ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $V \subset R^3$. Розіб'ємо область V сіткою поверхонь на n частин V_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині V_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ і утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i ,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ за областю V. Нехай $\lambda = \max d(V_i)$ $1 \le i \le n$ – найбільший із діаметрів областей V_i.

Якщо інтегральна сума σ при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області V на частини V_i, ні від вибору в них точок P_i, то ця границя називається потрійним інтегралом і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dV \qquad \text{або} \qquad \iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz .$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sigma ,$$

де $f(x, y, z)$ – функція, інтегрована в області V; V – область інтегрування; *x, y* і *z* – змінні інтегрування.

Якщо по тілу V розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x, y, z) \in V$, то масу m цього тіла знаходимо за формулою

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz .$$

Цю формулу можна розглядати як механічний зміст потрійного інтеграла, коли підінтегральна функція невід'ємна в області V. Якщо всюди в області покласти $f(x,y,z)\equiv 1$, то одержуємо формулу для обчислення об'єму тіла V:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz\ .$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Теорема (**достатня умова інтегрованості функції**). Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V, то вона в цій області інтегрована.

Властивості потрійних інтегралів

1. Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_V Cf(x,y,z)dxdydz=C\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\ .$$

2. Потрійний інтеграл від суми кількох інтегрованих функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z)\pm\varphi(x,y,z)]dV=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\pm\iiint\varphi(x,y,z)dV\ .$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x,y,z)\geq 0$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\geq 0\ .$$

4. Якщо функції $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ визначені в одній і тій самій області V і $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\geq\iiint\limits_V g(x,y,z)dV\ .$$

5. (Адитивність потрійного інтеграла). Якщо область інтегрування V функції $f(x,y,z)$ розбити на частини V_1 і V_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dV \,.$$

6. (Оцінка потрійного інтеграла). Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V, яка має об'єм V, то

$$mV \le \iiint_V f(x,y,z)dV \le MV \,,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області V.

7. (Середнє значення функції). Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0; z_0)$, що

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = f(x_0, y_0, z_0)V \,.$$

Величина

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V}\iiint_V f(x,y,z)dV$$

називається середнім значенням функції $f(x,y,z)$ в області V.

Обчислення потрійного інтеграла

Обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування за кожною змінною окремо.

Нехай область V обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Позначимо проекцію області V на площину Oxy через D (рис. 1) і вважатимемо, що функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ неперервні в D.

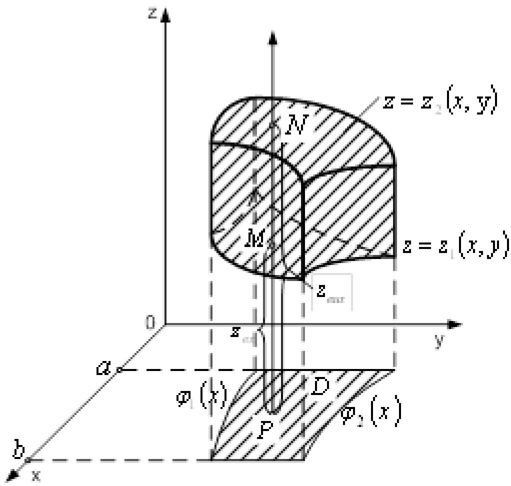

Рисунок 1

Припустимо, що кожна пряма, що проходить через кожну внутрішню точку $(x; y; 0) \in D$ паралельно осі Oz, перетинає межу області G у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область G, а точку N – точкою виходу з області G, а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{вх}$ і $z_{вих}$. Тоді $z_{вх} = z_1(x, y)$, $z_{вих} = z_2(x, y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ застосовна формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

Зміст цієї формули такий. Щоб обчислити потрійний інтеграл, потрібно спочатку обчислити інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = I(x, y)$ за змінною z, вважаючи x та y сталими. Нижньою межею цього інтеграла є апліката точки

M входу $z_{вх} = z_1(x, y)$, а верхньою – апліката $z_{вих} = z_2(x, y)$ точки виходу N. Внаслідок інтегрування отримаємо функцію $I(x, y)$ від змінних x та y.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(a \le b)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні функції, тобто

$$V = \{z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\},$$

то, переходячи від подвійного інтеграла $\iint\limits_D I(x, y)dxdy$ до повторного, отримаємо формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто змінні x, y і z у правій частині цієї формули за певних умов можна міняти місцями.

Якщо, наприклад, область V задано

$$V = \{x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z), \varphi_1 \le z \le \varphi_2(y), c \le y \le d\},$$

де $x_1(y, z), x_2(y, z), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – неперервні функції, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int\limits_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} f(x, y, z)dx.$$

Зокрема, якщо областю інтегрування є паралелепіпед

$$V = \{a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l\},$$

то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)dz.$$

У цьому разі інтегрування виконується в будь-якому порядку.

Приклад 1. Обчисліть $\iiint\limits_V xdxdydz$, якщо область V обмежена площинами $x = 0, y = 0, z = 0, y = 3, x + y = 2$.

Розв'язання

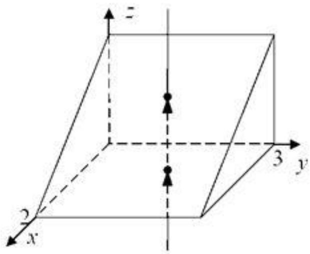

Рисунок 2

Область V проектується на площину Oxy у прямокутник $D = \{0 \le x \le 2; 0 \le y \le 3\}$. Оскільки $z_1 = 0$ (вхід), $z_2 = 2 - x$ (вихід), то маємо

$$\iiint\limits_V xdxdydz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{2-x} xdz = \int_0^2 xdx \int_0^3 \left(z\Big|_0^{2-x} \right) dy = \int_0^2 xdx \int_0^3 (2-x)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(x \cdot (2-x) \cdot y\Big|_0^3 \right) dx = 3\int_0^2 \left(2 \cdot x - x^2 \right) dx = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = 3 \cdot \left(4 - \frac{8}{3} \right) = 4.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V (x + y - z)dxdydz$ де V – паралелепіпед, обмежений площинами $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$ (рис. 3).

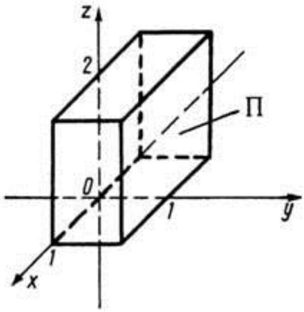

Рисунок 3

Розв'язання

$$\iiint\limits_V x+y-z)dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{2}(x+y-z)dz=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}(xz+yz-\frac{z^2}{2})\Big|_0^2 dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}(2x+2y-2)dy=$$

$$\int_{-1}^{1}(2xy+y^2-2y)\Big|_0^1 dx=\int_{-1}^{1}(2x-1)dx=-2.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Заміну змінної в потрійному інтегралі виконують за таким правилом: якщо обмежена замкнена область V взаємно однозначно відображується на область V_1 за допомогою неперервно диференційовних функцій $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, якобіан J в області V_1 не дорівнює нулю:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix} \neq 0$$

і $f(x, y, z)$ – неперервна в V , то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J|\,dudvdw.$$

На практиці найуживанішими є циліндричні та сферичні координати. При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндричних ρ, φ, z (рис. 4 а), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \qquad\qquad 0 \le \rho \le +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \vdots -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

якобіан перетворення має вигляд

$$J=\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho\,.$$

Отримуємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz\,.$$

Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = const$ є циліндром, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz.

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (рис. 4 б), які пов'язані з x, y, z формулами

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta, \qquad 0 \le \rho \le +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi \end{cases};$$

якобіан перетворення має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta .$$

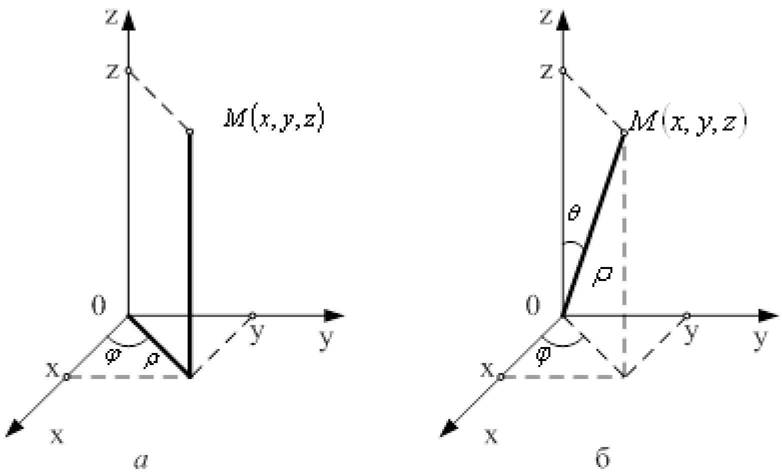

Рисунок 4 –
Координати: а) циліндричні; б) сферичні

Знаходимо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta .$$

Назва «сферичні координати» пов’язана з тим, що координатна поверхня $\rho = const$ є сферою. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область V_1, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю V, користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x,y)$ та $z_2(x,y)$, які обмежують область V, записують у нових координатах.

Зокрема, якщо область V обмежена циліндричною поверхнею $x^2+y^2=R^2$ та площинами z=a, z=b, a<b, то всі межі інтегрування в циліндричній системі координат сталі:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$$

і не змінюються при зміні порядку інтегрування. Те саме буде у сферичних координатах у випадку, коли V – куля $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ або кульове кільце.

Наприклад, якщо V – кульове кільце з внутрішньою сферою $x^2+y^2+z^2=r^2$, то рівняння цієї сфери у сферичних координатах має вигляд

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(\rho\cos\theta)^2=r^2$$

або

$$(\rho\sin\theta)^2\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+(\rho\cos\theta)^2=r^2,$$

звідки $\rho=r$. Аналогічно $\rho=R$ – рівняння зовнішньої сфери, тому

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_r^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho \cdot$$

У випадку, коли V – куля $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, у цій формулі потрібно покласти $r = 0$. Інших будь-яких загальних рекомендацій, коли необхідно переходити до тієї чи іншої системи координат, дати неможливо. Це залежить і від області інтегрування, і від підінтегральної функції. Іноді потрібно написати інтеграл у різних системах координат і лише після цього вирішити, в якій з них обчислення буде найпростішим.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\iiint_V ((x+y)^2-z)dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями z=0 і $(z-1)^2=x^2+y^2$.

Розв'язання

Область V є конусом (рис. 5).

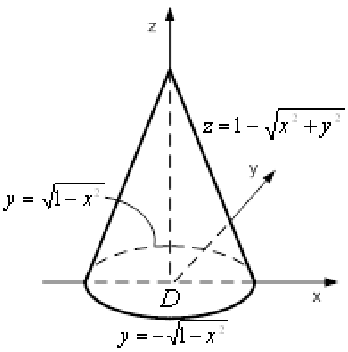

Рисунок 5

Рівняння конічної поверхні, що обмежує область V, можна записати у вигляді $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, а саму область V подати таким чином:

$$V = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\},$$

де D – круг радіуса 1 із центром *O(0,0)*. Тому цей потрійний інтеграл можна звести до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів у прямокутних координатах:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)dz.$$

Проте зручніше перейти до циліндричних координат $(\rho, \varphi, z) : x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$. Тоді прообразом круга D є прямокутник $\{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, прообразом конічної поверхні – плоска поверхня $z = 1 - \rho$, а прообразом області V – область V_1. Якобіан переходу до циліндричних координат дорівнює ρ, підінтегральна функція в циліндричних координатах дорівнює $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z$. Зводячи потрійний інтеграл за областю V_1 до послідовного обчислення трьох визначних інтегралів, отримаємо

$$I=\iiint\limits_V(\rho^2(1+\sin 2\varphi)-z)\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{1-\rho}(\rho^2(1+\sin 2\varphi)-z)\rho dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho^3(1-\rho)(1+\sin 2\varphi)-\frac{1}{2}\rho(1-\rho)^2)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi)-\frac{1}{24})d\varphi=\frac{\pi}{60}.$$

Зазначимо, що розставлення меж інтегрування в циліндричних координатах, як правило, виконують, розглядаючи не область V_1, а зміну циліндричних координат в області V. Наочно бачимо, що в області D змінна φ змінюється від 0 до 2π, при кожному значенні φ змінна ρ змінюється від 0 до 1, а для кожної точки (ρ,φ) області D змінна z змінюється в області V від 0 (значення z в області D) до $1-\sqrt{x^2+y^2}=1-\rho$ (значення z на конічній поверхні).

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G(x^2+y^2+z^2)dxdydz$,

де V – куля $x^2+y^2+z^2\le R^2$ (рис. 6).

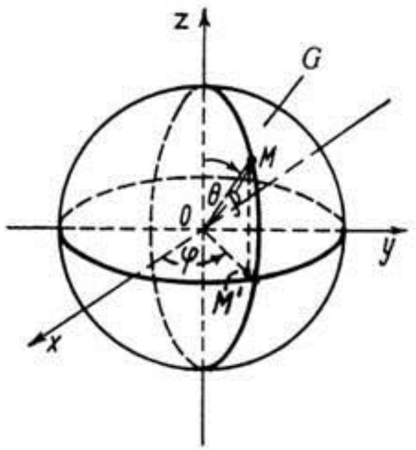

Рисунок 6

Розв'язання

У даному випадку зручніше перейти до сферичних координат:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ \ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ \ z = \rho \cos\theta.$$

Із рис. 6 випливає, що координати ρ, θ, φ змінюються в таких межах: ρ від 0 до R, θ від 0 до π, φ від 0 до 2π. Оскільки підінтегральна функція $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, то маємо

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \cdot p^2 \sin\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^\rho \sin\theta d\theta =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

Деякі застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'ємів

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю V, його об'єм обчислюємо за формулою

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\ .$$

Доведення цієї формули випливає з означення потрійного інтеграла.

Обчислення маси тіла

Нехай V – обмежена замкнена область простору R^3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в області V, тоді масу цього тіла обчислюємо за формулою

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz\ .$$

Приклад 5. Обчислити масу тіла m, обмежену координатними площинами і площинами $x + y + z = 2, x = 1, y = 1,$ якщо його густина $\gamma(x, y, z) = x + 2z$ (рис. 7).

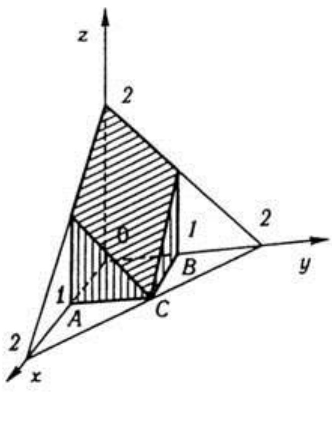

Рисунок 7

Розв'язання

Застосовуючи формулу для обчислення маси, отримаємо

$$m = \iiint\limits_{V} (x + 2z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} (x + 2z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (xz + z^2)\Big|_0^{2-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (y^2 + xy - 4y - 2x + 4)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{7}{3}\right)dx = \frac{19}{12}.$$

Приклади для самостійної роботи

1. Розставити межі інтегрування, якщо інтегрувати в послідовності:

а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y.

1.1. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де область V обмежена площинами $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\; x=0, y=0, z=0 (a>0, b>0, c>0)$.

1.2. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де область V обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1.3. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де область V обмежена поверхнями $x^2+y^2=1, z=0, z=1 (x\ge 0, y\ge 0)$.

1.4. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де область V обмежена поверхнями $z=x^2+y^2, z=1, x=0, y=0, z=0$.

2. Обчислити повторні інтеграли:

2.1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+y+z)dz.$

2.2. $\int\limits_0^q dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz.$

2.3. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+Y^2}} zdz.$

2.4. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho\int\limits_0^a zdz.$

2.5. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \rho^3 d\rho.$

3. Обчислити потрійні інтеграли:

3.1. $\iiint\limits_V f(x+y+z)dxdydz$, V – область, обмежена площинами $x+y+z=a, x=0, y=0, z=0.$

3.2. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $y=x^2, x=y^2, z=xy, z=0.$

3.3. $\iiint\limits_V xdxdydz$, V – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=0, z=3.$

3.4. $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz,$ V - прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 2.$

3.5. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x=0, \ y=0, \ z=0, \ x^2+y^2+z^2=1.$

3.6. $\iiint\limits_V f(x+y+1)dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x=0, \ y=0, \ z=1, \ z=x^2+y^2.$

3.7. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz,$ V – область, обмежена поверхнями $z=xy, \ y=x, \ x=1, \ z=0.$

3.8. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$ V – область, обмежена площинами $x+y+z=1, \ x=0, \ y=0, \ z=0.$

3.9. $\iiint\limits_V xdxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $z=1, \ z=x^2+y^2.$

3.10. $\iiint\limits_V f(2x+3y-z)dxdydz$, V – область, обмежена площинами $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0, x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

4. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат:

4.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

4.2. $\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_0^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz.$

4.3. $\iiint\limits_V dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$, що містить точку (0;0;R).

4.4. $\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz$, V – область обмежена параболоїдом $2y=x^2+z^2$ і площиною z = 1.

4.5. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^{3/2}dxdydz$, V - область обмежена параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площиною z = 1.

5. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

5.1. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz.$

5.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz.$

5.3. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, V - область, визначена нерівностями $r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$.

5.4. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}, V - для\ x^2+y^2+z^2 \le 1.$

5.5. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, V$ – область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z.$

6. Обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями:

6.1. $z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2,\ y=x,\ y=2x,\ x=1.$

6.2. $z=xy,\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

6.3. $y=x^2+z^2,\ y=1.$

6.4. $y^2+z^2=2ax,\ y^2+z^2=2az,\ x=0\ (a>0).$

6.5. $z=4-y^2,\ z=y^2+2,\ x=-1,\ x=2.$

6.6. $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ y=x^2,\ y=x.$

6.7. $z=(x-1)^2+y^2,\ 2x+z=2.$

6.8. $z=x^2+y^2,\ z=x+y.$

6.9. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2=y^2).$

6.10. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4.$