УДК 517.51(076.5)

Укладачі:

Є. П. Кришко, Є. А. Макаренков,
Н. Г. Наріус, Г. А. Папанов, В. І. Самарський

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. *А. В. Сясєв (ДНУ)*
канд. фіз.-мат. наук, доц. *З. М. Гасаноа (ДІІТ)*

Функції багатьох змінних [Текст]: методичні вказівки і варіанти до виконання модульної роботи / уклад.: Є. П. Кришко, Є. А. Макаренков, Н. Г. Наріус, Г. А. Папанов, В. І. Самарський; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010. - 39 с.

Містять основний теоретичний матеріал із розділу вищої математики «Функції багатьох змінних», велику кількість розв'язаних прикладів, 30 варіантів індивідуальних завдань.

Призначені для студентів І-го та ІІ-го курсів денної форми навчання усіх спеціальностей.

Іл. 3.

ВСТУП

При застосуванні модульної системи навчання запропоновані методичні рекомендації є модулем, який входить до системи модулів, в яких закладені основні розділи з дисципліни «Вища математика». Ці розділи (модулі) об'єднані за змістом із урахуванням відведених кредитів на вивчення усього курсу з вищої математики.

З метою контролю вивчення та опанування основ вищої математики кожен модуль є заліковим з обов'язковим оцінюванням якості засвоєння матеріалу студентами згідно прийнятої в університеті бальної системи.

Засобами діагностики успішності навчання є комплекти індивідуальних тестових завдань для складання контрольних заходів (залік, модульний контроль, екзамен).

І. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x,y). Якщо кожній парі чисел $(x,y)\in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y, і записують її $z=f(x,y)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y - незалежними змінними (аргументами).

Наведемо такі приклади:

а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S=ab$. Кожній парі значень a і b відповідає єдине значення площі, тобто S - функція двох змінних: $S=f(a,b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E, сила струму I та опір R замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E=IR$. Тут E є функцією змінних I та R: $E=f(I,R)$.

Змінна величина u називається функцією n незалежних змінних x_1, x_2, …, x_n, якщо кожній сукупності значень (x_1, x_2, …, x_n) цих змінних з даної області їх зміни відповідає єдине значення величини u – $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

ІІ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ

Множину пар (x,y) значень x та y, для яких функція $z=f(x,y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Областю визначення функції $z=f(x,y)$ є деяка множина точок (x,y) площини OXY. Графіком функції двох змінних є поверхня.

Лінію, що обмежує область D, називають **межею області визначення**.

Точки області, які не лежать на її межі, називаються **внутрішніми**.

Область, яка містить тільки внутрішні точки, називають **відкритою**.

Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається **замкненою**.

Для функцій трьох змінних $u = F(x, y, z)$ область визначення належить тривимірному простору і геометрично є деякою сукупністю точок простору.

Ми розглянули поняття області визначення функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок більшої кількості незалежних змінних.

Нехай задано множину $D \in R_n$, де R_n – n-вимірний простір. Якщо кожній точці $x \in D$ за певним законом відповідає одне і тільки одне дійсне число y, то кажуть, що на множині D визначено функцію від n змінних і записують

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ або } y = f(x), \text{ де } x \in R_n.$$

Множину D при цьому називають областю визначення або областю існування функції.

Приклад 1. Знайти область визначення та побудувати її, якщо

$$z = \sqrt{y^2 - 4x}.$$

Рис. 1

Розв'язання. Областю визначення є сукупність точок (x, y) площини OXY (рис. 1), включаючи і точки самої кривої:

Приклад 2. Знайти область визначення функції та побудувати її, якщо $z = \arcsin(x + y)$.

Розв'язання. Область визначення є сукупність точок $(x, y) \in R_2$, що задовольняють нерівностям $-1 \le x + y \le 1$. На площині XOY ця область пре

дставляє смугу, яка обмежена паралельними прямими $x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ (рис. 2), включаючи точки самих прямих.

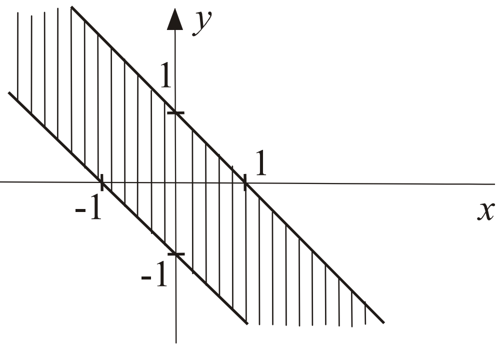

Рис. 2

Приклад 3. Знайти область визначення функції $u(x, y, z)$ та побудувати її, якщо $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$.

Розв'язання. Заданий аналітичний вираз існує в усіх точках $(x, y, z) \in R_3$, в яких $-x^2 - y^2 + 2z > 0$, або $x^2 + y^2 < 2z$. Цю нерівність задовольняють точки (x, y, z), що містяться в середині параболоїда обертання $x^2 + y^2 = 2z$ (рис. 3), не включаючи його поверхню.

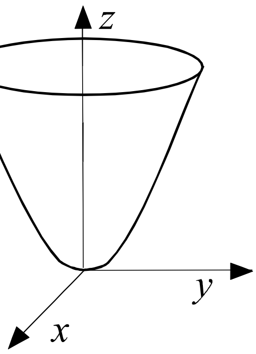

Рис. 3

Питання на самоперевірку

1. Дати означення функції двох змінних.
2. Дати означення області визначення функції двох змінних.
3. Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$?
4. Дати означення межі області визначення.
5. Дати означення функції n змінних.

III. ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Означення. Число A називається **границею** функції двох змінних $z=f(x,y)$ при прямуванні точки $M(x,y)$ до точки $M_0(x_0,y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа ε_0 знайдеться такий δ-окіл точки M_0, що для будь-якої точки $M(x,y)$ із цього околу (за винятком, можливо, самої точки M_0) виконується нерівність $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Границю функції $z=f(x,y)$ записують у вигляді

$$A=\lim_{M\to M_0} f(M) \quad \text{або} \quad A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Якщо границя функції існує, то вона не залежить від способу прямування $M\to M_0$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Розв'язання. Функція має невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ при $x\to 0$, $y\to 5$, тому використовуємо першу чудову границю $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin(a)}{a}=1$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} y\frac{\sin(xy)}{xy}=5\cdot 1=5.$$

Означення. Нехай точка M_0 та деякий її окіл належать області визначення функції $f(M)$. Тоді функція $f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо має місце рівність $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$, при цьому точка $\boldsymbol{M}$ наближається до точки M_0 довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Означення. Функція $f(M)$, неперервна в кожній точці деякої області, називається неперервною в цій області.

IV. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x,y)$, визначену в деякому околі точки (x,y). Зафіксуємо змінну y. Дістанемо функцію $z=f(x,y)$ однієї змінної x. Якщо ця функція має похідну (по змінній x), то останню називають частинною похідною функції $f(x,y)$ по змінній x і позначають $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ або $f'_x(x,y)$.

Таким чином, якщо скористатися означенням похідної однієї змінної, то дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Величину $\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ називають **частинним приро-**

стом функції $f(x,y)$ по змінній x в точці (x,y).

Аналогічно вводять поняття частинної похідної по змінній y в точці (x,y), яку позначають $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ або $f'_y(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (2)$$

Величину $\Delta_y f(x,y) = f(x,y+\Delta y) - f(x,y)$ називають **частинним приростом** функції $f(x,y)$ по змінній y в точці (x,y).

Для довільної точки (x,y) частинні похідні позначатимемо $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, або z'_x, z'_y. Необхідно мати на увазі, що $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ та $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$ визначають величину швидкості, з якою відбувається зміна функції $z = f(x,y)$ при зміні тільки x або y, а знак z'_x та z'_y вказує на характер цієї зміни (зростання чи спадання).

Частинні похідні обчислюються за відомими правилами диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 4. Знайти частинні похідні:

а) $z = x^4 + 2xy - y^3 + 5$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки однієї змінної x ($y = \text{const}$) знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y$. Аналогічно вважаючи z функцією тільки однієї змінної y ($x = \text{const}$), знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2$.

б) $z = 2x^3y^2 + 2x$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки однієї змінної x ($y = \text{const}$) отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 + 2$. Аналогічно вважаючи z функцією тільки однієї змінної y ($x = \text{const}$) знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y$.

в) $z = 5^{\sqrt{x} - 2y}$.

Розв'язання. Застосуємо табличну похідну від показникової функції і вважаючи z функцією тільки змінної x ($y = \text{const}$), потім тільки однієї змінної y ($x = \text{const}$), отримаємо. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5^{\sqrt{x}-2y} \cdot \ln 5 \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5^{\sqrt{x}-2y} \cdot \ln 5 \cdot (-2)$.

г) $u = x^2 z + \operatorname{arctg} xy$.

Розв'язання. В даному випадку маємо функцію трьох змінних $u = f(x,y,z)$. Вважаючи u спочатку функцією тільки змінної x ($y,z = \text{const}$), потім функцією тільки змінної y ($x,z = \text{const}$), і наприкінці тільки z ($x,y = \text{const}$), отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + \frac{1}{1+(xy)^2}y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2.$$

д) $z=\sin 2y+\sqrt{y}\cdot e^{x}$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної x ($y=\text{const}$), потім тільки однієї змінної y ($x=\text{const}$), отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}\cdot e^{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2\cos 2y\frac{e^{x}}{2\sqrt{y}}$.

е) $z=\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи правило диференціювання добутку функцій однієї змінної і вважаючи z функцією тільки змінної x ($y=\text{const}$), знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^{2}}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$. Потім, вважаючи z функцією тільки однієї змінної y ($x=\text{const}$), отримаємо $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^{2}}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

Приклад 5. Знайти вказану частинну похідну від функції $z=f(x,y)$ в точці $M_{0}(x_{0},y_{0})$

а) $z=2x^{4}y^{3}-\frac{y}{2}$. Знайти $\frac{\partial z(M)}{\partial y}$, $M(1;1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки однієї змінної y ($x=\text{const}$) знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y}=6x^{4}y^{2}-\frac{1}{2}$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial y}=\left(6x^{4}y^{2}-\frac{1}{2}\right)_{M}=5{,}5.$$

б) $z=\ln(x+2y^{2})$. Знайти $\frac{\partial z(M)}{\partial x}$, $M(0;1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної x ($y=\text{const}$), знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+2y^{2}}$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial x}=\left(\frac{1}{x+2y^{2}}\right)_{M}=\frac{1}{2}.$$

в) $z=2xy^{5}+x^{2}-y$. Знайти $\frac{\partial z(M)}{\partial y}$, $M(0;1)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної y ($x=\text{const}$), знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y}=10xy^{4}-1$. Підставляємо в знайдену похідну координати точки M:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial y}=(10xy^{4}-1)_{M}=-1.$$

г) $z=e^{2x}\cdot\sin 3y$. Знайти $\frac{\partial z(M)}{\partial x}$, $M\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Вважаючи z функцією тільки змінної x ($y=\text{const}$), знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}\cdot\sin 3y$ Підставляємо в знайдену похідну координати точки M.

$$\frac{\partial z(M)}{\partial y}=(2e^{2x}\cdot\sin 3y)_{M}=2.$$

Питання на самоперевірку

1. Чому дорівнює частинний приріст функції $z=f(x,y)$ за змінною x?

2. Чому дорівнює частинний приріст функції $z=f(x,y)$ за змінною y?

3. Дати означення частинної похідної першого порядку функції $z=f(x,y)$ по змінній x.

4. 3. Дати означення частинної похідної першого порядку функції $z=f(x,y)$ по змінній y.

5. Як обчислюють частинні похідні функції $z=f(x,y)$?

V. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Повним приростом функції $z=f(x,y)$, диференційованої в точці (x,y), будемо називати різницю

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Повним диференціалом функції $z=f(x,y)$ називається частина повного приросту Δz, лінійна відносно приростів аргументів Δx, Δy, що обчислюється у вигляді $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Диференціали незалежних змінних $\Delta x, \Delta y$ співпадають з їх приростом, тобто

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y,$$

тому

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Аналогічно обчислюється диференціал для функції трьох змінних $u = u(x,y,z)$. Отже, $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$.

Повний диференціал застосовують у наближених обчисленнях у вигляді $\Delta z \approx dz$ або $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$.

Рівність буде тим точніша ,чим менше будуть $|\Delta x|, |\Delta y|$.

Приклад 6. Знайти повні диференціали функцій:

а) $z = x^3 y^2$.

Розв'язання. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$ підставляємо до формули повного диференціалу функції двох змінних

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy.$$

б) $z = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Аналогічно прикладу а).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 \cos \frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}};$$

$$dz = \frac{-y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}} dx + \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}} dy.$$

в) $z = yx^y$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = yx^y \ln x$; $dz = y^2 x^{y-1} dx + yx^y \ln x dy$.

Питання на самоперевірку

1. Що називають повним приростом функції $z = f(x, y)$?

2. Дати означення повного диференціалу функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.

3. За допомогою якої формули обчислюється наближене значення функції?

VI. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ

1. Нехай функція $z = f(x, y)$ – диференційована функція аргументів x та y, які у свою чергу є диференційованими функціями незалежної змінної t. Тоді складена функція $z = f\left[x(t), y(t)\right]$ також диференційована і визначається за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

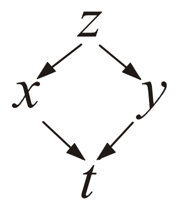

Схема до розв'язання

Приклад 7. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \cos^2 x - \sin y,\ \ x = t^2 + t - 1,\ \ y = t^3 - 2t$.

Розв'язання. Оскільки проміжні змінні x і y є диференційованими функціями аргументу t, то функція z фактично є функцією однієї змінної $z = f\left[x(t), y(t)\right]$. Тоді знайдемо частинні похідні по проміжним змінним:

$$\frac{dz}{dx} = -2\cos x \sin x = -\sin 2x, \quad \frac{dz}{dy} = -\cos y,$$

а також звичайні похідні від проміжних змінних по аргументу t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2.$$

Тоді $\frac{dz}{dt} = -(2t+1)\sin 2x - (3t^2 - 2)\cos y = -(2t+1)\sin 2(t^2 + t - 1) - (3t^2 - 2)\cos(t^3 - 2t).$

2. Розглянемо складніший випадок. Нехай $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$. Тоді $z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,\ z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$.

Ці формули неважко узагальнити для функції більшої кількості змінних.

Приклад 8. $z = u^2 v + uv^2$, $u = x\cos y$, $v = y \sin x$.

Розв'язання.

$$z'_u = 2uv + v^2 = 2(x\cos y)\cdot(y\sin x) + y^2\sin^2 x = (2x\cos y + y\sin x)y\sin x;$$

$$z'_v = u^2 + 2uv = (x\cos y)^2 + x\cos y\cdot y\sin x = x\cos y(x\cos y + 2y\sin x);$$

$$u'_x = \cos y; \quad u'_y = -x\sin y;$$

$$v'_x = y\cos x; \quad v'_y = \sin x;$$

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = (2x\cos y + y\sin x)y\sin x\cos y + x\cos y(x\cos y + 2y\sin x)y\cos x;$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -(2x\cos y + y\sin x)y\sin x\cdot x\sin y + x\cos y(x\cos y + 2y\sin x)\sin x.$$

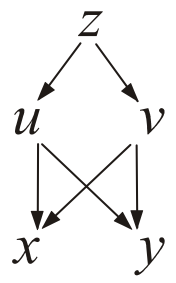

Схема до розв'язання

Питання на самоперевірку

1. За якою формулою обчислюється $\dfrac{dz}{dt}$?

2. Написати формулу знаходження похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u,v)$, $u = (x,y)$, $v = v(x,y)$.

VII. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ

Похідна неявної функції, заданої рівнянням $F(x,y) = 0$, де $F(x,y)$ - диференційована функція змінних x і y й $F'_y(x,y) \neq 0$ дорівнює

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_z(x,y)}. \tag{3}$$

Частинні похідні неявної функції двох змінних $z = f(x,y)$, заданої рівнянням $F(x,y,z) = 0$, де $F(x,y,z)$ – диференційована функція змінних x, y і z й $F'_z(x,y) \neq 0$, обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_z(x,y)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_z(x,y)}. \tag{4}$$

Приклад 9. Задана функція $y^2 - 2xy = 3$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $y^2 - 2xy - 3 = 0$ і скористаємося формулою (3):

$$F'_x = -2y, \quad F'_y = 2y - 2x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2y}{2y - 2x} = \frac{y}{y - x}.$$

Приклад 10. Задана функція $x^3y^2 + xy^5 + 15xy + y = 0$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x,y)$ і скористаємося формулою (3):

$$F'_x = 3x^2y^2 + y^5 + 15y, \quad F'_y = 2x^3y + 5xy^4 + 15y + 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{3x^2y^2+y^5+15y}{2x^3y+5xy^4+15x+1}.$$

Приклад 11. Задана функція $4\sin(x-y-z^4)+y+\ln z-x=0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x,y,z)$ і скористаємося формулою (4):

$$f_x'=4\cos(x-y-z^4)-1, \quad f_y'=-4\cos(x-y-z^4)+1,$$

$$f_z'=-16z^3\cos\left(x-y-z^4\right)+\frac{1}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4\cos(x-y-z^4)-1}{\frac{1}{z}-16z^3\cos(x-y-z^4)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4\cos(x-y-z^4)}{\frac{1}{z}-16z^3\cos(x-y-z^4)}.$$

Питання на самоперевірку

1. За якою формулою можна знайти похідну функції однієї змінної, заданої в неявному виді (тобто у виді $F(x,y)=0$)?

2. Якщо функція двох змінних задана в неявному виді, тобто $F(x,y,z)=0$, то за якою формулою знаходять частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$?

VIII. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція декількох змінних $u=f(x,y,...,t)$ має частинні похідні. В загальному випадку вони є знову функціями декількох змінних. Тому від них можна знову знайти частинні похідні.

Частинними похідними другого порядку від функції $z=f(x,y)$ називають частинні похідні від її похідних першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Для функції двох змінних частинних похідних буде чотири. Вони позначаються таким чином:

– $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)-$ функція послідовно диференціюється двічі по *x*;

– $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)-$ функція спочатку диференціюється по *x*, а потім по *y*;

– $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)-$ функція диференціюється спочатку по *y*, а потім по *x*;

– $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)-$ функція диференціюється послідовно двічі по *y*.

Похідні другого порядку можна знову диференціювати.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, що вирізняються послідовністю диференціювання називаються мішаними. Мішані похідні, якщо вони неперервні, рівні між собою: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Аналогічно визначаються частинні похідні вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial^3 x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

При цьому результат багаторазового диференціювання функції по різним змінним не залежить від послідовності диференціювання за цими змінними. Істотним є лише те, щоб обчислювані частинні похідні були неперервними.

Приклад 12. Знайти похідні другого порядку від функцій:

а) $z = x^3 - x^2 y + y^2$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial x^2} = 6x - 2y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-x^2 + 2y)'_x = -2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 2xy)'_y = -2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x.$$

б) $z = e^{2xy^2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2xy^2} \cdot 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial x^2} = e^{2xy^2} \cdot 4y^4$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2xy^2} \cdot 4xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2xy^2} \cdot 16x^2 y^2 + e^{2xy^2} \cdot 4x = e^{2xy^2} \cdot (4xy^2 + 1) \cdot 4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(e^{2xy^2} \cdot 4xy\right)'_x = e^{2xy^2} \cdot 8xy^3 + e^{2xy^2} \cdot 4y = e^{2xy^2} \cdot 4y(2xy^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^{2xy^2} \cdot 2xy^3\right)'_y = e^{2xy^2} \cdot 8xy^3 + e^{2xy^2} \cdot 4y = e^{2xy^2} \cdot 4y(2xy^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

в) $z = \cos(xy)$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin(xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos(xy) - \sin(xy).$$

Приклад 13. Обчислити частинну похідну $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ від функції $z = 5x^4 y^3 + 6e^{-3x} \cdot y + \sin 2x$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=20x^3y^3-18e^{-3x}\cdot y+2\cos 2x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=60x^3y^2-18e^{-3x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=120x^3y.$$

Приклад 14. Перевірити, чи виконується рівність $z''_{xy}=z''_{yx}$ для функції $z=\ln(4x+e^{-y})$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку $z'_x=\dfrac{4}{4x+e^{-y}}$, потім знайдемо $z''_{xy}=\dfrac{4e^{-y}}{(4x+e^{-y})^2}$.

Диференціюємо в іншому порядку:

$$z'_y=\frac{-e^{-y}}{x+e^{-y}},\quad z''_{yx}=\frac{4e^{-y}}{(x+e^{-y})^2}.$$

Отже $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Приклад 15. Перевірити, чи задовольняє функція $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$ диференціальному рівнянню: $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0.$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні, які містяться в рівнянні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{3x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Підставляючи їх у рівняння здобудемо тотожність:

$$x^2\cdot\left(-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)-xy\left(\frac{2y}{3x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)+y^2=0.$$

Питання на самоперевірку

1. Що називається частинними похідними другого порядку від функції $z=f(x,y)$?
2. Як знаходити частинні похідні вищих порядків?
3. Скільки буде частинних похідних другого порядку від функції двох змінних?
4. Сформулювати правило для мішаних похідних від функції $z=f(x,y)$.

IX. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ
ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають **стаціонарним**, а скалярне поле, яке змінюється з часом – **нестаціонарним**.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, то відпові-