1.8. Геометричні застосування подвійного інтеграла

I. Обчислення об’ємів тіл

Нехай задано тіло, яке обмежене замкненою обмеженою областю D площини Oxy, поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$ в області D, та циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області D, а твірні паралельні осі Oz (рис. 24).

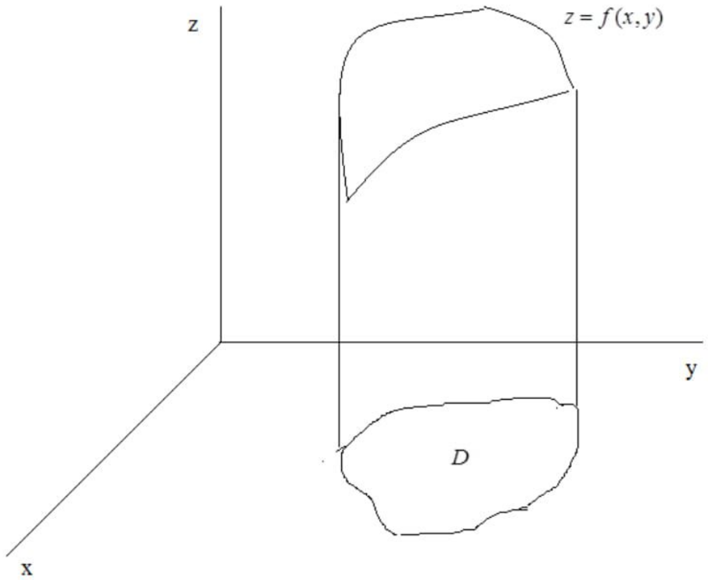


Рис. 24

Згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла об’єм цього тіла обчислюється за формулою:

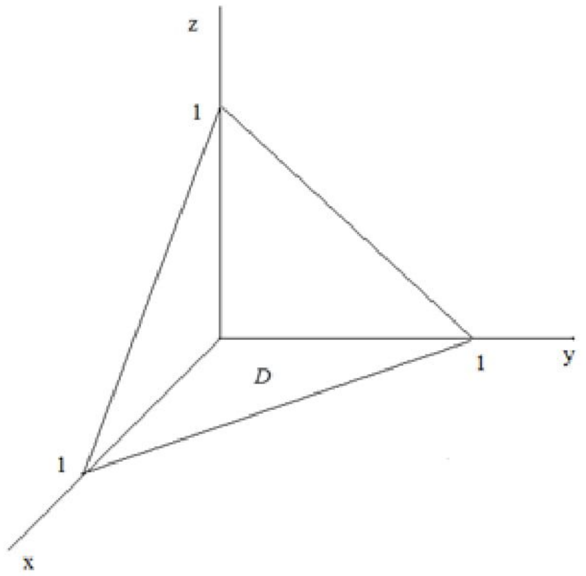
$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy\,. \qquad (1.8.1)$$

Приклад 1. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Дане тіло є трикутною пірамідою (рис. 25 а). Областю D є прямокутний трикутник на площині Oxy (рис. 25 б). Тому

$$V = \iint_D (1 - x - y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)y\Big|_0^{1-x} - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$



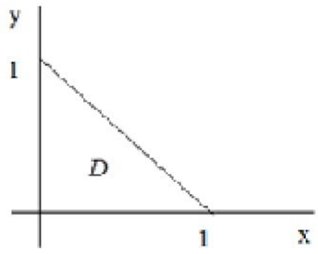


Рис. 25 а **Рис. 25 б**

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=Rx$, $z=0$.

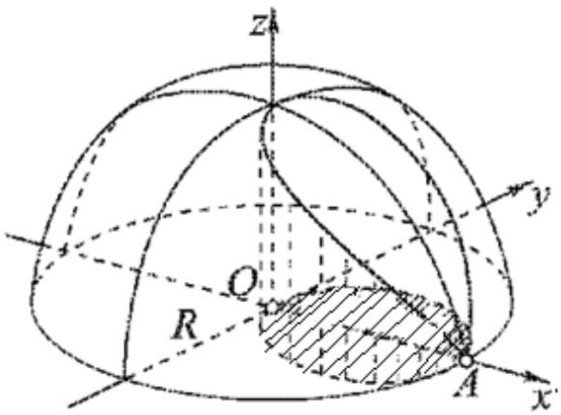
Дане тіло є частиною півкулі радіуса R, що знаходиться всередині кругового циліндра з радіусом основи $R/2$, причому твірна циліндра проходить через центр півкулі (рис. 26 а). Крива, яку вирізає циліндр на кулі, називається *кривою Вівіані*. Очевидно, що дане тіло обмежено знизу областю D площини Oxy, яка є кругом радіуса $R/2$ з центром у точці $(R/2, 0)$ (рис. 26 б), а зверху – півсферою $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тому:

$$V=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Цей інтеграл обчислимо, переходячи до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le R\cos\varphi$$

(тут враховано, що рівняння кола $x^2+y^2=Rx$ у полярних координатах має вигляд $\rho=R\cos\varphi$). Отже:



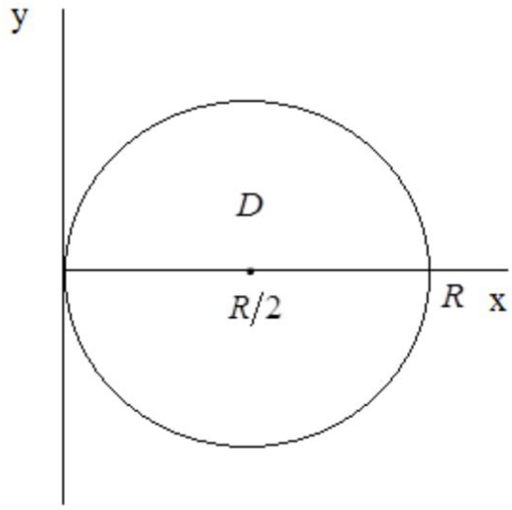


Рис. 26 а **Рис. 26 б**

$$V=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2)=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left.\frac{2(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{R\cos\varphi}\right]d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(R^2-R^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-R^3\right]d\varphi=-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^3\sin^3\varphi-R^3\right)d\varphi=\frac{2R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{2R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{4R^3}{9}.$$

II. Обчислення площ областей

Складемо інтегральну суму для функції $f(x,y)\equiv 1$ по області D:

$$\sum_{j=1}^{n}1\cdot\Delta S_j\,.$$

Очевидно, що ця сума дорівнюватиме площі області D при будь-якому способі розбиття. Тоді, переходячи до границь, при рангу розбиття, прямуючому до нуля, також отримаємо площу області D:

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy\,. \qquad (1.8.2)$$

Приклад. Знайти площу фігури, яку обмежено лініями $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$.

Знайдемо точки перетину вказаних ліній, для чого розв'яжемо рівняння:

$$10x+25=-6x+9,$$

звідки $x=-1$, тоді $y^2=15$, і $y=\pm\sqrt{15}$. Область D зображено на рис. 27.

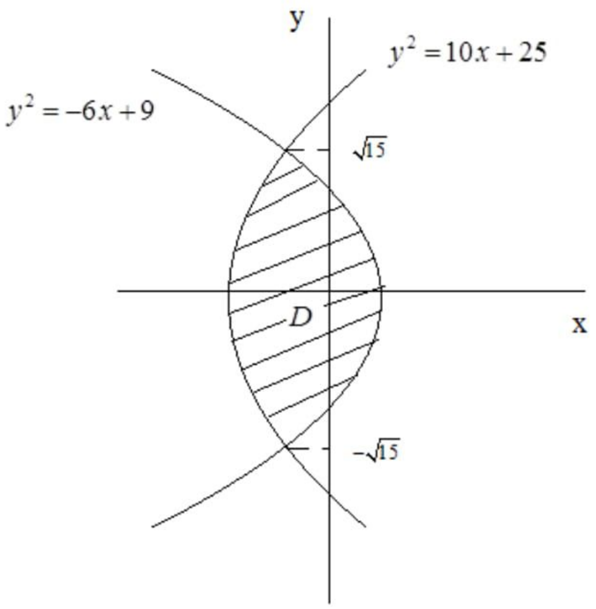


Рис. 27

Ця область симетрична відносно осі Ox. Тому:

$$S=\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}dy\int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}}dx=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}\left(\frac{9-y^2}{6}-\frac{y^2-25}{10}\right)dy=\frac{16\sqrt{15}}{3}$$

(обчислення інтеграла перевірте самостійно).

1.9. Механічні застосування подвійного інтеграла

Нехай є матеріальна пластина, яка займає область D площини Oxy і має змінну поверхневу густину $\gamma(x,y)$. Тоді маса пластини обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.1)$$

Статичні моменти M_x, M_y пластини відносно осей Ox і Oy визначаються формулами:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.2)$$

Координати x_C, y_C знаходять за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}. \qquad (1.9.3)$$

Моменти інерції I_x, I_y, I_O пластини відносно осей Ox, Oy і початку координат визначаються формулами:

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \; I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_O = I_x + I_y = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.4)$$

Приклад. Знайти масу квадратної пластини із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в вершинах квадрату дорівнює 1.

Розташуємо квадрат так, щоб його сторони були паралельні осям координат, а центр перетину діагоналей знаходився у початку координат (рис. 28).

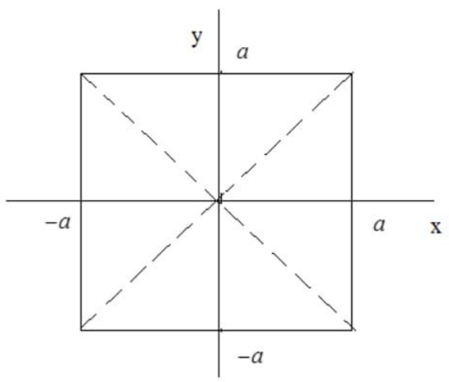


Рис. 28

Тоді, за умовою задачі, густина $\gamma(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Визначимо його за умови, що у вершинах квадрата густина дорівнює одиниці. Тоді $\gamma(a,a)=k\left(a^2+a^2\right)=1$, звідки $k=1/2a^2$, і таким чином:

$$\gamma(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2a^2}\ .$$

Масу квадрата тепер знайдемо за формулою (1.9.1):

$$m=\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{2a^2}dxdy=\frac{4}{2a^2}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{4a^2}{3}.$$

За формулами (1.9.2) знайдемо статичні моменти:

$$M_x=\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_D y\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{-a}^a\left(yx^2+y^3\right)dy=0,$$

$$M_y=\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_D x\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{-a}^a\left(x^3+xy^2\right)dy=0$$

(обчислення інтегралів перевірте самостійно). Звідси за формулами (1.9.3) отримуємо: $x_C=y_C=0$.

Моменти інерції відносно осей координат і початку координат знайдемо за формулами (1.9.4):

$$I_x=\iint\limits_D y^2\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_D y^2\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{-a}^a\left(x^2y^2+y^4\right)dy=\frac{28a^4}{45},$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_D x^2\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{-a}^a\left(x^4+x^2y^2\right)dy=\frac{28a^4}{45},$$

$$I_O=\frac{56a^4}{45}.$$