Розділ 1. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1.1. Загальні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ Вираз $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ є його n-ою ***частковою сумою***. Границя послідовності часткових сум $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ при $n \to \infty$ називається ***сумою*** S ряду, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Якщо ряд має скінченну суму, то він ***збіжний***. Якщо вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то ряд ***розбіжний***.

Для збіжності ряду необхідно, щоб його загальний член прямував до нуля, коли n нескінченно зростає. Тобто, *якщо ряд* ***збігається****, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (*Необхідна ознака збіжності числового ряду*).

Але не навпаки: коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то не можна зробити висновок, що ряд обов'язково збігається: він може, як збігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, так і розбігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, хоча як $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$, так і $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Ця ознака є лише необхідною, але не є достатньою для збіжності.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, то ряд розбігається*. (*Достатня ознака розбіжності числового ряду*).

1.2. Приклади розв'язання задач

<u>Приклад</u>. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n}+4}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$;   ж) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, tg\frac{n}{n^2+1}$;   з) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, arctg\frac{1}{n}$;   і) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n}{n+1}$;   ї) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{n+1}$;

й) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 arctg\frac{n}{n^3+1}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}$.

Розв'язання.

а) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n}{2-3/n} = \frac{3}{2} \neq 0 .$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

б) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+2/n+5/n^2} = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

в) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{\sqrt{n}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-2/n}{1/\sqrt{n}+4/n} = \left|\frac{3}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

г) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+1/n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

д) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n+2/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

е) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{(n/3)\cdot 3} =$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}(1+3/n)^{n/3}\right)^3 = e^3 \neq 0$$. Отже, даний ряд розбігається.

є) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} = \left|\begin{matrix}\alpha = 1/n^2 \to 0\\ \textit{при} \quad n\to\infty\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \neq 0.$$ Отже, даний ряд розбігається.

ж) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\, tg\frac{n}{n^2+1} = \left|\begin{matrix}\alpha = n/(n^2+1)\to 0\\ \textit{при}\ n\to\infty;\ tg\alpha \sim \alpha\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0.$$ Ряд розбігається.

з) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2/n}{2-3/n}\right)^n = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}\right| = +\infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

и) Застосуємо необхідну ознаку:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\, arctg\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{arctg\, 1/n}{1/n} = 1 \neq 0.$$

(Оскільки $\alpha = \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$ і $\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha} = 1$).

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

і) За необхідною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Даний ряд розбігається.

ї) Необхідна ознака збіжності не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-3/n^2}{1/n+1/n^2} = \left|\frac{4}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 arctg\frac{n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{arctg\left(n/(n^3+1)\right)}{1/n^2} =$$

$$= \left| arctg\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{n}{n^3+1} \quad при \;\; n\to\infty \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n/(n^3+1)}{1/n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^3} = 1 \neq 0 .$$ Ряд розбігається.

к) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+1/n\right)}{1/n} = 1 \neq 0 .$$

Ряд розбігається.

л) За необхідною ознакою збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+1/n-1/n^2}{1+1/n^2}} = \sqrt[3]{1} = 1 \neq 0 .$$

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

1.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-4}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2-2n+7}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin\frac{n^2}{n^4+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\frac{n^2+1}{n^2}$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+4/n)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{3/n}-1)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{2n^3+n-3}{n^3+5}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 arctg\frac{2}{n^3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin\frac{n^2}{n^4+1}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{3n+4}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n-2}\right)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^3+3}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n}\right)^{n+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{3}{n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{3n-4}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{2n+3}{2n+5}$

1.4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності ***знакододатних числових рядів*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$.

1.4.1. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

Перша (основна) ознака порівняння.

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причому* $a_n \leq b_n$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *теж збігається.*

(Якщо $a_n > b_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *, причому* $a_n \ge b_n$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *теж розбігається.* (Якщо $a_n < b_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

Друга (гранична) ознака порівняння.

Якщо $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \ne 0,\, l \ne \infty), \qquad (*)$$

то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

Співвідношення (*) говорить про те, що загальні члени a_n і b_n цих рядів є нескінченно малими одного порядку. Це треба мати на увазі також при використанні першої ознаки, тобто підбирати для порівняння еталонний ряд, загальний член якого b_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член a_n ряду, що досліджується: $a_n \sim b_n$.

За еталонні ряди часто приймають:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \le 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд, складений із членів геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \ge 1$.

1.4.2. Приклади розв’язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+3/n)$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2+3}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin(1/n^2)$;

і) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3^n+2)}$.

<u>Розв’язання</u>. а) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$, то порівнюємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+4/n^2} = 1.$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже ці ряди поводять себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ також розбігається.

б) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: $a_n = \frac{n}{n^3+4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Оскільки $a_n < b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$ також збігається.

в) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-4n+1} = 0.$$

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-4/n+1/n^2}=1\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}/n}{n/n+3/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{1+3/n}=0.$$

Оскільки $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=b_n$, $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+3/n}=1\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Таким чином, даний ряд розбігається.

д) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^3+4/n^6}{4-2/n^4+5/n^5}=0.$$

Оскільки $a_n=\dfrac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}\sim\dfrac{n^3}{4n^6}\sim\dfrac{1}{n^3}=b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n^3+4)}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+4n^2}{4n^5-2n+5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n^3}{4-2/n^4+5/n^5}=\frac{1}{4}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Отже, ці ряди поводять себе однаково щодо збіжності, тобто даний ряд теж збігається.

е) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Оскільки $a_n = 1\Big/\sqrt[3]{n^3+3n^2)} \sim 1\Big/\sqrt[3]{n^3} = 1/n = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+3/n}} = 1 \quad \left(\frac{\neq 0}{\neq \infty}\right).$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то і даний ряд теж розбігається.

є). Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Оскільки $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{3n^5}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \dfrac{1}{n^{5/4}} = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^{5/4}$. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^{p}$ збігається при $p > 1$. Оскільки $5/4 > 1$, то еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^{5/4}$ – збіжний.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/4}}{\sqrt[4]{3n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n^5}{3n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{3+1\big/n^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} .$$

Тобто a_n і b_n є нескінченно малі одного порядку, два ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

ж) Відомо, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1/\alpha)\ln(1+\alpha) = 1$. Тому для даного ряду можна застосувати граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$a_n = \ln(1 + 3/n),\ b_n = 1/n; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+3/n)}{1/n} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+3/n)}{3/n} = \left| \alpha = 3/n \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty \right| =$$

$$= 3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 3 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$ Ряд розбігається.

з) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1/n}{1+3/n^2} = \sin 0 = 0.$$

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. За граничною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n/(n^2+3)\right)}{1/n} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$ Ряд розбігається.

и) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(1/n^2\right) = \arcsin 0 = 0.$$

Порівняємо цей ряд за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left(1/n^2\right)}{1/n^2} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}$.

Отже, даний ряд збігається.

і) Очевидно, необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(3^n+2)} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n$. Цей ряд збігається, як складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/3 < 1$. Справедлива нерівність

$$a_n = \frac{1}{n(3^n+2)} \leq \frac{1}{3^n+2} \leq \frac{1}{3^n} = b_n,$$

тобто члени даного ряду не перевищують членів збіжного еталонного ряду. Таким чином, цей ряд збігається.

1.4.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(5^n+2)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-5}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n-3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{n^2}{n^3+1}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3}{5n^6+n^2-4n+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+7}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{n}{n^3+8}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+5)}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+5/n^2\right)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^6+7}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+3n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+3^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3}{n^5+4}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{2^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n^2}$

1.4.4. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Якщо функція $f(x)$ *неперервна, монотонно спадає і додатна при* $x \geq a$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$

а) *збігається, коли збігається невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині*;

б) *розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x, причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Наприклад, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$, $a = 2$, і будемо розглядати невласний інтеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1.4.5. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^4 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, n}{1+n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$.

Розв'язання. а) Застосуємо достатню інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_x^A = 2\lim_{A\to+\infty}\left(\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}\right) = +\infty .$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

б) Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = 1/(x\ln^4 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{d\ln x}{\ln^4 x} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \ln^{-4} x d(\ln x) = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{\ln^{-3}}{-3}\right|_x^A = -\frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{1}{\ln^3 x}\right|_2^A =$$

$$= -(1/3) \lim_{A\to+\infty} \left(1/\ln^3 A - 1/\ln^3 2\right) = 1/(3\ln^3 2) \neq \infty .$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^4 n}$ теж збігається.

в) Оскільки $(arctg\ x)' = 1/(1+x^2)$, зручно застосувати інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{arctg\ x}{1+x^2}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ задовольняє умовам цієї ознаки. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{arctg\ x}{1+x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{arctg\ x}{1+x^2} dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} arctg\, x\ d(arctg\ x) = \lim_{A\to\infty} \left(\left.\frac{1}{2} arctg^2 x \right|_1^A \right) =$$

$$= 1/2 \cdot \lim_{A\to\infty} (arctg^2 A - arctg^2 1) = 1/2 \cdot (arctg^2 \infty - arctg^2 1) =$$

$$= 1/2 \cdot \left((\pi/2)^2 - (\pi/4)^2 \right) = 3\pi^2/32 \neq \infty .$$

Невласний інтеграл збігається, тому даний ряд теж збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n'}{(e^{n^2})'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n^2} \cdot 2n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ відповідає умовам цієї ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} e^{-x^2} d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^A = -\frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \left(e^{-A^2} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} \neq \infty .$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається.

1.4.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, 3n}{1+9n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^2 n}{1+n^2}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^4(3n+2)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n-1)}{(3n-1)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\ \ln(4n+1)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+4n^2)\, arctg\, 2n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{1/n}}{n^2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2}}{n^3}$

1.4.7. Ознака Даламбера

Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, *то при* $q<1$ *ряд збігається, при* $q>1$ *ряд розбігається, а при* $q=1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

Щоб не натрапити на останній випадок невизначеності, ознаку Даламбера застосовують до таких рядів, загальний член яких має в своєму складі факторіал або показникову функцію від n, наприклад $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{2n+1}}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{(3n-1)!}$.

Зауважимо, що a_{n+1} одержуємо з a_n, замінюючи n на $n+1$. Наприклад, якщо $a_n=\frac{n^2}{3^{2n+1}}$, то $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{2(n+1)+1}}=\frac{(n+1)^2}{3^{2n+3}}$, якщо $a_n=\frac{4n-3}{(3n-1)!}$, то $a_{n+1}=\frac{4(n+1)-3}{(3(n+1)-1)!}=\frac{4n+1}{(3n+2)!}$.

1.4.8. Приклади розв’язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2\cdot 4^n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{4^{n-2}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^{n+1}}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin\frac{1}{3^n}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n(2n-1)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 arctg\frac{n}{3^n}$; ї) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{(n+1)!}$;

й) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{e^n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n!}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Розв’язання. а) У загальний член цього ряду входить показникова функція 5^n, тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n+2}{5^n}; \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{5^{n+1}} = \frac{3n+5}{5^{n+1}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\cdot 5^n}{5^{n+1}(3n+2)} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{3n+2} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{3+5/n}{3+2/n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду входить факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{n^2+2}, \; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}; \; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n^2+2)}{((n+1)^2+2)n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+2n+2}{n^2+2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n+2/n^2+2/n^3}{1/n+2/n^2+3/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty > 1.$$

Ряд розбігається.

в) У загальний член цього ряду входить $(2n)!$, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= 1\cdot 0 = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

г) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $a_n = \dfrac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot 4^{n/3}}$. До його складу входить показникова функція $4^{n/3}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 4^{(n+1)/3}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+6)\sqrt[3]{n^2}\cdot 4^{n/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 4^{(n+1)/3}(5n+1)} = \frac{1}{4^{1/3}} \lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{5n+1} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+2n+1}} = 4^{-1/3} \lim_{n\to\infty} \frac{5+6/n}{5+1/n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+2/n+1/n^2}} =$$

$$= 4^{-1/3}\cdot 1\cdot \sqrt[3]{1} = 4^{-1/3} < 1.$$ Ряд збігається.

д) У загальному члені ряду є показникові функції 5^n і 4^{n-2}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n\cdot 5^n}{4^{n-2}} = \frac{n\cdot 5^n}{4^n\cdot 4^{-2}} = n\cdot(5/4)^n\cdot 4^2 = 16n\cdot(5/4)^n;$$

$$a_{n+1} = 16(n+1)(5/4)^{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{16(n+1)(5/4)^{n+1}}{16n(5/4)^{n+1}} =$$

$$= (5/4)\lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 5/4 > 1.$$ Ряд розбігається.

е) До загального члену ряду входить показникова функція 3^{n+1}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^4}{3^{n+1}};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+2}}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 3^{n+1}}{3^{n+2}\cdot n^4} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^4 = \frac{1}{3} < 1.$$ Ряд збігається.

є) У загальному члені ряду є показникова функція 2^{n-1}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)2^n}{(n+1)^2+3}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 2^n(n^2+3)}{((n+1)^2+3)(n+1)\cdot 2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n^2}{(1+1/n)^2+3/n^2} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2 > 1.$$

Ряд розбігається.

ж) Застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = n\cdot \arcsin(1/3^n)\,;\ a_{n+1} = (n+1)\cdot\arcsin(1/3^{n+1})\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\arcsin(1/3^{n+1})}{n\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin(1/3^{n+1})}{\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} =$$

$$=\left|\arcsin\alpha \sim \alpha\ \textit{при}\ \alpha\to 0\right| = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$ Ряд збігається.

з) У загальному члені ряду є показникова функція 10^n і факторіал $n!$, тому можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{10^n(2n-1)}\,;\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2n+1)}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 10^n(2n-1)}{10^{n+1}(2n+1)\,n!} = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2-1/n)}{2/n+1/n^2} = \left|\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{0}\right| = \infty > 1.$$ Ряд розбігається.

и) У загальному члені ряду є показникова функція 3^{n-1} і факторіал $(2n-3)!$ Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}\,;\ \ a_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(2(n+1)-3)!} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(2n-1)!}\,;\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n(2n-3)!}{(2n-1)!\cdot n\cdot 3^{n-1}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-3)!}{n(2n-3)!(2n-2)(2n-1)} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-2)(2n-1)} = 3\cdot 1\cdot 0 = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

і) У складі загального члена ряду є показникова функція 3^n. Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = n^2\cdot arctg\,(n/3^n)\,;\quad a_{n+1} = (n+1)^2\cdot arctg\,((n+1)/3^{n+1})\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{n^2 arctg\ (n/3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{arctg\ (n/3^n)}.$$

За допомогою правила Лопіталя знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\ln 3}=0.$$

За першою чудовою границею $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=1$, тобто $arctg\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Тоді $arctg\frac{n}{3^n}\sim\frac{n}{3^n}$ при $\alpha=\frac{n}{3^n}\to 0$ і $arctg\frac{n+1}{3^{n+1}}\sim\frac{n+1}{3^{n+1}}$ при $\alpha=(n+1)\big/3^{n+1}\to 0$. Еквівалентні нескінченно малі у відношенні замінюються одна на іншу. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{arctg\ (n/3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\big/3^{n+1}}{n\big/3^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$. Ряд збігається.

ї) У загальному члені ряду є факторіал $(n+1)!$, а також показникова функція 5^{2n-1}, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{5^{2n-1}}{(n+1)!},\quad a_{n+1}=\frac{5^{2(n+1)-1}}{(n+1+1)!}=\frac{5^{2n+1}}{(n+2)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}(n+1)!}{(n+2)!5^{2n-1}}=25\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=25\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=$$

$$=25\cdot 0=0<1.\ \text{Ряд збігається.}$$

й) У загальному члені ряду є показникова функція e^n, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{n+1}{e^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+2}{e^{n+1}};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)e^n}{e^{n+1}\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n}=\frac{1}{e}<1.$$ Ряд збігається.

к) У загальному члені є факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{3n-1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{3(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{3n+2}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)n!}{(n+1)!(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{(3n-1)(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3/n+2/n^2}{(3-1/n)(1+1/n)}=0<1.$$ Ряд збігається.

л) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)},\quad a_{n+1}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)\cdot2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n+1)\cdot}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n}{3+2/n}=\frac{2}{3}<1.$$ Ряд збігається.

1.4.9. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{7^n}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3+1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(3n)!}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,arctg\,\frac{1}{5^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot3^n}{6^{n+1}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^{n+2}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot3^{n+4}}{n^2+5}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{\sqrt[3]{n\cdot5^{n-1}}}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{4^n(3n+1)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+3}}{(2n+1)!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} n\, arctg\frac{n^2}{6^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+3}}{(n+4)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{e^{n+2}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{(n+2)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{n}{4^n}$

1.4.10. Радикальна ознака Коші

Ця ознака є достатньою і базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, *то при* $q<1$ *ряд збігається, при* $q>1$ *ряд розбігається, а при* $q=1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, з яких досить просто добувається корінь n-го степеня. Наприклад,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n+2}\frac{n}{n^2-3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{3n}\frac{2n+1}{n+3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{7n+3}\right)^{n^2}.$$

1.4.11. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n^n}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\frac{n^2}{n+1}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\Big/\left(arctg\frac{n}{n+2}\right)^{n-3}$; і) $\sum_{n=1}^{\infty}tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}$;

ї) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}$; й) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^{n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{3n^2+1}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}$.

Розв'язання. а) Загальний член ряду є n-м степенем дробу $(2n-3)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1.$$

Ряд збігається.

б) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n/(n^2+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\frac{n}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1/n}{1+1/n^2}=$$

$=\sin 0=0<1$. Ряд збігається.

в) Загальний член ряду є степенем з показником $n+1$ виразу $arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)/n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\frac{1/n+1/n^3}{1-2/n^3}\right)^{1+1/n}=arctg\,0=0<1.$$ Ряд збігається.

г) Загальний член ряду є n-м степенем виразу $\arcsin\frac{n+3}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1+3/n}{1+1/n}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}>1.$$ Ряд розбігається.

д) Загальний член ряду є $(n-2)$-м степенем виразу $(5n+6)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\frac{n-2}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+6/n}{2+1/n}\right)^{1-2/n}=\left(\frac{5}{2}\right)^1=\frac{5}{2}>1.$$ Ряд розбігається.

е) Загальний член ряду $a_n=\frac{3^{n+2}}{n^n}=\frac{3^n\cdot 3^2}{n^n}=9\cdot(3/n)^n$. Таким чином, a_n містить у вигляді множника n-й степінь дробу $3/n$, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{9\cdot(3/n)^n}=\lim_{n\to\infty}9^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}3/n=1\cdot 0=0<1.$$

Ряд збігається.

є) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2-3$ виразу $(3n-1)/(3n+2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{2n^2-3}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{-3}\cdot\left(-\frac{3}{3n+2}\cdot\frac{2n^2-3}{n}\right)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-9}{3n^2+2n}}=$$

$$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-9/n^2}{3+2/n}} = e^{-2} < 1.$$ Ряд збігається.

ж) Показник степеня $3n^2+1$ у загальному члені даного ряду залежить від n, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{(3n^2+1)/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+(2n-4)/(n^2+4)\right)^{\frac{n^2+4}{2n-4}\cdot\left(\frac{2n-4}{n^2+4}\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{n}\cdot\frac{3n^2+1}{n^2+4}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2-4/n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{1+4/n^2}} = e^{2\cdot 3} = e^6 > 1.$$ Ряд розбігається.

з) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\ln\dfrac{n^2}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n\frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{1/n+1/n^2} =$$

$$= \left|\ln\frac{1}{0} = \ln\infty\right| = \infty > 1.$$ Ряд розбігається.

и) Загальний член ряду $a_n = 4^n : arctg^{n-3}\left(n/(n+2)\right)$ містить степені з показниками n та $3-n$, що залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n : arctg^{n-3}\left(n/(n+2)\right)} =$$

$$= 4 : \lim_{n\to\infty} arctg^{(n-3)/n}\left(n/(n+2)\right) = 4 : \lim_{n\to\infty} arctg^{1-3/n}\frac{1}{1+2/n} =$$

$$= 4 : arctg\,1 = 16/\pi > 1.$$ Ряд розбігається.

і) У загальному члені ряду є степінь з показником $n+1$ виразу $tg\left((n+3)/n^2\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} tg^{\frac{n+1}{n}}\frac{n+3}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} tg^{1+1/n}\left(1/n + 3/n^2\right) = tg\,0 = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

ї) Загальний член ряду має показник степеня $3n-1$, що залежить від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{(3n-1)/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{1+1/n}{2+5/n}\right)^{3-1/n} =$$

$$= \left(\arcsin(1/2)\right)^3 = (\pi/6)^3 < 1.$$ Ряд збігається.

й) Загальний член ряду є n-м степенем дробу $\dfrac{5n^2+4}{2n^2+n+1}$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5+4/n^2}{2+1/n} = \frac{5}{2} > 1.$$ Ряд розбігається.

к) У загальному члені ряду показники степенів n та $3n^2+1$ залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{3n^2+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{(3n^2+1)/n} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+(-6)/(2n+3)\right)^{\frac{2n+3}{-6}\cdot\left(\frac{-6}{2n+3}\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+3n}} = \frac{1}{3}e^{-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{2+3/n}} = \frac{1}{3}e^{-6\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}e^{-9} < 1.$$

Ряд збігається.

л) У загальному члені ряду показники степенів n та $n+2$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{5^{(n+2)/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{5^{1+2/n}}=\frac{\sin 0}{5}=$$

$=0<1$. Ряд збігається.

1.4.12. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n+1}\frac{n^3}{n^2+3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^n\frac{n^2}{n^3+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}5^{n+2}\Big/\sin^n\frac{n}{n+1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{n^2+2}\right)^{n+3}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^{n-2}\frac{n^2+1}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n^2+5}{n^2-3}\right)^{3n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{2n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n 1/n^2}{7^{n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+6}\right)^{n+4}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^4+1}{2n^4+n^2+3}\right)^{n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2+4}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2-3}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n^2}\frac{n^4}{n^4+4}$

1.5. Знакопочергові ряди

Знакопочерговий ряд (***ряд Лейбниця***) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \quad (*)$$

де $|u_n| = a_n \geq 0$.

Якщо збігається ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то сам ряд (*) теж збігається і називається ***абсолютно збіжним***.

Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, а сам знакопочерговий ряд (*)збігається, тоді він називається ***умовно збіжним***.

Достатня ознака Лейбниця: *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *виконуються дві умови*:

$$1)\ a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots; \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним.

Друга умова ознаки Лейбниця, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Підкреслимо, що виконання ознаки Лейбниця гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність ряду.

1.5.1. Приклади розв’язання задач

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{n+1}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin^n \frac{\pi n}{3^n}$; і) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n+2}$;

ї) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 \sin\frac{n}{n^3+1}$; й) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+2}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$.

Розв'язання. а) Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+3}$. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{4n^2+3} < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

За основною ознакою порівняння ряд з модулів збігається. Таким чином, даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+3)(n+5)}$ з абсолютних величин членів даного знакопочергового ряду можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1+3/n+2/n^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq \infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Застосуємо ознаку Лейбниця, щоб перевірити, чи збігається знакопочерговий ряд умовно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{(1+1/n)(1+2/n)} = 0.$$

Отже, виконується друга умова ознаки Лейбниця.

$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{5}{12}$; $a_3 = \frac{7}{20}$ $a_4 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$; … маємо

$\frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{7}{20} > \frac{3}{10} > \ldots$ Отже, виконується перша умова ознаки Лейбниця: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$.

Таким чином, даний ряд збігається. Оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то ця збіжність умовна.

в) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{2-1/n} = \frac{0}{2} = 0;\ \ a_1 = 1;\ \ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{5};\ \ldots\ 1 > \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{5} > \ldots.\ \text{Отже,}\ \ a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$$

Обидві умови ознаки Лейбниця виконуються, отже, даний ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається:

$$a_n = \sqrt{n}/(2n-1);\quad b_n = 1/\sqrt{n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, початковий знакопочерговий ряд збігається умовно.

г) Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2/2^{n-1}\right)$, складений з абсолютних величин даного знакопочергового ряду. Дослідимо його збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}};\ \ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n};\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot n^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

д) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$, складений з абсолютних величин даного знакопочергового ряду, можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1/3}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}};\quad b_n=\frac{1}{n^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{3n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{3-1/n}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається.

Дослідимо початковий ряд на умовну збіжність. тобто перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}=0;\quad a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}};\ a_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$a_2=\frac{1}{\sqrt[3]{5}};\ a_3=\frac{1}{\sqrt[3]{11}}\ \ldots\ \text{Маємо}\ a_1>a_2>a_3>\ldots.$$

Умови ознаки Лейбниця виконуються. Даний ряд збігається умовно.

е) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця для цього знакопочергового ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розглянемо функцію $2^x/x^2$, яка співпадає з даною $2^n/n^2$ на множині цілих додатних чисел. За правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{2}=+\infty.$$

Отже, і $\lim_{n\to\infty}=\frac{2^n}{n^2}=\infty\neq 0$, а значить друга умова ознаки Лейбниця не виконується, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n^2}$ розбігається.

є) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n+1} = |\sin 0| = 0;$$

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n+1},\ a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ a_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$a_3 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, … . Маємо $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Отже, ознака Лейбниця виконується, тому даний знакопочерговий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n+1}$ можна порівняти з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n+1};\quad b_n = \frac{1}{n};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin \pi/n+1}{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot n}{n+1} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = \pi\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Таким чином, початковий ряд збігається умовно.

ж) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$. Друга умова ознаки Лейбниця виконується.

$$a_n = \left|(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{\ln(n+1)};\ a_1 = 1/\ln 2;\ a_2 = 1/\ln 3;$$

$a_3 = 1/\ln 4$, … . Функція $\ln x$ є зростаючою, тому перша умова ознаки Лейбниця виконується $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Отже, даний ряд збігається.

Перевіримо, чи збігається він абсолютно. Ряд з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ розбігається, тому що $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (за основною ознакою порівняння з меншим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, що розбігається). Таким чином, даний ряд збігається умовно.

з) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0\,;\;\; a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\,;$$

$$a_1 = 1/(2\ln 2)\,;\; a_2 = 1/(3\ln 3)\,;\; a_3 = 1/(4\ln 4)\,,\;\ldots\; a_1 > a_2 > a_3 \ldots .$$

Ознака Лейбниця виконується, тому даний ряд збігається. Маємо дослідити його на абсолютну збіжність.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Розглянемо відповідну функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, що на інтервалі $[1,\infty)$ приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, причому $f(n) = |u_n|$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(x+1))\Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(A+1)) - \ln\ln 2 = \infty\,.$$ Інтеграл розбігається.

Отже, ряд з абсолютних величин теж розбігається. Таким чином, знакопочерговий ряд збігається умовно.

и) Дослідимо на абсолютну збіжність даний ряд, застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\pi n/3^n\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arcsin^n\left(\pi n/3^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\left(\pi n/3^n\right)=$$

$$=\arcsin\left(\pi\lim_{n\to\infty}(n/3^n)\right)=\arcsin 0=0<1,$$

де для розкриття невизначеності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ скористалися відповідною границею для допоміжної функції $f(x)=x/3^x$, що співпадає з послідовністю $n/3^n$ при x цілих і додатних. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x\ln 3}=0.\quad \text{Отже і}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$$

За радикальною ознакою Коші ряд з абсолютних величин збігається, тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n+2}$ за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{(n+2)/n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-1/n}\right)^{1+2/n}=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, а тому знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

ї) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^3}=1\neq 0.$$

(Скористались тим, що $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. $\alpha=n/(n^3+1)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{1+1/n^3} = 0$. Тому $\sin\dfrac{n}{n^3+1} \sim \dfrac{n}{n^3+1}$ при $n\to\infty$).

Ознака Лейбниця не виконується, тому даний знакопочерговий ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1-4}{n^2+1}\right)^{n^2+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-4/(n^2+1)\right)^{-\frac{n^2+1}{4}\cdot\frac{4(n^2+2)}{n^2+1}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-4/(n^2+1)\right)^{-(n^2+1)/4}\right)^{-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}} = e^{-4} \neq 0.$$

Вона не виконується, тому даний ряд розбігається.

к) Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$ з абсолютних величин даного знакопочергового ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$|u_{n+1}| = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n\cdot(n+1)!}{(n+2)!\,n\cdot 3^{n-1}} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2n} = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1/n^2}{1+2/n} = 3\cdot\frac{0}{1} = 0 < 1.$$

Ряд з модулів збігається, а тому знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

л) Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-1)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3(n+1)-2)} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n+1)\cdot1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot...\cdot(3n-2)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot...\cdot(3n+1)\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1.$$

Ряд з модулів збігається, а тому даний знакочерговий ряд збігається абсолютно.

1.5.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакочергові числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{(n+1)(n+6)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{5n-2}\right)^{n+4}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{n+2}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+3}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot3^{n+1}}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2\pi}{n+3}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln^2(n+2)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n arctg^n\frac{\pi n}{5^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot\sin\frac{n}{n^2+5}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)\cdot5^n}{(n+3)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot5\cdot...\cdot(4n-3)}{7\cdot12\cdot...\cdot(5n+2)}$	16	$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

1.6. Степеневі ряди

Функціональний ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

де $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... – деякі функції аргументу x.

Областю збіжності функціонального ряду є множина всіх значень x, при яких збігається числовий ряд з відповідних значень функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ...

Важливим випадком функціонального ряду є ***степеневий ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad (**)$$

де a_n $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ – коефіцієнти ряду.

Інтервалом збіжності степеневого ряду називається інтервал $(-R, R)$ такий, що всередині нього $(|x| < R)$ ряд збігається, причому абсолютно, а зовні $(|x| > R)$ – ряд розбігається. Число R називається ***радіусом збіжності*** і може приймати значення від нуля до нескінченності. (У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $(R = 0)$, або ж ряд збігається при всіх значеннях x $(R = \infty)$).

На кінцях інтервалу $x = \pm R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є об'єднання інтервалу збіжності $(-R, R)$ і тих його кінців $x = \pm R$, де ряд збігається хоча б умовно.

Інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ можна визначити:

а) за ознакою Даламбера для ряду з модулів:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| < 1$, то ряд збігається.

б) за радикальною ознакою Коші для ряду з модулів:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$, то ряд збігається.

Для степеневих рядів стандартного вигляду (**), застосовуючи ці ознаки, відповідно одержуємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right| \quad \text{або} \quad R=1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Аналогічно за цими ознаками можна знайти внутрішні точки області абсолютної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. У межових точках відповідні числові ряди досліджуються окремо.

Зауважимо, що степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

де x_0 – центр розвинення, можна привести до стандартного подання (**), якщо позначити $x_1=x-x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n{x_1}^n\,.$$

Такий ряд збігається при $|x-x_0|<R$ і розбігається при $|x-x_0|>R$. Отже, маємо інтервал збіжності $x_0-R<x<x_0+R$. На кінцях інтервалу збіжності при $x=x_0+R$ і при $x=x_0-R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

1.6.1. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти області збіжності даних функціональних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{x^2}{3^n};\quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{n^2};\quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{4^{n+2}x^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(x+1/n);\qquad \text{д) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n4^{3n}}{x^{2n}\ln n}\,.$$

<u>Розв'язання</u>. а) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з абсолютних величин:

$$u_n = \sqrt{n}\sin\frac{x^2}{3^n}; \quad u_{n+1} = \sqrt{n+1}\sin\frac{x^2}{3^{n+1}}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}\sin(x^2/3^{n+1})}{\sqrt{n}\sin(x^2/3^n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x^2/3^{n+1})}{\sin(x^2/3^n)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \sin\alpha \sim \alpha \ \ \textit{при} \ \ \alpha \to 0; \quad \sin(x^2/3^{n+1}) \sim x^2/3^{n+1}; \\ \sin(x^2/3^n) \sim x^2/3^n \ \ \textit{при} \ \ n\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}\lim_{n\to\infty}\frac{x^2/3^{n+1}}{x^2/3^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $x \in (-\infty, \infty)$, тобто його областю збіжності є вся числова пряма.

б) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з модулів:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1} tg\,(x/(n+1)^2)}{x^n tg\,(x/n^2)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{tg\ (x/(n+1)^2)}{tg\ (x/n^2)}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{l} tg\,\alpha \sim \alpha \ \ \textit{при}\,\alpha \to 0; \ \ tg\,(x/(n+1)^2) \sim x/(n+1)^2; \\ tg\,(x/n^2) \sim x/n^2 \ \ \textit{при} \ \ n\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x/(n+1)^2}{x/n^2}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2} = |x|.$$

Отже, при $|x| < 1$, тобто при $-1 < x < 1$ ряд збігається абсолютно. Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,(1/n^2)$. Цей ряд збігається за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{tg(1/n^2)}{(1/n^2)} = 1$. Ряди поводять себе однаково.

2) При $x = -1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\,(1/n^2)$. Цей знакопо-

черговий ряд збігається абсолютно, бо розглянутий вище ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,(1/n^2)$ є рядом з його модулів.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $-1 \le x \le 1$, тобто його областю збіжності є відрізок $[-1;1]$.

в) Введемо нову змінну $z = 1/x$. Тоді $x = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}} z^n$.
Знайдемо радіус збіжності цього ряду за радикальною ознакою Коші $R = 1 \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$R = 1 : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n-1}/4^{n+2}} = 1 : \lim_{n\to\infty} \frac{5^{(n-1)/n}}{4^{(n+2)/n}} =$$

$$= 1 : \lim_{n\to\infty} \frac{5^{1-1/n}}{4^{1+2/n}} = \frac{4}{5}.$$

Отже, утворений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(5^{n-1} z^n \big/ 4^{n+2} \right)$ абсолютно збігається при $|z| < 4/5$, тобто $1/|x| < 4/5$, або $|x| > 5/4$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 5/4$ або $x < -5/4$, тобто при $x \in (-\infty, -5/4) \cup (5/4, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm\, 5/4$:

1) При $x = 5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}(5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80}$ що розбігається за необхідною ознакою:

$$u_n = 1/80; \ \lim_{n\to\infty} u_n = 1/80 \ne 0.$$

2) При $x = -5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}(-5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80}$. Цей знакопочерговий ряд розбігається, бо

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \cdot 1/80 \right| = 1/80 \ne 0.$$

Отже, даний функціональний ряд має область збіжності

$(-\infty;-5/4)\cup(5/4;+\infty)$, де збігається абсолютно.

г) Застосуємо радикальну ознаку Коші до ряду з модулів:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\ln^{2n}(x+1/n)\right|}=\lim_{n\to\infty}\ln^2(x+1/n)=\ln^2 x.$$

При $\ln^2 x<1$ ряд збігається абсолютно. Звідси

$$|\ln x|<1;\quad -1<\ln x<1;\quad e^{-1}<x<e.$$

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x=e$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(e+1/n)$. Оскільки:

$$q=\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln^{2n}(e+1/n)=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\left|\ln q=\ln\lim_{t\to\infty}\ln^{2t}(e+1/t)=\left|s=1/t;\ s\to 0\ \textit{при}\ t\to\infty\right|=\right.$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{\ln\ln(e+s)}{s}=\left|\frac{0}{0}\right|=2\lim_{s\to 0}\frac{(\ln\ln(e+s))'}{s'}=$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{1}{(e+s)\,\ln(e+s)}=\frac{2}{e};\ q=e^{2/e}\Bigg|=e^{2/e}\neq 0,$$

то цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака.

2) При $x=e^{-1}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(e^{-1}+1/n)$. Оскільки:

$$q=\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln^{2n}(e^{-1}+1/n)=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\left|\ln q=\ln\lim_{t\to\infty}\ln^{2t}(e^{-1}+1/t)=\left|s=1/t;\ s\to 0\ \textit{при}\ t\to\infty\right|=\right.$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{\ln\ln(e^{-1}+s)}{s}=\left|\frac{0}{0}\right|=2\lim_{s\to 0}\frac{(\ln\ln(e^{-1}+s))'}{s'}=$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{1}{(e^{-1}+s)\,\ln(e^{-1}+s)}=-2e;\ q=e^{-2e}\Bigg|=e^{-2e}\neq 0,$$

то цей ряд також розбігається.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $e^{-1}<x<e$, тобто його областю збіжності є інтервал $(e^{-1};e)$.

д) Введемо нову змінну $z = 1/x^2$. Тоді $x^2 = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n} z^n}{\ln n}$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)} : \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n} \right| = 4^3 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 64 \times$$

$$\times \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln(x+1)\right)'} = 64 \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 64 \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)'}{x'} = 64.$$

Отже, утворений ряд абсолютно збігається при $|z| < 64$, тобто $1/x^2 < 64$, або $|x| > 8$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 8$ або $x < -8$, тобто при $x \in (-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 8$:

1) При $x = 8$ маємо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{8^{2n} \ln n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ряд з його модулів $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ розбігається за основною ознакою порівняння з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тому що $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad \text{і} \quad |u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} = |u_{n+1}|,$$

то за ознакою Лейбниця знакопочерговий ряд збігається умовно.

2) При $x = -8$ маємо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{(-8)^{2n} \ln n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, що співпадає з одержаним при $x = 8$. Він збігається умовно.

Отже, областю збіжності даного функціонального ряду служить об’єднання двох закритих променів $(-\infty;-8]\cup[8;+\infty)$.

Приклад 2. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^{n-1}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{(n+2)2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,x^n}{3^n(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)(x+2)^n}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^{n-1}(x-3)^n}{n!}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{5^{n+2}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\ln n}{n^2}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}$;

ї) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n(x-4)^n}{n!}$.

Розв’язання. а) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|$:

$$a_n=n\cdot 3^{n-1};\ a_{n+1}=(n+1)\cdot 3^n;\ R=\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=\frac{1}{3}.$$

Ряд збігається абсолютно при $|x|<1/3$, тобто $-1/3<x<1/3$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x=1/3$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^{n-1}(1/3)^n=(1/3)\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=(1/3)\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0.$$

2) При $x=-1/3$ маємо знакопочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1}(-1/3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$. Цей ряд теж розбігається, тому що не виконується необхідна ознака: $\lim_{n\to\infty}|u_n| = (1/3)\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$.

Отже, область збіжності ряду – інтервал $x \in (-1/3;\, 1/3)$.

б) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)2^n}; \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+3)\cdot 2^n}{(n+2)\cdot 2^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n}{1+2/n} = 2.$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 2$, тобто $-2 < x < 2$. Перевіримо його збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{(n+2)2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}.$$

Цей ряд розбігається за граничною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2/n} = 1.$$

2) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$. Щойно показано, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ розбігається. Знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ збігається умовно, бо для нього виконуються умови ознаки Лейбниця:

$$a_n = 1/(n+2);\ a_1 = 1/3,\ a_2 = 1/4,\ a_3 = 1/5,\ \ldots$$

$$1/3 > 1/4 > 1/5 > \ldots > 1/(n+2) > \ldots .\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/(n+2) = 0 .$$

Отже, даний степеневий ряд має область збіжності $(-2,2]$, причому на правому кінці $x = 2$ він збігається умовно.

в) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{n!}{3^n(n+2)};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+3)};\ \ R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1}(n+3)}{3^n(n+2)(n+1)!} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0 .$$

Отже, радіус збіжності даного ряду $R = 0$, тобто даний ряд збігається тільки при $x = 0$.

г) Маємо степеневий ряд за степенями $x-1$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)};\ \ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)};\ \ R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1/n\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n}{1+3/n} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x-1| < 1$, тобто $-1 < x-1 < 1$, або $0 < x < 2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 2$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$ Цей ряд збігається за основною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2} = b_n .$$

Таким чином, при $x = 2$ степеневий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 0$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$. Це знакопочерговий ряд. Вище показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, складений з його абсолютних величин, збігається. Отже, цей знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ збігається абсолютно.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[0,2]$, де скрізь збігається абсолютно.

д) Маємо степеневий ряд за степенями $x + 2$ стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n$, де $a_n = (2n-1)/5^n$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)/5^n}{(2n+1)/5^{n+1}} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 1/n}{2 + 1/n} = 5.$$

Отже, даний ряд збігається при $|x + 2| < 5$, тобто $-5 < x + 2 < 5$, або $-7 < x < 3$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -7$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)$. Цей знакопочерговий ряд теж розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} (2n-1) = \infty \neq 0$.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $(-7,3)$.

е) Даний степеневий ряд за степенями $x+1$ має нестандартний вигляд. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = 4^n (x+1)^{2n} \big/ n; \quad u_{n+1}(x) = 4^{n+1}(x+1)^{2n+2} \big/ (n+1);$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}(x+1)^{2n+2} \cdot n}{(n+1)\cdot 4^n (x+1)^{2n}} \right| =$$

$$= 4(x+1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 4(x+1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 4(x+1)^2.$$

Даний ряд збігається абсолютно, якщо $4(x+1)^2 < 1$ або $(x+1)^2 < 1/4$, $-1/2 < x+1 < 1/2$, $-3/2 < x < -1/2$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = -1/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Це гармонічний ряд, що розбігається.

2) При $x = -3/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (-1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-2)^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ що розбігається.}$$

Отже, область збіжності даного степеневого ряду – інтервал $\left(-3/2; -1/2\right)$.

є) Маємо степеневий ряд за степенями $x-3$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = 6^{n-1} \big/ n!; \quad a_{n+1} = 6^n \big/ (n+1)!;$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{6^{n-1}(n+1)!}{n!\, 6^n} \right| = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Отже, ряд збігається при $-\infty < x-3 < \infty$, або $-\infty < x < \infty$, тобто область збіжності цього ряду $x \in (-\infty, \infty)$.

ж) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n \cdot 5^{n+3}}{5^{n+2} \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{5}{3}.$$

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-5/3 < x < 5/3$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^n}{5^{n+2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25},$$

що розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$u_n = 1/25; \ \lim_{n\to\infty} u_n = 1/25 \neq 0.$$

2) При $x = -5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (-5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n \cdot 5^n / 3^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{25}.$$

Цей знакопочерговий ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| u_n \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| (-1)^n \cdot 1/25 \right| = 1/25 \neq 0$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить ін.-тервал $(-5/3, 5/3)$.

з) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}; \ a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} : \frac{\ln n}{n^2} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln x)'} =$$

$$=1\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x+1)}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(x+1)'}=1,$$

де друга границя як невизначеність типу ∞/∞ розкрита за правилом Лопіталя.

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-1<x<1$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x=-1$ маємо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$. До ряду з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ застосуємо інтегральну ознаку:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left|\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du;\right.$$

$$u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x};\ dv=\frac{dx}{x^2};\ v=-\frac{1}{x}\ \Bigg|=\lim_{A\to\infty}\left(\ln x\cdot(-1/x)\right)\Big|_1^A-$$

$$-\lim_{A\to\infty}\int_1^A(-1/x)\frac{dx}{x}=-\lim_{A\to\infty}\frac{\ln A}{A}-\lim_{A\to\infty}(1/x)\Big|_1^A=-\lim_{A\to\infty}\frac{(\ln A)'}{A'}-$$

$$-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}+1=-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}-0+1=1\neq\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то знакочерговий ряд збігається абсолютно.

2) При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$, що співпадає з вище дослідженим. Він збігається.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить відрізок $[-1;1]$.

и) Маємо степеневий ряд за степенями $x+3$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$.\,u_n=\frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2};\quad u_{n+1}=\frac{(x+3)^{2(n+1)+1}}{3(n+1)^2+2}=\frac{(x+3)^{2n+3}}{3(n+1)^2+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{2n+3}\cdot(3n^2+2)}{(3(n+1)^2+2)(x+3)^{2n+1}}\right| = (x+3)^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = (x+3)^2 \lim_{n\to\infty}\frac{3+2/n^2}{3(1+1/n)^2+2/n^2} =$$

$$= (x+3)^2\cdot(3/3) = (x+3)^2 .$$

Отже, при $(x+3)^2 < 1$ ряд збігається абсолютно, тобто ряд збігається абсолютно при $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}$. Цей ряд збігається за ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$a_n = 1/(3n^2+2)$, $b_n = 1/n^2$; $a_n = 1/(3n^2+2) < 1/3n^2 < 1/n^2 = b_n$.

Отже $a_n < b_n$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}$ теж збігається.

2) При $x = -4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{3n^2+2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2} .$$

Цей ряд відрізняється від попереднього лише сталим множником -1. Отже, він також збігається.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[-4,-2]$.

і) Маємо степеневий ряд за степенями $x+4$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+4|^{(3n+2)/n}}{5^{(n-3)/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x+4|^{3+2/n}}{5^{1-3/n}} = \frac{|x+4|^3}{5} .$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $|x+4|^3/5<1$. Звідси

$|x+4|<\sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{5}<x+4<\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5}-4<x<\sqrt[3]{5}-4$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x=\sqrt[3]{5}-4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}5^{2/3+3}=\sum_{n=1}^{\infty}5^{11/3}.$$

Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}5^{11/3}=5^{11/3}\neq 0.$$

2) при $x=-\sqrt[3]{5}-4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+2}5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n5^{11/3}.$$

Цей ряд теж розбігається, бо $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=5^{11/3}\neq 0$.

Таким чином, для даного степеневого ряду маємо область збіжності $(-\sqrt[3]{5}-4,\ \sqrt[3]{5}-4)$, де ряд збігається абсолютно.

ї) Маємо степеневий ряд нестандартного вигляду (за непарними степенями x). Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}};\quad u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}x^{2(n+1)-1}}{\sqrt[3]{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot(-1)^{n+1}x^{2n-1}}\right|=|x|^2\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=|x|^2\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+1/n}}=|x|^2=x^2.$$

Цей ряд збігається при $x^2<1$. Звідси $-1<x<1$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x=1$ маємо знакопочерговий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. За ознакою Лейбниця він збігається, бо

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \ldots \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Складемо ряд з його абсолютних величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$. Це розбіжний узагальнений гармонічний ряд. Отже, при $x = 1$ маємо ряд, що збігається умовно.

2) При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}},$$

що відрізняється від попереднього тільки знаком. Отже, він також збігається умовно.

Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ збігається абсолютно на інтервалі $(-1,1)$. На кінцях інтервалу він збігається умовно. Область збіжності – відрізок $[-1;1]$.

к) Маємо степеневий ряд за степенями $x-4$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n! \cdot (n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!};$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^n n!}{n!(n+1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-n}{n+1}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n}} = e^{-1}.$$

Таким чином, даний ряд збігається абсолютно при $\left| x-4 \right| < e^{-1}$. Звідси $4 - 1/e < x < 4 + 1/e$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 4 + 1/e$ одержуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (1/e)^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$. За

формулою Стирлінга при $n \to \infty$ маємо $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Отже, при $n \to \infty$ дістаємо

$$a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \approx \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n .$$

Тому порівняємо наш ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ці ряди поводять себе однаково, тобто розбігаються. Отже, при $x = 4 + 1/e$ ряд розбігається.

2) При $x = 4 - 1/e$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (-1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n .$$

Знайдемо границю модулів його членів:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n n!} = \left| n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad при \;\; n \to \infty \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0 .$$

Крім того, при $n \to \infty$ маємо:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} .$$

Отже, за ознакою Лейбниця знакопочерговий ряд збігається. Оскільки вище доведено, що ряд з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ розбігається, то цей ряд збігається умовно.

Таким чином, область збіжності даного степеневого ряду – півінтервал $[4 - 1/e, 4 + 1/e)$. На лівому кінці збіжність умовна.

1.6.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 5^{n+2} x^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)!\, x^n}{2^n \cdot n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)(n+2)}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+2)^n}{(n+1)!}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{2n}}{n+2}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} (x-1)^n}{(2n-1)!}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1} (x+4)^n}{4^{n-3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+4}}{4n^2 - 3}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5} (x-2)^n}{2^{3n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}\, x^3}{3^{2n}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+3}}{4^{n+1}}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \sqrt{\ln n}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(x-1)^n}{4^{n+2}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{5^{2n} \sqrt{4n^2 - 1}}$

Розділ 2. РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Розкладання функцій у степеневі ряди

Рядом Тейлора функції $f(x)$ називається ряд вигляду:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (1)$$

Тут a – центр розвинення; $f^{(n)}(a)$ – значення n-ї похідної в точці $x=a$; $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – n-й коефіцієнт Тейлора, $n=0,1,2,\ldots$.

Якщо $a=0$, то ряд Тейлора приймає вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ і називається ***рядом Маклорена***.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.*

Наведемо умови, за яких сума ряду (1) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 2. *Для того, щоб ряд Тейлора (1) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули Тейлора $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.*

При виконанні вказаних умов маємо:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ і, зокрема, при } a=0 \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Прості достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора. дає наступна

теорема 3. *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M>0$ таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$,*

$x \in (a-R;\ a+R)$, $n=0,1,2,...$, *то функцію* $f(x)$ *можна розкласти в ряд Тейлора*.

Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:

1. $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,\quad -\infty < x < +\infty$.

2. $sin\ x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

3. $cos\,x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

4. $tgx = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+...,\ \ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z$.

5. $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...,\quad |x|<1$.

6. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+...+x^n+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1$.

7. $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ -1<x<1$.

8. $ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+... = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\leq 1$.

9. $arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,
$-1\leq x\leq 1$.

10. $arcsin\,x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5!}+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... =$
$= x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1<x\leq 1$, де $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)$,
$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)$.

2.1.1. Приклади розв’язання задач

Розкладання функцій в степеневі ряди в загальному випадку базується на використанні рядів Тейлора або Маклорена.

За ***першим способом*** знаходять похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$, які безпосередньо підставляють у відповідну формулу і одержують шукане розвинення.

На практиці частіше застосовують ***другий спосіб*** – без знаходження виразів для похідних довільного n-го порядку, а на основі формальних перетворень з використанням наведених стандартних розкладів елементарних функцій в ряди Маклорена. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів. В інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

Приклад 1**.** Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $f(x)=sin^2 x$; б) $f(x)=sin^3 x$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) **Спосіб I**. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x),\ n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0),\ n=0,1,2,...$, що входять у ряд Маклорена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=sin^2 x, \qquad f(0)=0,$$

$$f^{I}(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x, \qquad f^{I}(0)=0,$$

$$f^{II}(x)=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{II}(0)=2,$$

$$f^{III}(x)=-2^2\sin 2x=2^2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right), \qquad f^{III}(0)=0,$$

$$f^{IV}(x)=-2^3\cos 2x=2^3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right), \qquad f^{IV}(0)=-2^3,$$

$$f^{V}(x)=+2^4\sin 2x=2^4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right), \qquad f^{V}(0)=0,$$

$$f^{VI}(x)=2^5\cos 2x=2^5\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right), \qquad f^{VI}(0)=2^5,$$

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left[2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right], \qquad f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}(n-1)\right].$$

Отже,

$$sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-...+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+...,=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+1}x^{2(n+1)}(2n)!}{(n+2)!\,2^{2n-1}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 \text{ для всіх } x,$$

тобто інтервал збіжності ряду $(-\infty,+\infty)$.

Спосіб II. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення заданої функції та основними властивостями збіжних степеневих рядів.

Подамо функцію $f(x) = sin^2 x$ у вигляді:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1-cos\,2x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\,2x$$

і використаємо відомий розклад

$$cos\,x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad -\infty < x < +\infty,$$

замінюючи x на $2x$. Тоді маємо:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right) = \frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,\ -\infty < x < +\infty$$

Як бачимо, обидві відповіді збігаються.

б) З тригонометричної тотожності $sin\,3x = 3\,sin\,x-4\,sin^3 x$ одержимо

$$sin^3 x = \frac{1}{4}(3\,sin\,x - sin\,3x).$$

Застосуємо розвинення

$$sin\,x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Замінюючи x на $3x$, маємо:

$$sin\,3x = (3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Отже,

$$sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3-3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} =$$

$$=\frac{1}{4}\left(+\frac{24}{3!}x^3-\frac{240}{5!}x^5+\frac{2184}{7!}x^7-\ldots+\frac{(-1)^n\left(3-3^{2n+1}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots\right),$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

Приклад 2. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

а) $f(x)=chx$; б) $f(x)=shx$; в) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. Оскільки

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R,$$

то

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots,x\in R.$$

Враховуючи, що обидва ряди збігаються при $-\infty<x<+\infty$, то в інтервалі збіжності $(-\infty,+\infty)$ їх можна почленно додавати та почленно віднімати. Після простих перетворень отримуємо:

а) $chx=\frac{1}{2}\left(\ell^x+\ell^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\ -\infty<x<+\infty.$$

б) $shx=\frac{1}{2}\left(\ell^x-\ell^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right.\right.$

$$\left.\left.+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\left(2x+2\frac{x^3}{3!}+\ldots+2\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};\ -\infty<x<+\infty.$$

в) $f(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[ln(1+x)-ln(1-x)\right].$

Скористаємося розкладом

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\le 1.$$

Замінюючи x на $(-x)$, маємо:

$$ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,\ -1\le x<1.$$

Обидва ряди збігаються при $|x|<1$, тобто в інтервалі $(-1,1)$ їх можна почленно віднімати. Одержуємо:

$$f(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[ln(1+x)-ln(1-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}x^n+\ldots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+2\frac{x^7}{7}+\ldots\cdot 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad -1<x<1.$$

Примітка. Відзначимо цікаві аналогії між рядами Маклорена, здавалось би, зовсім різних функцій:

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\qquad shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\quad \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots,\qquad |x|<1$$

Приклад 3. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

а) $f(x)=\dfrac{6}{1+x-2x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) Розкладемо раціональну функцію $f(x)=\dfrac{6}{1+x-2x^2}$ на суму найпростіших дробів:

$$1+x-2x^2=-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(1-x)(2x+1);$$

$$\frac{6}{(1-x)(1+2x)}=\frac{6}{(1-x)(1+2x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+2x},\qquad A=2;\qquad B=4.$$

Тобто $f(x)=\dfrac{6}{(1-x)(1+2x)}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{4}{1+2x}$.

Маємо $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1. \qquad (1)$$

Замінимо x на $-2x$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+2x}=1-(2x)+(2x)^2-(2x)^3+(2x)^4+\ldots+(-1)^n(2x)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n. \qquad (2)$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (2): $|2x|<1$ або $|x|<\dfrac{1}{2}$.

Отримані ряди (1) і (2) множимо на сталі множники і додаємо. У результаті маємо $\dfrac{6}{(1-x)(1+2x)}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{4}{1+2x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+4\cdot(-1)^n\cdot 2^n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+(-1)^n\cdot 2^{n+2}\right)x^n,\ |x|<\frac{1}{2}.$$

Інтервал збіжності останнього ряду $|x|<\dfrac{1}{2}$, бо інтервал збіжності ряду (1) $|x|<1$, а ряду (2) $|x|<\dfrac{1}{2}$, тобто для $|x|<\dfrac{1}{2}$ збігаються обидва ряди.

б) Подамо раціональну функцію $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$$

Застосуємо розклад
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1, \tag{3}$$

де замінимо x на $x/2$ і отримаємо
$$\frac{1}{1-x/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n,\quad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad \text{або } |x|<2. \tag{4}$$

Враховуючи, що ряд (3) збігається для $|x|<1$, а ряд (4) – для $|x|<2$, маємо, що обидва ряди збігаються для $|x|<1$, тобто в інтервалі $|x|<1$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n,\ \ |x|<1.$$

<u>Приклад 4</u>. Розкласти задані функції в ряд Маклорена:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; в) $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. Для розвинення заданих функцій в ряд Маклорена скористаємося біноміальним рядом:

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot\left[m-(n-1)\right]}{n!}x^n+\ldots,\quad |x|<1.$$

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[1+\left(-x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$

Покладемо $m=-\frac{1}{2}$ і замість x підставимо $-x^2$;

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}x^4+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}x^6+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{1}{n!}x^{2n}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad -1<x<1.$$

б) Перетворимо задану функцію до такого вигляду, що дозволяє застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{8-x^3}=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^3}{8}\right)}=2\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}=2\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Покладемо $m=-\frac{1}{3}$ і замість x запишемо $\left(-\frac{x}{2}\right)^3$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^2+\right.$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right)^3\frac{1}{3!}+\ldots$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{8}+\frac{4}{3^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\quad 3!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n n!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right),\text{ де } \left|\frac{x}{2}\right|<1,\text{ тобто } |x|<2.$$

в) Запишемо функцію як $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}=(1+x)\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\left(1-x\right)^{-2}$ у біноміальний ряд, покладаючи $m=-2$ та замість x підставляючи $\left(-x\right)$:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+(-2)(-x)+(-2)(-3)\cdot\frac{1}{2!}(-x)^2+(-2)(-3)(-4)\cdot\frac{1}{3!}(-x)^3+\ldots+$$

$$+(-2)(-3)(-4)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)\cdot\frac{1}{n!}(-x)^n+\ldots=$$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots,\quad |x|<1.$$

Цей ряд помножимо на $\left(1+x\right)$ і отримаємо шуканий розклад:

$$f(x)=(1+x)\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots\right)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+$$

$$+(n+1)x^n+\ldots+x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+(n+1)x^{n+1}+\ldots=$$

$$=1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\ldots+(2n+1)x^n+\ldots,\ |x|<1.$$

<u>Приклад 5</u>. Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $f\left(x\right)=a^x\left(a>0\right)$; б) $f\left(x\right)=sin\left(\dfrac{1}{1-x^2}-1\right)$; в) $f\left(x\right)=\ell^{\frac{x}{2}}sin2x$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. а) Запишемо задану функцію так:

$$f(x)=a^x=e^{x\ln a}.$$

У розкладі

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty$$

замість x запишемо $x\,ln\,a$ і одержимо:

$$a^x=1+x\,ln\,a+\frac{\left(x\,ln\,a\right)^2}{2!}+\frac{\left(x\,ln\,a\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(x\,ln\,a\right)^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

б) Спочатку розкладемо в ряд Маклорена функцію $\dfrac{1}{1-x^2}-1=\left(1-x^2\right)^{-1}-1$. Для цього скористаємося біноміальним рядом, поклавши $m=-1$ і замість x підставивши $-x^2$. Дістанемо:

$$\frac{1}{1-x^2}-1=1+(-1)\left(-x^2\right)+(-1)(-2)\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\left(-x^2\right)^3+\ldots-1=$$

$$=x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots,\qquad |x|<1.$$

Далі застосуємо розклад для синуса, в який замість x запишемо $x^2+x^4+x^6+x^8+...$, тобто виконаємо підстановку ряду в ряд:

$$sin\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)=\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}...\right)-\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}...\right)^3}{3!}+$$
$$+\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}...\right)^5}{5!}+...=x^2+x^4+x^6-x^6\frac{1}{6}+x^8-\frac{3}{6}x^8+x^{10}-$$
$$-\frac{6}{6}x^{10}+\frac{x^{10}}{120}+...=x^2+x^4+\frac{5}{6}x^6+\frac{1}{2}x^8+\frac{x^{10}}{120}+...,\ |x|<1.$$

в) Для розвинення даної функції в ряд Маклорена необхідно розкласти в ряд Маклорена функції $e^{x/2}$ і $sin2x$:

$$\ell^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!},\quad -\infty<x<+\infty;\ \ sin\ 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ -\infty<x<+\infty$$

і отримані ряди перемножити за наступним правилом:

якщо $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ *для* $|x|<R_1$ *і* $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_nx^n+...$ *для* $|x|<R_2$, *тоді*

$$f(x)\cdot g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+$$
$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+(a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)x^4+...$$

для $|x|<r$, *де* r *– менше з чисел* R_1 *і* R_2.

Тоді $\ell^{\frac{x}{2}}sin2x=\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}+...\right)\times$

$$\times\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+...\right)=2x+x^2-\frac{13}{12}x^3-\frac{5}{8}x^4+...,\ -\infty<x<+\infty.$$

Приклад 6. Розкласти в ряд Маклорена функції

а) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв’язання. а) Відомо, що $\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ скориставшись біноміальним рядом, в якому покладемо $m=-\frac{1}{2}$ і замість x запишемо x^2:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots, \qquad |x|<1.$$

Проінтегруємо цей ряд почленно в межах від 0 до x і отримаємо ряд

$$ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

який збігається при $|x|<1$.

б) Функцію $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ розкладемо в ряд за степенями x, використовуючи біноміальний ряд, в якому покласти $m=-2$ і замість x взяти $-x$.

Спочатку одержимо степеневий ряд :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots, \qquad (-1<x<1).$$

Диференціюючи цей ряд почленно, маємо

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

Але $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, тоді шуканий розклад $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Інтервал збіжності отриманого ряду так само $(-1,1)$.

<u>Приклад 7</u>. Розкласти в ряд Тейлора функції:

а) $f(x)=sin\dfrac{\pi x}{4}$ за степенями $(x-2)$;

б) $f(x)=1/x$ за степенями $(x-3)$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. а) **Спосіб I**. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(a)$, $n=0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots, \text{ де } a=2,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f^{I}(x)=cos\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 1\right),$$

$$f^{II}(x)=-\frac{\pi^{2}}{4^2}\,sin\frac{\pi x}{4}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$f^{III}(x)=-\frac{\pi^{3}}{4^3}\,cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$f^{IV}(x)=\frac{\pi^{4}}{4}\,sin\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$f^{V}(x)=-\frac{\pi^{5}}{4^5}\,cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right),$$

....

$$f(2)=sin\frac{\pi\cdot 2}{4}=sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$f^{I}(2)=\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}sin\,\pi=0,$$

$$f^{II}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\frac{3}{2}\pi=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

$$f^{III}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\,2\pi=0,$$

$$f^{IV}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

$$f^{V}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

....

$$f^{(2k)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\cdot(-1)^k,$$

$$f^{(2k+1)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k=1} sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Підставляємо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і маємо:

$$sin\frac{\pi x}{4}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+....$$

Оскільки $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\left(\frac{\pi}{4}\right)^n sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right|\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n<1$, то похідні функції $f(x)$ обмеженні в сукупності на всій числовій осі. Тому ряд Тейлора збігається до $f(x)$ на всій осі.

Отже, розвинення в ряд $sin\frac{\pi x}{4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}$ справедливе при $-\infty<x<+\infty$.

Спосіб II. Спочатку подамо функцію $f(x)$ через нову змінну $z=x-2$:

$$sin\frac{\pi x}{4}=sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right].$$

Потім скористаємося розкладом $cos\,x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)'}$, $-\infty<x<+\infty$, в який замість x запишемо $(x-2)\cdot\frac{\pi}{4}$. Дістанемо:

$$cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Цей ряд збігається до $f(x)=sin\frac{\pi x}{4}$ при $-\infty<\frac{\pi}{4}(x-2)<+\infty$, тобто при $-\infty<x<+\infty$. Отже,

$$sin\frac{\pi}{4}x=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+...,$$

$-\infty<x<+\infty$.

б) **Спосіб I**. Знаходимо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(a)$ при $a=3$:

$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\qquad f(3)=\frac{1}{3}$,

$f^{I}(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}$, $\qquad f^{I}(3)=-\frac{1}{3^2}$,

$f^{II}(x)=2\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3}=\frac{1\cdot 2}{x^3}$, $\qquad f^{II}(3)=\frac{1\cdot 2}{3^3}$,

$f^{III}(x)=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\qquad f^{III}(3)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^4}$,

$f^{IV}(x)=24x^{-5}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$, $\qquad f^{IV}(3)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^5}$,

… … … … … … … … … … … … …

$f^{(n)}(x)=(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $\qquad\qquad f^{(n)}(3)=\dfrac{n!(-1)^n}{3^{n+1}}$,

… … … … … … … … … … … … ….

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ a=3$$

і дістанемо: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}-\cdot\dfrac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3)+\dfrac{1\cdot 2}{2!3^3}(x-3)^2-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3!3^4}(x-3)^3+$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4!3^5}(x-3)^4+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!3^{n+1}}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{3^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження останнього ряду на збіжність:

$$|U_n|=\left|\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\right| \quad |U_{n+1}|=\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|}{3^{n+2}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}3^{n+1}}{3^{n+2}(x-3)^n}\right|=$$

$=\dfrac{|x-3|}{3}<1;\quad |x-3|<3;\quad -3<x-3<3;\quad 0<x<6$ – інтервал збіжності.

Дослідимо збіжність на кінцях цього інтервалу.

При $x=0$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}+\ldots$$

При $x=6$ маємо числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ldots$

Обидва ряди розбіжні, тому що не виконується необхідна ознака збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Отже, областю збіжності останнього ряду є інтервал $(0,6)$.

Спосіб II. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x-3)+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$. Скористаємося рядом

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\quad |x|<1,$$

в який замість x запишемо $\dfrac{x-3}{3}$. Маємо:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-3}{3}+\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n+\ldots\right)=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+$$
$$+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\frac{(x-3)^3}{3^4}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+\ldots$$

Інтервал збіжності: $\left|\frac{x-3}{3}\right|<1;\quad |x-3|<3\quad -3<x-3<3\quad 0<x<6$.

Бачимо, що відповіді однакові.

<u>Приклад 8</u>. Розкласти задану функцію $f(x)=\frac{1}{4-x}$ в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ та знайти його інтервал збіжності.

<u>Розв'язання</u>. Перетворимо задану функцію так, щоб можна було застосувати формулу: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$; $-1<x<1$. (1)

Перетворимо задану функцію: $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$; замінимо x на $\frac{x-2}{2}$ у формулі (1), тоді дістанемо:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1.$$

Отриманий ряд збігається при $|x-2|<2$. Звідки $0<x<4$.

<u>Приклад 9</u>. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=sec\,x$ та знайти його область збіжності.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо $sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$, тоді $sec\,x\cdot cos\,x=1$

Нехай $sec\,x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$.

За правилом множення збіжних рядів маємо:

$$1=sec\,x\cdot cos\,x=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)=a_0\cdot 1+a_1\cdot 1\cdot x+\left(a_2+a_0\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^2+$$
$$+\left(a_3\cdot 1+a_1\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^3+\left(a_4\cdot 1+a_0\cdot\frac{1}{4!}+a_2\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^4+$$
$$+\left(a_5\cdot 1+a_3\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_4\cdot\frac{1}{4!}\right)x^5+\left(a_6\cdot 1+a_2\cdot\frac{1}{4!}+a_4\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_0\left(-\frac{1}{6!}\right)\right)x^6+\ldots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

x^0	$a_0 \cdot 1 = 1,$	звідки	$a_0 = 1$
x^1	$a_1 \cdot 1 = 0,$	звідки	$a_1 = 0$
x^2	$a_0 \cdot \left(\frac{-1}{2!}\right) + a_2 \cdot 1 = 0$	звідки	$a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$
x^3	$a_3 \cdot 1 + a_1\left(-\frac{1}{2!}\right) = 0$	звідки	$a_3 = 0$
x^4	$a_4 \cdot 1 + a_0 \frac{1}{4!} + a_2\left(-\frac{1}{2!}\right) = 0$	звідки	$a_4 = -\frac{1}{4!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{5}{2!} = \frac{5}{4!}$
x^5	$a_5 \cdot 1 + a_1 \frac{1}{4!} + a_3\left(-\frac{1}{2!}\right) = 0$	звідки	$a_5 = 0$
x^6	$a_6 \cdot 1 + a_2 \frac{1}{4!} + a_4\left(-\frac{1}{2!}\right) + a_0\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$	звідки	$a_6 = 1 \cdot \frac{1}{6!} + \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{61}{720} = \frac{61}{6!}$
…	… … … … … … … … … … … …	… …	… … … … … … … …

Тоді шукане розвинення

$$sec\, x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{61}{6!}x^6 + ...,\ x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1),\ n \in Z.$$

2.1.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Розкласти задані функції за степенями x (варіанти №1–№14) чи за степенями $x-a$ (варіанти №15 – №25), використовуючи відомі розклади функцій e^x, $sin\, x$, $cos\, x$, $(1+x)^m$; $ln(1+x)$, $arctgx$ в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь
1	$f(x) = xe^{-2x}$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$
2	$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$
3	$f(x) = e^{-x}(1+x)$	$f(x) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n!} x^n, \quad x(-\infty; +\infty)$

4	$f(x)=\sin\frac{x}{2}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
5	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	$f(x)=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^{2n},$ $x\in(-1;1)$
6	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^{2n+1}n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x\in(-2;2)$
7	$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2n-1}{2^n n!}x^{2n+2},\ x\in(-1;1)$
8	$f(x)=ln(1+2x)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
9	$f(x)=(1+x)\,arctgx$	$f(x)=x+x^2-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{5}-\ldots,\ x\in[-1;1]$
10	$f(x)=\frac{arctgx}{x}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1},\quad x\in[-1;1]$
11	$f(x)=cos^2 x$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
12	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n n!}x^{3n},$ $x\in(-1;1)$
13	$f(x)=sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$	$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}}{2!}x^2-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}x^4+\frac{x^5}{5}-\ldots\right),$ $x\in(-\infty;+\infty)$
14	$f(x)=sin(x^2)$	$f(x)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\ldots$ $x\in(-\infty;+\infty)$
15	$f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x+6)$	$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{6^{n+1}},\ x\in(-12;0)$
16	$f(x)=ln\,x$ за степенями $(x-1)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\le2$

17	$f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$ за степенями $(x-1)$	$\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{3},\ x\in(-2;4)$
18	$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}},\ x\left(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$
19	$f(x)=\dfrac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$	$\dfrac{1}{11}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{\frac{11}{2}}\right)^n,\ \dfrac{5}{2}<x<\dfrac{17}{2}$
20	$f(x)=\dfrac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$	$-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+2}{\frac{2}{3}}\right)^n,\ -\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{4}{3}$
21	$f(x)=cos^2x$ за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n-1},\ x\in(-\infty;+\infty)$
22	$f(x)=ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ за степенями $(x-1)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^{2n}}{n},\ 0<x\leq 2$
23	$f(x)=ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$	$ln8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n(x-1)^n,\ -\dfrac{3}{5}<x\leq\dfrac{13}{5}$
24	$f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$	$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n,\ 0<x\leq 2$
25	$f(x)=e^x$ за степенями $(x+2)$	$e^{-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n!},\ x\in(-\infty;+\infty)$