cdot (x + \ln y)'_y = -\frac{1}{y}(x + \ln y)^{-2}.$$

Запишемо диференціал другого порядку:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

Підставимо похідні другого порядку, отримаємо

$$d^2 u = -(x + \ln y)^{-2} dx^2 + 2 - \frac{1}{y}(x + \ln y)^{-2} dx dy - \frac{1}{y^2}(x + \ln y)^{-2} \cdot (1 + x + \ln y) dy^2.$$

З виразів мішаних похідних отримаємо $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. ○

Завдання 4

Обчислити наближене значення функції $(1,02)^{3,01}$.

• Розглянемо функцію $u = f(x, y) = x^y$. Оскільки функція диференційована, то $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df$. Обчислимо повний диференціал функції

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy.$$

Прийmemo $x_0 = 1, y_0 = 3, dx = 0,02, dy = 0,01$. Тоді $(1,02)^{3,01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 0,02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 = 1 + 0,06 = 1,06$. ○

Завдання 5

Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точці $M(1;3;4)$ у напрямі радіуса-вектора цієї точки. Знайти градієнт функції в цій точці:

• Визначимо координати одиничного вектора, який задає цей напрям. Радіус-вектор $\overline{OM} = (1;3;4)$ має довжину $|\overline{OM}| = \sqrt{26}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{26}}$. Обчислимо частинні похідні цієї функції: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z$. Тоді похідна функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в напрямі радіуса-вектора $\overline{OM} = (1;3;4)$ має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma = \frac{2x + 6y - 8z}{\sqrt{26}}.$$

Обчислимо похідну за заданим напрямом у точці $M(1;3;4)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{\sqrt{26}} = -\frac{12}{\sqrt{26}}.$$

Градієнт функції $\overrightarrow{\text{grad}} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$. У нашому випадку

$\overrightarrow{\text{grad}} u = \{2x, 2y, -2z\}$. Підставимо координати точки $M(1;3;4)$, отримаємо $\left. \overrightarrow{\text{grad}} u \right|_M = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 3, -2 \cdot 4\}$, $\left. \overrightarrow{\text{grad}} u \right|_M = \{2, 6, -8\}$. ○

Завдання 6

Знайти похідну складеної функції $u = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

• Похідну цієї складеної функції обчислюють за формулою

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_x = \frac{1}{\sin \frac{x}{\sqrt{y}}} \left(\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_x = \frac{1}{\sin \frac{x}{\sqrt{y}}} \cos \frac{x}{\sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \text{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \text{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \cdot \text{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2 + 1}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_y = \frac{1}{\sin \frac{x}{\sqrt{y}}} \left(\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_y = \frac{1}{\sin \frac{x}{\sqrt{y}}} \cos \frac{x}{\sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)'_y = \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \left(-\frac{x}{2y\sqrt{y}} \right) = -\frac{x}{2y^2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} = -\frac{3t^2}{2(t^2+1)} \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}; \\ \frac{dx}{dt} &= 6t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt[4]{t^2+1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}} 6t - \frac{3t^2}{2(t^2+1)} \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \\ &= \frac{3t(3t^2+4)}{2(t^2+1) \cdot \sqrt[4]{t^2+1}} \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}. \quad \circ \end{aligned}$$

Завдання 7

Дослідити на екстремум функції:

1) $u = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$; 2) $u = x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y + 5$.

- 1) Дослідимо на екстремум функцію $u = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 3y - 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 2y - 1$. З необхідної

умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0, \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ для

визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо

стаціонарну точку $M_0(-1;2)$. Обчислимо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3$. В стаціонарній точці $M_0(-1;2)$ отримаємо $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$,

$a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3$. Обчислимо $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 4 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0$.

Отже, функція $u = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$ не має екстремуму.

2) Дослідимо на екстремум функцію $u = x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y + 5$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y - 4$. З необхідної

умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ для

визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо стаціонарну точку $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Обчислимо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$. В стаціонарній точці $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ отримаємо $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$,

$a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$, $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$. Обчислимо $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$.

Оскільки $a_{11} = 2 > 0$, то стаціонарна точка $M_0\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ є точкою мінімуму.

Обчислимо $u_{\min.} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = -\frac{11}{3}$. \circ

Завдання 8

Дослідити на екстремум функцію $u = -\frac{1}{9}(3x + 5y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y$.

- Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(3x + 5y)^2 + 3x + 5y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + 5y + 5x - 2.$$

З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -(3x + 5y)^2 + 3x + 5y = 0, & (3x + 5y)(3x + 5y - 1) = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + 5y + 5x - 2 = 0, & -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо сукупність систем:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

З першої системи $\begin{cases} 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} 3x + 5y = 0, \\ 2x - 2 = 0. \end{cases}$

Тоді $x = 1, y = -\frac{3}{5}$. Маємо стаціонарну точку $M_1\left(1; -\frac{3}{5}\right)$.

З другої системи $\begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x + 5y)^2 + (3x + 5y) + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 2x = \frac{8}{3}. \end{cases}$

Звідси $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{3}{5}$. Маємо стаціонарну точку $M_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{3}{5}\right)$.

Обчислимо похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6(3x + 5y) + 3x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{50}{3}(3x + 5y) + 5; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -10(3x + 5y) + 5y.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1\left(1; -\frac{3}{5}\right)$. Обчислимо

$$a_{11} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 3; \quad a_{22} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 5; \quad a_{12} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 5;$$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 3 \cdot 5 - 5^2 = -10 < 0.$$

Оскільки в точці $M_1\left(1; -\frac{3}{5}\right)$ виконується $\Delta < 0$, то ця точка не є точкою екстремуму.

Дослідимо на екстремум точку $M_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{3}{5}\right)$. Обчислимо

$$a_{11} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_2} = -3; \quad a_{22} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_2} = -\frac{35}{3}; \quad a_{12} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_2} = -5;$$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -3 \cdot \left(-\frac{35}{3}\right) - (-5)^2 = 10 > 0.$$

Оскільки в точці $M_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{3}{5}\right)$ виконується $\Delta > 0$ і $a_{11} = -3 < 0$, то ця точка є

точкою максимуму. Обчислимо $u_{\max.} = u\left(\frac{4}{3}; -\frac{3}{5}\right) = \frac{59}{60}$. \bigcirc

Завдання 9

Знайти екстремум функції $u = 2x + 3y$ за умови $x^2 + y^2 = 13$.

- Складемо функцію Лагранжа $L(x, y) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 13)$. Обчислимо

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L'_x = 2 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = L'_y = 3 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L'_\lambda = x^2 + y^2 - 13.$$

Критичні точки знайдемо з системи рівнянь $\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 13 = 0. \end{cases}$

З перших двох рівнянь визначимо $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{3}{2\lambda}$ і підставимо в третє.

Отримаємо $\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 13$, $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Звідси $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$;

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, $y_2 = -3$. Отже, маємо дві стаціонарні точки: $M_1(2;3)$ при

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, і $M_2(-2;-3)$ при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Обчислимо диференціал другого порядку

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то $d^2 L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$

Якщо $\lambda = -\frac{1}{2}$, то $d^2 L = -(dx^2 + dy^2) < 0$. Тому функція $u = 2x + 3y$ має умовний максимум в точці $M_1(2;3)$. Обчислимо $u_{\max.} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$.

Якщо $\lambda = \frac{1}{2}$, то $d^2 L = (dx^2 + dy^2) > 0$. Тому функція $u = 2x + 3y$ має умовний мінімум в точці $M_2(-2;-3)$. Обчислимо $u_{\min.} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -13$. ○

Завдання 10

Досліджували прибуток y (тис. грн), залежно від витрат на рекламу x (тис. грн). Припускаючи, що між x та y існує лінійна залежність $y = ax + b$, методом найменших квадратів визначити параметри a та b . Визначити сподіваний прибуток, якщо на рекламу витратили 10 000 грн.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	37,58	39,81	42,18	44,58	46,73	49,31	51,48	53,79	56,73

• Припустимо, що між x та y є лінійна залежність $y = ax + b$. Оскільки точки $M_i(x_i; y_i)$ лежать не точно на прямій, а лише біля неї, то формула $y = ax + b$ є наближеною. Підставивши значення координат точок у вираз $ax + b - y$, отримаємо $ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1$, $ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2$, ..., $ax_n + b - y_n = \varepsilon_n$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – похибки, які задають відхилення відповідної точки від прямої. Підберемо коефіцієнти прямої a та b так, щоб сума квадратів похибок

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \text{ була найменшою.}$$

Дослідимо функцію $S = S(a, b)$ на екстремум. Обчислимо

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i).$$

Прирівняємо ці частинні похідні до нуля, отримаємо систему двох лінійних рівнянь для визначення двох невідомих a та b :

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b = B_1; \\ A_{21}a + A_{22}b = B_2, \end{cases}$$

де $A_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^n x_i$, $A_{22} = n$, $B_1 = \sum_{i=1}^n y_i x_i$, $B_2 = \sum_{i=1}^n y_i$.

Обчислимо

$$A_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 285,$$

$$A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^n x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, \quad A_{22} = n = 9,$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n y_i x_i = 1 \cdot 37,58 + 2 \cdot 39,81 + 3 \cdot 42,18 + 4 \cdot 44,58 + 5 \cdot 46,73 + 6 \cdot 49,31 + \\ = 7 \cdot 51,48 + 8 \cdot 53,79 + 9 \cdot 56,73 = 2252,82,$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^n y_i = 37,58 + 39,81 + 42,18 + 44,58 + 46,73 + 49,31 + 51,48 + 53,79 + 56,73 = 422,19.$$

Підставимо знайдені числа в систему рівнянь, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів a і b :

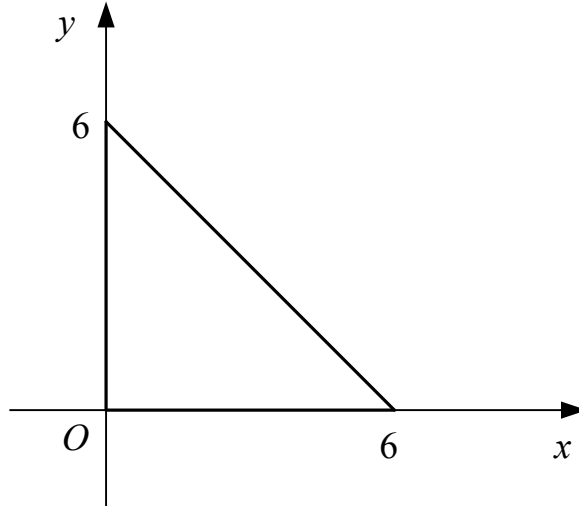
$$\begin{cases} 285a + 45b = 2252,82; \\ 45a + 9b = 422,19. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь, отримаємо $a = 2,36$ і $b = 35,11$. Отже, між x та y є лінійна залежність $y = 2,36x + 35,11$. Якщо на рекламу витратять 10 тисяч гривень, то отримають $y = 2,36 \cdot 10 + 35,11 = 58,71$ тисяч гривень прибутку. ○

Завдання 11

Знайти найбільше та найменше значення функції $u = x^2 y(4 - x - y)$ в заданій замкненій області $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$.

- Область D – трикутник, зображений на рисунку.



Обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8xy - 3yx^2 - 2xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2yx^2.$$

З необхідної умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь для

визначення координат стаціонарних точок:

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Звідси $x = 0, y = 0$, або $\begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0. \end{cases}$ Звідси $x = 2, y = 1$. Маємо дві стаціонарні точки $O(0;0)$, $M(2;1)$. Обчислимо $u(0;0) = 0$, $u(2;1) = 4$.

Дослідимо функцію на границях області. Розглянемо $x = 0, 0 \leq y \leq 6$. Тоді $u(0;y) = 0$. Нехай $y = 0, 0 \leq x \leq 6$. Тоді $u(x;0) = 0$. З рівняння $x + y = 6$ $0 \leq x \leq 6$, визначимо $y = 6 - x$, підставимо в $u(x;y)$, отримаємо $\tilde{u}(x) = -2x^2(6 - x)$. Спростимо $\tilde{u}(x)$, і дослідимо на екстремум функцію $\tilde{u}(x) = 2x^3 - 12x^2, 0 \leq x \leq 6$. Обчислимо $\tilde{u}'(x) = 6x^2 - 24x$. З умови $\tilde{u}'(x) = 0$ отримаємо $6x^2 - 24x = 0$, звідки маємо стаціонарні точки $x = 0, x = 4$, які задовольняють умову $0 \leq x \leq 6$. Обчислимо $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{u}(4) = -64$. Обчислимо значення функції на кінцях відрізка: $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{u}(6) = 0$. З чисел $u(0;0) = 0$, $u(2;1) = 4$, $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{u}(4) = -64$, $\tilde{u}(6) = 0$ виберемо найбільше і найменше. Отже, $u_{\text{найб.}} = u(2,1) = 4$, $u_{\text{найм.}} = u(4,2) = -64$. \bigcirc

Завдання 12

Мале підприємство виробляє товари A та B . Щоденні витрати на виробництво x штук товару A та y штук товару B описує функція $C = 1530 - 20x - 21y + 0,2x^2 + 0,7y^2$. Визначити кількість штук товарів A і B , яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати були мінімальними.

- Дослідимо на екстремум функцію $C = 1530 - 20x - 21y + 0,2x^2 + 0,7y^2$.

Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial C}{\partial x} = -20 + 0,4x$; $\frac{\partial C}{\partial y} = -21 + 0,14y$. З необхідної

умови екстремуму $\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \end{cases}$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} -20 + 0,4x = 0, \\ -21 + 0,14y = 0 \end{cases}$ для

визначення стаціонарної точки. Розв'яжемо цю систему, отримаємо $x = 5$, $y = 150$. Отже, маємо стаціонарну точку $M_0(5;150)$. Обчислимо похідні другого

порядку $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0,4$, $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0,14$, $\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 0$. В стаціонарній точці $M_0(5;150)$

отримаємо $a_{11} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0,4$, $a_{22} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0,14$, $a_{12} = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 0$. Обчислимо

$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0,4 \cdot 0,14 - 0^2 = 0,056 > 0$. Оскільки $a_{11} = 0,4 > 0$, то стаціонарна точка $M_0(5;150)$ є точкою мінімуму. Обчислимо

$$C_{\min.} = 1530 - 20 \cdot 5 - 21 \cdot 150 + 0,2 \cdot 5^2 + 0,7 \cdot 150^2 = 14035. \quad \circ$$

Завдання 13

Кількість виробленої продукції залежно від чинників x та y виробництва описує виробнича функція $u = 4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y$. Знайти: а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників; б) еластичність функції за кожним із чинників; в) коефіцієнти еластичності за чинниками для $x = 1$, $y = 1$. Зробити висновки.

- Щоб визначити закон зміни виробничої функції за чинниками x та y обчислимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 16xy^2 + 40x + 15, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12xy^2 - 16x^2y + 40y^3 - 20y - 35.$$

Обчислимо еластичність функції за кожним з чинників:

$$E_x(u) = \frac{x}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4xy^3 - 16x^2y^2 + 40x^2 + 15x}{4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y},$$

$$E_y(u) = \frac{y}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{12xy^3 - 16x^2y^2 + 40y^4 - 20y^2 - 35y}{4xy^3 - 8x^2y^2 + 10y^4 + 20x^2 - 10y^2 + 15x - 35y}$$

Обчислимо коефіцієнти еластичності для $x=1$, $y=1$.

$$E_x(u) = \frac{4 - 16 + 40 + 15}{4 - 8 + 10 + 20 - 10 + 15 - 35} = \frac{43}{-4} \approx -10,75,$$

$$E_y(u) = \frac{12 - 16 + 40 - 20 - 35}{4 - 8 + 10 + 20 - 10 + 15 - 35} = \frac{-19}{-4} \approx 4,75.$$

Отже, із зростанням чинника x на 1% і незмінності чинника y , відбудеться відносне спадання заданої виробничої функції на 10,75%. Із зростанням чинника y на 1% і незмінності чинника x , відбудеться відносне спадання заданої виробничої функції на 4,75%. ○

Список літератури

1. Барковський В.В, Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. К., 1997.
2. Домбровський І.В., Крижанівський І.М., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М., Цебрій О.Р., Шинкарик М.І. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики. Навчальний посібник. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2004.
3. Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О. та ін. Збірник задач з вищої математики. К., 1967.
4. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. Минск, 1991.
5. Тевяшов А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс. Збірник задач і вправ. Х.: Рубікон, 1999.
6. Тріщ Б. М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі: Навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008.
7. Тріщ Б. М. Вища математика для економістів: Підручник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2011.
8. Тріщ Б.М. Практикум з вищої математики. Модуль 6. Функції багатьох змінних. Навчальний посібник. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012. 109 с.