1.3. Означення подвійного інтеграла Умови його існування та властивості

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Розіб'ємо область D довільним чином на частинні області D_i ($i = 1,2,...,n$), які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо як ΔS_i площу частинної області D_i. В кожній області D_i довільним чином оберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \; . \tag{1.3.1}$$

Сума (1.3.1) називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x,y)$ по області D, яка відповідає даному розбиттю області D на частинні області D_i ($i = 1,2,...,n$). Позначимо $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ і назвемо число λ *рангом розбиття*.

Означення. Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ суми (1.3.1), яка не залежить ані від способу розбиття області D на частинні області $D_1,...,D_n$, ані від вибору внутрішніх точок $P_1,...,P_n$, то ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x,y)$ по області D і позначається як

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy .$$

Таким чином, за означенням:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i . \tag{1.3.2}$$

Повертаючись до розглянутих в п. 1.2 задач, можна тепер сказати, що об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy , \tag{1.3.3}$$

а маса пластини:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy . \tag{1.3.4}$$

Рівності (1.3.3) та (1.3.4) визначають відповідно геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла у випадку, коли $f(x,y) \ge 0$ в області D.

Означення. Функція $z = f(x,y)$ називається *інтегровною* в області D, якщо існує $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Наведемо без доведення достатню умову інтегровності функції.

Теорема (достатня умова інтегровності). *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *неперервна в області* D*, то вона інтегровна в цій області*.

Властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла Рімана від функції однієї змінної.

1. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D kf(x, y)dxdy = k\iint_D f(x, y)dxdy.$$

2. Подвійний інтеграл від суми (різниці) двох інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy.$$

3. Якщо в області D виконується нерівність $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровні в області D, і в цій області виконано $f(x, y) \geq g(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

5. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, причому $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

6. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, площа якої дорівнює S, то

$$mS \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq MS,$$

де $m = \min\limits_D f(x, y)$, $M = \max\limits_D f(x, y)$, та існує точка $(x_0, y_0) \in D$ така, що

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(x_0, y_0)S.$$

1.4. Обчислення подвійного інтеграла

Нехай маємо деяке об'ємне тіло T. Припустимо, що відомо площу перерізу цього тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, причому $x \in [a, b]$ (рис. 4).

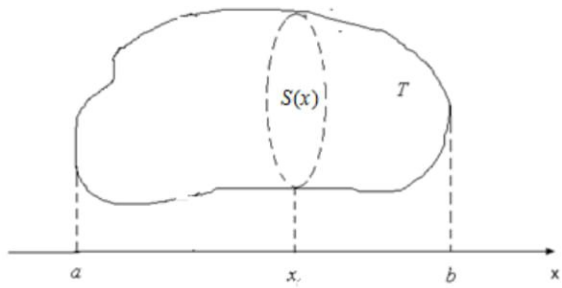


Рис. 4

Ця площа, очевидно, буде функцією змінної $x \in [a,b]$: $S = S(x)$. Припустимо, що функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді відомо (див. «Інтегральне числення функцій однієї змінної»), що об’єм тіла T дорівнює:

$$V_T = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{1.4.1}$$

Розглянемо тепер

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy, \tag{1.4.2}$$

де D – замкнена обмежена область на площині Oxy. Для спрощення вважатимемо, що $f(x,y) \geq 0$ в D. Тоді інтеграл (1.4.2) виражає об’єм циліндричного бруса, який обмежено зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а знизу – областю D.

Припустимо, що область D обмежена графіками функцій $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ при $a \leq x \leq b$. Назвемо таку область *областю 1-го типу* (рис. 5).

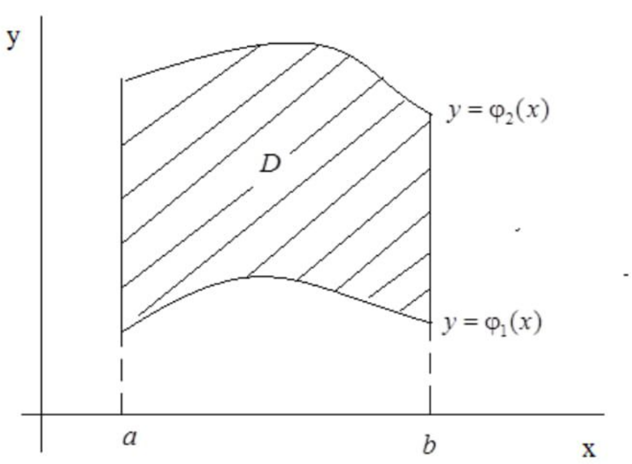


Рис. 5

Розглянемо тепер циліндричний брус, об'єм якого дорівнює подвійному інтегралу (1.4.2). Проведемо переріз цього бруса вертикальною площиною $x = \text{const}$ ($a < x < b$) (рис. 6).

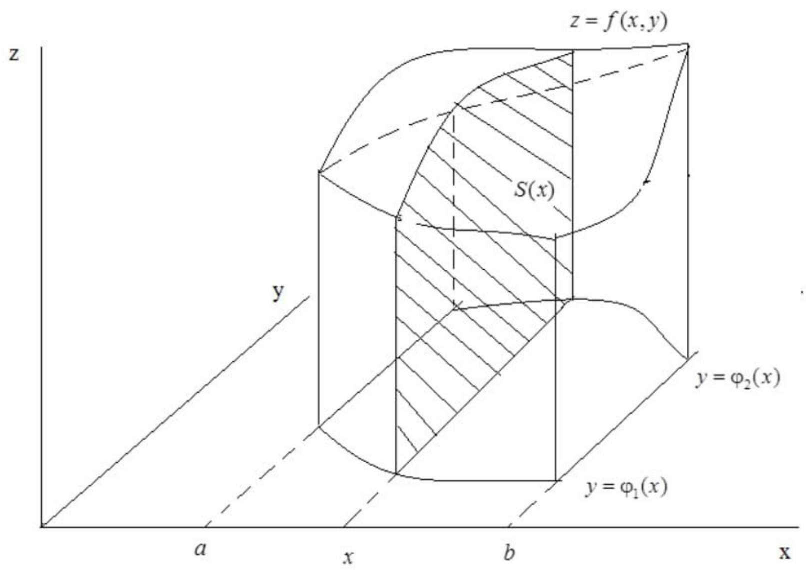


Рис. 6

Нехай $S(x)$ – площа отриманого перерізу. Тоді:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{1.4.3}$$

Обчислимо площу $S(x)$. Це площа криволінійної трапеції, яку обмежено зверху графіком функції $z = f(x,y)$, а знизу – відрізком $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ осі Oy. Змінна x розглядається як стала. Тому

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,.$$

І з урахуванням (1.4.3) остаточно маємо:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx\,. \tag{1.4.4}$$

Тобто подвійний інтеграл по області 1-го типу обчислюється через повторний. Можна довести, що формула (1.4.4) справедлива не тільки для випадку $f(x,y) \geq 0$, а й у загальному випадку також.

Якщо область D обмежено зліва і справа графіками функцій $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, а зверху і знизу прямими $y = c$, $y = d$, то таку область назвемо областю 2-го типу (рис. 7).

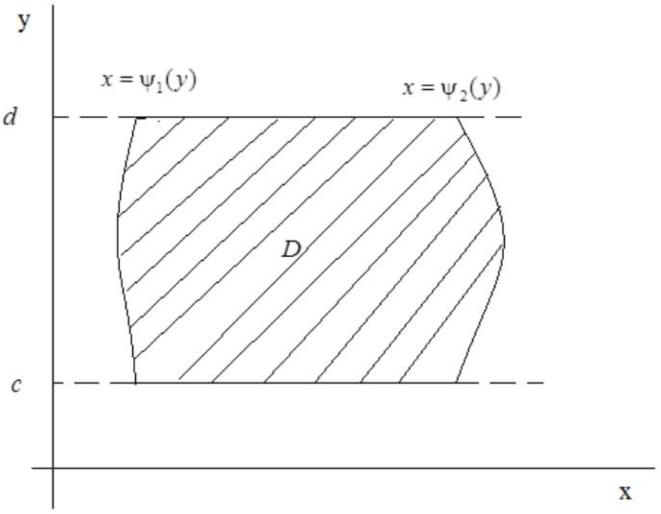


Рис. 7

Для такої області аналогічно отримуємо формулу:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1.4.5)$$

Зауваження 1. Якщо область D є водночас і областю 1-го типу, і областю 2-го типу, то інтеграл можна обчислювати як за формулою (1.4.4), так і за формулою (1.4.5). Результати співпадатимуть. Зокрема, це стосується випадку, коли область D – прямокутник $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ (рис. 8).

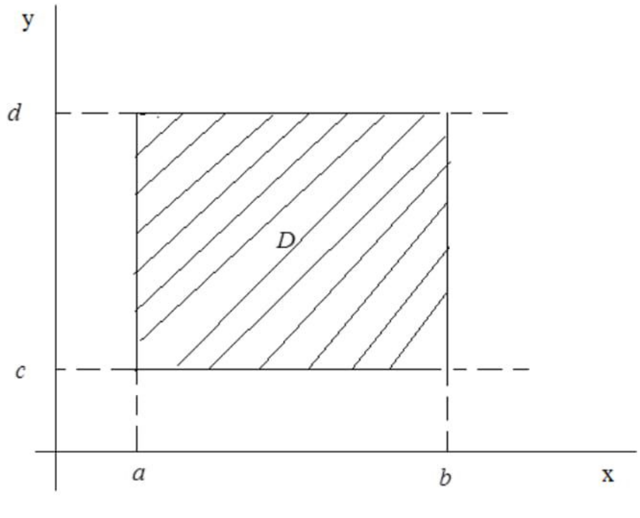


Рис. 8

Тоді маємо:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (1.4.6)$$

Зауваження 2. Якщо область D не є ані областю 1-го, ані областю 2-го типу, то її намагаються розбити на частини, кожна з яких відноситься до одного з цих двох типів.

Приклади.

1. Обчислити

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$$

де D – область, обмежена прямими $y=0$, $y=2x$, $x=1$.

Область D має вигляд:

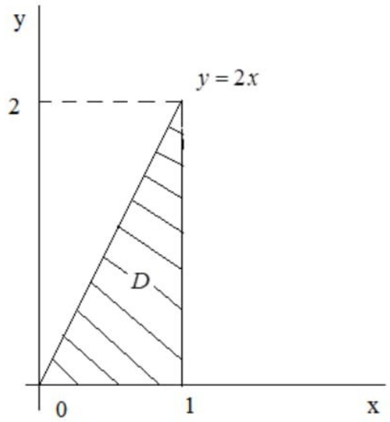


Рис. 9

Розглянемо цю область як область 1-го типу. Зліва і справа вона обмежена прямими $x=0$ та $x=1$, а зверху і знизу – лініями $y=0$ та $y=2x$. Тому:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x}(x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 \left(x^2y\Big|_0^{2x} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{2x} \right) = \int\limits_0^1 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{14}{3}\int\limits_0^1 x^3dx = \frac{14}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

А тепер розглянемо цю ж область як область 2-го типу. Знизу і зверху вона обмежена прямими $y=0$ та $y=2$, а зліва і справа – лініями $x=y/2$ (рівняння лінії $y=2x$ тут треба переписати у вигляді залежності x від y) та $x=1$. Тому:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{1}(x^2+y^2)dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{y/2}^{1} + y^2x\Big|_{y/2}^{1} \right) dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^3}{24} + y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}y\Big|_0^2 - \frac{y^4}{96}\Big|_0^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 - \frac{y^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{6}.$$

Як бачимо, результати співпадають.

Іноді простіше розглядати область, по якій береться інтеграл, як область 1-го типу, а іноді – як область 2-го типу. Тому виникає задача так званої зміни порядку інтегрування: від повторного інтеграла, що виражає даний подвійний інтеграл, якщо область розглядається як область 1-го типу, перейти до повторного інтегралу, що виражає той самий подвійний інтеграл, якщо та ж сама область розглядається як область 2-го типу, і навпаки.

Для того, щоб правильно розставити межі інтегрування у повторному інтегралі, можна користуватися таким правилом. Припустимо, ми розглядаємо дану область як область 1-го типу. Тоді проектуємо цю область на вісь Ox. Отримаємо деякий відрізок $[a,b]$. Числа a і b будуть відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною x). Потім треба у думках провести вертикальні прямі лінії знизу вверх через дану область і подивитись, через яку лінію вони входять в область, і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності y від x ($y = \varphi_1(x)$) буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною y), а рівняння лінії виходу ($y = \varphi_2(x)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 10).

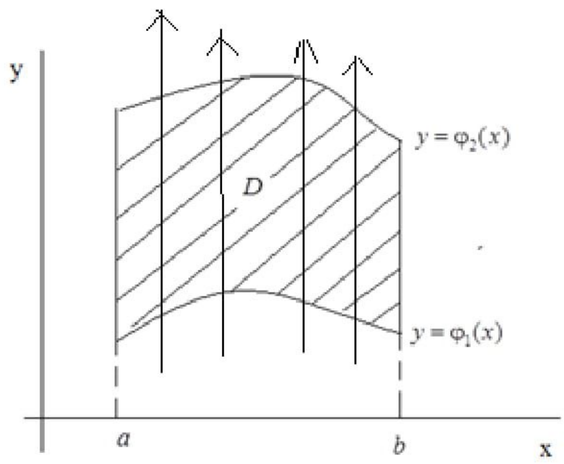


Рис. 10

Аналогічно розставляються межі у випадку області 2-го типу. Тепер треба область проектувати на вісь Oy, отримуємо відрізок $[c,d]$. Числа c і d є відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною y). Потім проводимо горизонтальні прямі лінії зліва направо через область. І знову дивимось, через яку лінію вони входять в область, і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності x від y ($x = \psi_1(y)$) буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною x), а рівняння лінії виходу ($x=\psi_2(y)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 11).

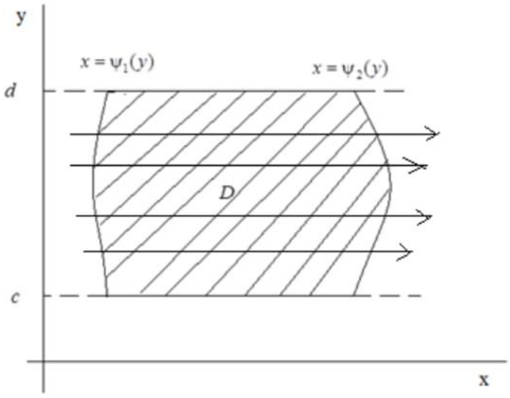


Рис. 11

2. Обчислити

$$\iint_D y\cos^2 x\,dxdy,$$

де $D=\{0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le a\}$.

Оскільки область D є прямокутником, то за формулою (1.4.6) маємо:

$$\iint_D y\cos^2 x\,dxdy=\int_0^{2\pi}dx\int_0^a y\cos^2 x\,dy=\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx\int_0^a ydy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 xdx\cdot\int_0^a ydy=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

У даному випадку повторний інтеграл є добутком двох незалежних один від одного інтегралів. Взагалі, якщо $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, і область D – прямокутник $a\le x\le b$, $c\le y\le d$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)f_2(y)dy=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy=\int_a^b f_1(x)dx\cdot\int_c^d f_2(y)dy,$$

оскільки внутрішній інтеграл $\int_c^d f_2(y)dy$ є сталою величиною, отже, її можна винести за знак зовнішнього інтеграла.

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_0^1 dx\int_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)\,dy.$$

Уявимо собі область D, по якій береться подвійний інтеграл, якому відповідає даний повторний. Проекцією цієї області на вісь Ox є відрізок $[0,1]$. Знизу ця область обмежена параболою $y = x^2 + 2$, а зверху – прямою лінією $y = 4 - x$. Таким чином, область має вигляд, який зображено на рис. 12.

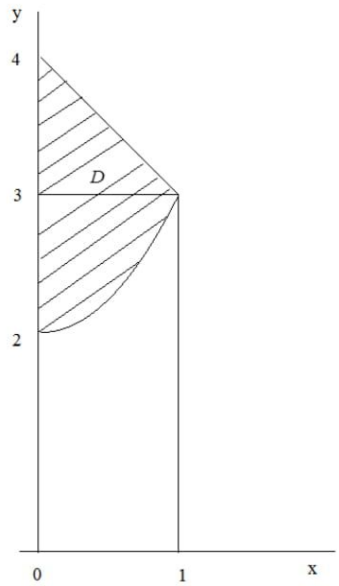


Рис. 12

Область D є стандартною 1-го типу. Подивимось на неї як на стандартну 2-го типу. Проекцією цієї області на вісь Oy є відрізок $[2,4]$. Зліва область обмежена віссю Oy, тобто прямою $x = 0$, а справа – суцільною лінією, яка на різних ділянках відрізку $[2,4]$ задається різними рівняннями. На відрізку $[2,3]$ осі Oy область обмежена параболою, рівняння якої, якщо його записати у вигляді залежності x від y, має вигляд: $x = \sqrt{y-2}$. А на відрізку $[3,4]$ осі Oy область справа обмежена прямою $x = 4 - y$ (знову рівняння пишемо у вигляді залежності x від y). Отже ми повинні повторний інтеграл розбити на суму двох інтегралів:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^3 dy \int_0^{\sqrt{y-2}} f(x,y)\,dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x,y)\,dx\,.$$

3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

Ця задача в певному сенсі є оберненою до попередньої – тепер вже ми початково маємо суму двох повторних інтегралів. І треба уявити область D, по якій береться подвійний інтеграл, якій цій сумі відповідає, а потім змінити порядок інтегрування. Проекцією області D на вісь Oy є об'єднання відрізків $[-1/\sqrt{2},0]$ і $[0,1/\sqrt{2}]$, тобто відрізок $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. На відрізку $[-1/\sqrt{2},0]$ область зліва обмежена прямою $x=-y$, а справа – кривою $x=\sqrt{1-y^2}$, що є дугою кола $x^2+y^2=1$. На відрізку $[0,1/\sqrt{2}]$ область зліва обмежена прямою $x=y$, а справа – теж кривою $x=\sqrt{1-y^2}$. Тобто область D має вигляд, який зображено на рис. 13 – це круговий сектор.

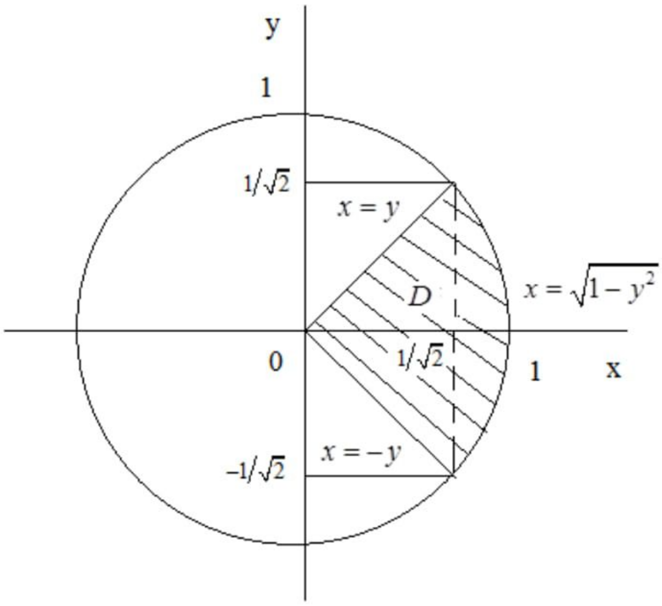


Рис. 13

Щоб змінити порядок інтегрування (тобто зовнішній інтеграл тепер має бути за змінною x), спроектуємо нашу область на вісь Ox – це буде відрізок $[0,1]$. На частині $[0,1/\sqrt{2}]$ цього відрізку область обмежена знизу прямою $y=-x$, а зверху – прямою $y=x$. На частині $[1/\sqrt{2},1]$ і зверху і знизу область обмежена дугами кола $x^2+y^2=1$: знизу дугою $y=-\sqrt{1-x^2}$, а зверху дугою $y=\sqrt{1-x^2}$. Отже, і тут ми маємо розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{0}^{1/\sqrt{2}} dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy .$$

1.5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай на площині Oxy задано область D, яку обмежено замкненою кривою L. Припустимо, що координати x, y довільної точки області D є функціями змінних u, v:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \tag{1.5.1}$$

де функції $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні 1-го порядку в деякій області D' площини Ouv. Кожній парі значень u,v відповідає єдина пара значень x, y. Припустимо також, що й кожній парі значень x, y відповідає єдина пара значень u,v. Тобто формули (1.5.1) здійснюють взаємно однозначну відповідність між областями D та D' – кожній точці $P(x, y) \in D$ відповідає одна й тільки одна точка $P'(u,v) \in D'$ і навпаки. Числа u,v називаються *криволінійними координатами точки* P.

Замкненій кривій L на площині Oxy відповідатиме також замкнена крива L' на площині Ouv (рис. 14).

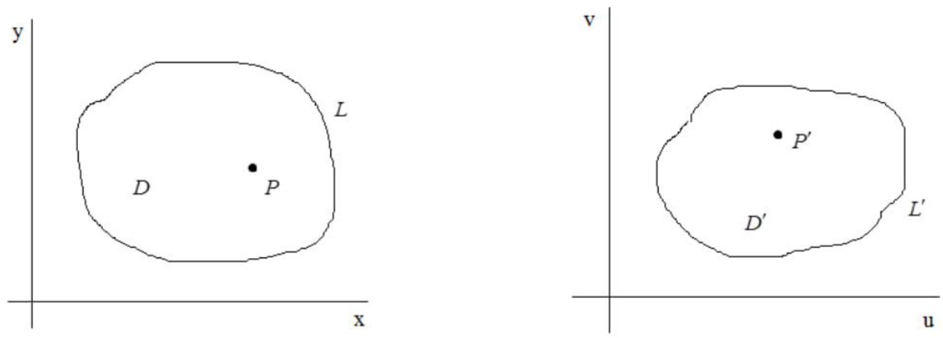
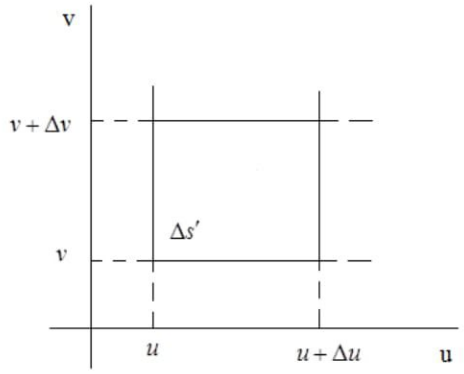


Рис. 14

Розглянемо на площині Ouv прямокутну площадку $\Delta s'$, яку обмежено прямими $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$. На площині Oxy їй відповідатиме криволінійна площадка Δs (рис. 15).



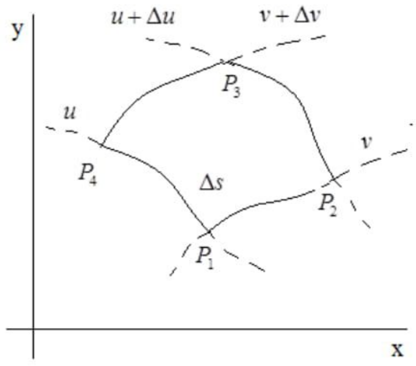


Рис. 15

Очевидно:

$$\Delta s' = \Delta u \cdot \Delta v.$$

Нехай в області D задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Кожному значенню $z = f(x, y)$ в області D відповідає таке ж саме значення функції $z = F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ в області D'.

Розглянемо інтегральні суми від функції $z = f(x, y)$ по області D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Очевидна рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\Delta s_i.$$

Знайдемо Δs, тобто площу криволінійного чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ площини Oxy. Нехай $P_i = P_i\ (x_i, y_i)$ ($i = 1,2,3,4$). Тоді:

$$x_1 = \varphi(u, v),\ y_1 = \psi(u, v),$$

$$x_2 = \varphi(u + \Delta u, v),\ y_2 = \psi(u + \Delta u, v),$$

$$x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v),\ y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

$$x_4 = \varphi(u, v + \Delta v),\ y_4 = \psi(u, v + \Delta v).$$

При обчисленні площі Δs замінюємо прирости функцій диференціалами:

$$x_1 = \varphi(u, v)\ y_1 = \psi(u, v),$$

$$x_2 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_3 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v,$$

$$x_4 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v.$$

Чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ наближено розглядатиме як паралелограм. Тоді за формулами аналітичної геометрії:

$$\Delta s \approx \left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{pmatrix}\right| = \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v .$$

Позначимо:

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Цей визначник називається *визначником Якобі* (*якобіаном*) функцій $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$. Таким чином, маємо:

$$\Delta s \approx |J|\,\Delta s' . \tag{1.5.2}$$

Рівність (1.5.2) тим точніша, чим менше розміри площадок Δs, $\Delta s'$. Переходячи до границі при $\Delta s, \Delta s' \to 0$, дістанемо точну рівність:

$$|J| = \lim_{diam\,\Delta s' \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'} . \tag{1.5.3}$$

Таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\,|J|\,\Delta s_i' .$$

Переходячи до границі при $\max diam(\Delta s_i') \to 0$, дістаємо:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(u,v)\,|J|\,du\,dv . \tag{1.5.4}$$

Формула (1.5.4) називається формулою заміни змінних у подвійному інтегралі.

Приклад. Обчислити:

$$\iint_D y^3 dxdy ,$$

якщо D – область, обмежена параболами $y = x^2$, $y = 2x^2$ та гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Область D має вигляд, який показано на рис. 16.

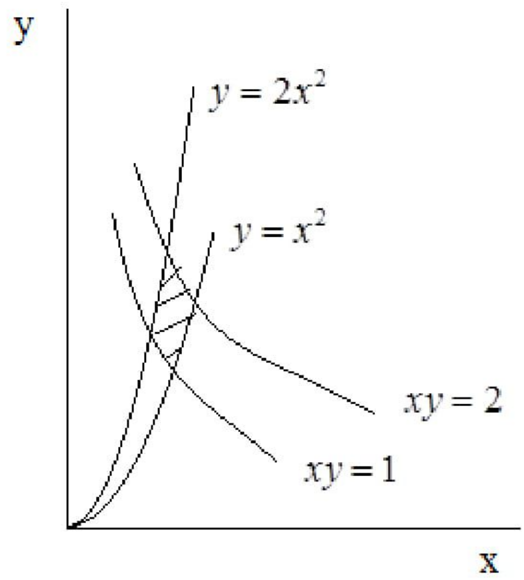


Рис. 16

Зробимо заміну змінних:

$$u = \frac{y}{x^2},\ v = xy.$$

Тоді області D на площині Oxy відповідатиме область $D' = \{1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$ (тобто квадрат) на площині Ouv. Далі маємо:

$$x = \varphi(u,v) = u^{-1/3}v^{1/3},\ y = \psi(u,v) = u^{1/3}v^{2/3};$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9}u^{-1} - \frac{1}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Тому

$$\iint\limits_D y^3 dxdy = \int_1^2 du \int_1^2 uv^2 \frac{1}{3u} dv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

1.6. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Важливим частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід до полярних координат. Особливо він ефективний, коли область D є областю кругового типу, тобто має форму круга або його частин. Як відомо, зв'язок між декартовими координатами x, y точки на площині та її полярними координатами ρ, φ задається формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \geq 0.$$

Якобіан цієї заміни дорівнює:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тому подвійний інтеграл в полярних координатах набуває вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

де D' – область на площині $O\varphi\rho$. Припустимо, що D' – область 1-го типу, тобто $D' = \{\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1,\ \rho_1(\varphi) \leq \rho(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)\}$. Тоді область D на площині Oxy має бути обмеженою двома променями, що виходять з початку координат під кутами φ_0 та $\varphi_1 > \varphi_0$ до додатного напряму осі Ox, та двома кривими, рівняння яких у полярній системі координат мають вигляд $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ при $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ (рис. 17). Щоб правильно розставити межі інтегрування в полярних координатах у цьому випадку, не обов'язково зображувати область D' на площині $O\varphi\rho$. Достатньо «затиснути» область D між двома променями, що виходять з початку координат, і подивитись, які кути вони утворюють з додатним напрямом осі Ox. Менший з цих кутів буде нижньою межею зовнішнього інтеграла, а більший – верхньою. Потім з початку координат провести промені через область D і подивитись, через яку лінію вони входять в область (рівняння цієї прямої буде нижньою межею внутрішнього інтеграла), і через яку виходять з області (рівняння цієї прямої буде верхньою межею внутрішнього інтеграла). Тобто матимемо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (1.6.1)$$

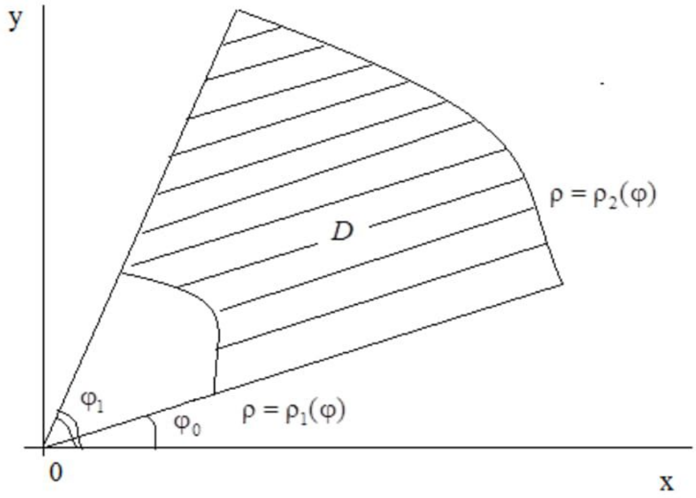


Рис. 17

Приклади.

1. Обчислити:

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy\,,\quad D=\left\{1\le x^2+y^2\le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}\right\}.$$

Область D зображено на рис. 18.

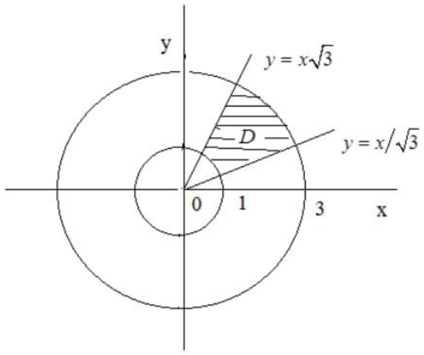


Рис. 18

Ця область обмежена променями $\varphi=\pi/6$ (пряма $y=x/\sqrt{3}$), $\varphi=\pi/3$ (пряма $y=x\sqrt{3}$) та дугами кіл $\rho=1$ ($x^2+y^2=1$) та $\rho=3$ ($x^2+y^2=9$). Тому:

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy=\int_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int_1^3 \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\rho\,d\rho=\int_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int_1^3\varphi\rho\,d\rho=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi\,d\varphi\int_1^3\rho\,d\rho=$$

$$=\left(\left.\frac{\varphi^2}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/3}\right)\cdot\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_1^3\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)\cdot(9-1)=\frac{\pi^2}{6}.$$

2. Перейти у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1). Область D обмежено колами $x^2+y^2=4x$ та $x^2+y^2=8x$.

Область D зображено на рис. 19.

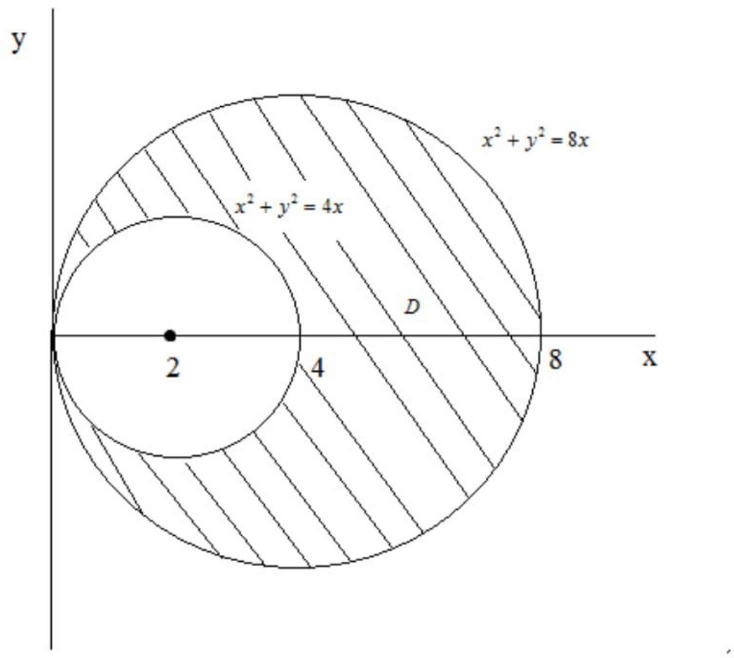


Рис. 19

Прямі, між якими «затиснуто» цю область – від'ємний та додатний напрями осі Oy, тобто лінії, рівняннями яких у полярній системі координат відповідно є: $\varphi=-\pi/2$, $\varphi=\pi/2$. Якщо з початку координат провести промені через область D, то лінією їх входу буде коло $x^2+y^2=4x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho=4\cos\varphi$, а лінією виходу – коло $x^2+y^2=8x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho=8\cos\varphi$. Тому, згідно з формулою (1.6.1), маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

2). Область D – менший з двох сегментів, на які пряма $x+y=2$ поділяє круг $x^2+y^2\le 4$.

Область D зображено на рис. 20.

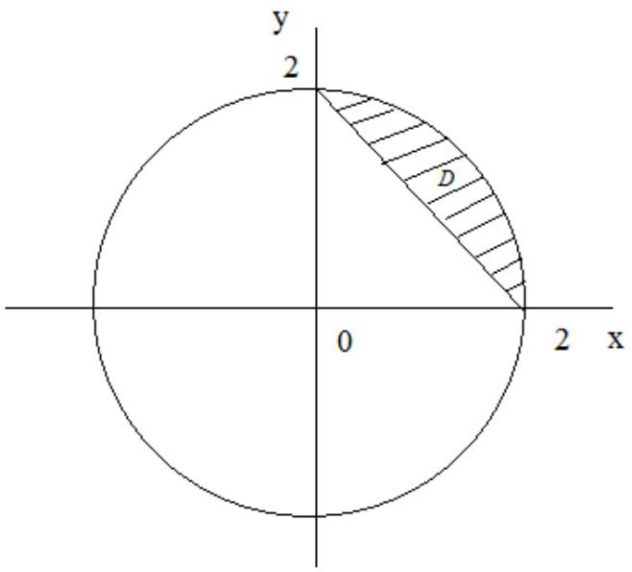


Рис. 20

Цю область «затиснуто» між додатним напрямом осі Ox (лінія $\varphi=0$) і додатним напрямом осі Oy (лінія $\varphi=\pi/2$). Якщо провести промені з початку координат через область, то лінією входу в область буде відрізок прямої $x+y=2$, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho=\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}.$$

Лінією виходу буде дуга кола $x^2+y^2=4$, рівняння якого в полярній системі координат має вигляд: $\rho=2$. Отже, згідно з формулою (1.6.1) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

3) Область D – спільна частина кругів $x^2+y^2\le ax$, $x^2+y^2\le by$ $(a,b>0)$. Область D зображено на рис. 21.

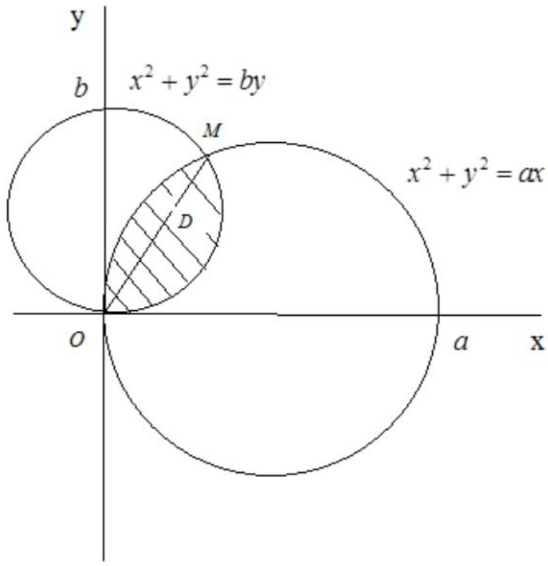


Рис. 21

Кола $x^2+y^2=ax$ та $x^2+y^2=by$ перетинаються в точках $O(0,0)$ та $M\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$. Відрізок OM утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$. Якщо проводити промені з початку координат через область D, то всі вони входитимуть в область через точку $\rho=0$, а вихід з області буде здійснюватись через дугу кола $x^2+y^2=by$, якщо ці промені утворюють з додатним напрямом осі Ox кут $\varphi\in(0,\alpha)$, і через дугу кола $x^2+y^2=ax$, якщо промені утворюють з додатним напрямом осі Ox кут $\varphi\in(\alpha,\pi/2)$. Рівняння кола $x^2+y^2=by$ у полярній системі координат має вигляд $\rho=b\sin\varphi$, а кола $x^2+y^2=ax$ має вигляд $\rho=a\cos\varphi$. Отже, при переході до полярних координат, необхідно розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}d\varphi\int\limits_0^{b\sin\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$