Лекція 1. Числові ряди

1. Основні поняття. Збіжність та сума ряду

Означення. Числовим рядом називається нескінченна послідовність $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ чисел, з'єднаних знаком додавання:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{1}$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ називаються ***членами ряду***, а член u_n – загальним членом ряду або n – й член ряду.

Ряд (1) вважається заданим, якщо відомий його загальний член $u_n = f(n)$, $n \in N$, тобто задана функція натурального аргументу.

Приклад 1. Записати ряд, загальний член якого $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$.

Підставляючи у формулу загального члена різні значення n, одержимо, що при $n=1$ $u_1 = 2$, $n = 2$ $u_2 = -\dfrac{3}{2}$, $n = 3$ $u_2 = \dfrac{4}{3}$ і т.д. Тоді ряд запишеться так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} = 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots$$

Більш складною є обернена задача: за декількома членами ряду записати ряд, тобто знайти його загальний член.

Приклад 2. Знайти загальний член ряду:

а) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{27} + \dfrac{8}{81} + \ldots$; б) $1 + \dfrac{3}{2\cdot 3} + \dfrac{9}{2^2\cdot 5} + \dfrac{27}{2^3\cdot 7} + \ldots$

а) Неважко переконатися, що для ряду а) загальний член $u_n = \dfrac{2n}{3^n}$, а для ряду б) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

Розглянемо суми

$S_1 = u_1$,

$S_2 = u_1 + u_2$,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$,

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Означення. Сума n перших членів ряду S_n називається n – частковою сумою ряду (1).

Означення. Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S називається ***сумою*** ряду. Записують це так:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S < \infty .$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює $\pm\infty$, то ряд називається ***розбіжним***.

Приклад 3. Дослідити на збіжність геометричний ряд, тобто ряд складений із членів геометричної прогресії зі знаменником q та першим членом a

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Відомо, що сума n членів геометричної прогресії, тобто $n-$часткова сума ряду для $q \neq 1$ дорівнює:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}.$$

Можливі випадки:

1) якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{aq^n}{q-1} - \dfrac{a}{q-1}\right) = \dfrac{a}{1-q}$, тобто ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$;

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, а отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд розбіжний;

3) якщо $q = 1$, то ряд (2) набуває вигляду $a + a + \ldots + a + \ldots$, $n-$частинна сума ряду $S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, тобто ряд розбіжний;

4) якщо $q = -1$, то ряд (2) набуває вигляду $a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$ і $S_n = 0$, якщо $n-$парне, $S_n = a$, якщо $n-$непарне, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Отже, ряд розбіжний.

Таким чином, геометричний ряд збіжний якщо $|q| < 1$ і розбіжний якщо $|q| \geq 1$.

Означення. Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \quad p \in \mathrm{R} \qquad (3)$$

називається ***узагальненим гармонічним рядом (ряд Діріхле)***.

Доведемо пізніше, що при $p > 1$, ряд (3) збіжний, а при $p \leq 1$, ряд (3) розбіжний.

Означення. Числовий ряд (3) для $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (4)$$

називається ***гармонічним рядом*** (кожен його член $a_n = \dfrac{1}{n}$, починаючи з другого, є середнім гармонічним двох сусідніх членів: $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$).

Приклад 4. Знайти суму ряду
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Розв'язування. $n-$часткова сума ряду дорівнює
$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Враховуючи, що
$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Звідси, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, тобто сума ряду $S=1$.

Властивості збіжних рядів

1) Якщо ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ збіжний і має суму S, то ряд $\lambda u_1+\lambda u_2+\ldots+\lambda\, u_n+\ldots$ ($\lambda-$число) також збіжний і має суму λS.

2) Якщо ряди $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ і $v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$ збіжні і мають відповідно суми S_1 і S_2, то ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots$ також збіжний і його сума дорівнює S_1+S_2.

Зауважимо, що властивості 1 і 2 випливають із властивостей границь послідовностей.

Нехай задано числовий ряд
$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}+\ldots \tag{5}$$

Означення. Якщо відкинути n перших членів ряду, то одержимо ряд, який називається **залишком ряду** (1) після n- го члена і позначають r_n, тобто
$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}+\ldots$$

3) Якщо ряд (5) збігається, то збігається і його залишок і, навпаки, якщо збігається залишок, то збігається й ряд (5).

Доведення. Нехай ряд (5) збігається. Розглянемо суму $n+m$ членів ряду:
$$S_{n+m}=S_n+(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m}). \tag{6}$$

Зафіксуємо номер n і нехай $m\to\infty$. Тоді границя S_{n+m} існує за умовою і дорівнює сумі ряду S. Для фіксованого n S_n є стале число, тому границя $(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m})$ при $m\to\infty$ існує і дорівнює r_n.

Отже,
$$S=S_n+r_n. \tag{7}$$

Нехай тепер залишок збігається. Доведемо, що ряд також збігається. У рівності (6) зафіксуємо n та перейдемо до границі при $m\to\infty$. Границя існує тому. Що за умовою залишок збігається, а частинна сума S_n при фіксованому n є постійне число. Отже, границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+m}=S_n+r_n$.

Із рівності (6) випливає: якщо ряд (5) розбігається, то й залишок розбігається, і, навпаки, якщо залишок розбігається, то ряд також розбігається.

Із рівності (7) випливає, що $r_n = S - S_n$, тому при $n \to \infty$ залишок збіжного ряду $r_n \to 0$.

4) Для того, щоб ряд (1) чи (5) збігався, необхідно і достатньо, щоб при $n \to \infty$ залишок ряду прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

2. Необхідна ознака збіжності. Гармонічний ряд

Теорема (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд (1) збіжний, то його загальний член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{8}$$

Доведення. Справді, $u_n = S_n - S_{n-1}$, звідси одержимо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, що й треба було довести.

Наслідок. Якщо границя загального члена ряду (1) при $n \to \infty$ не дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад 5. Перевірити виконання необхідної ознаки для рядів

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n+2}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Розв'язування. а) Із прикладу 4 було доведено, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збіжний, і справді $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, тобто необхідна ознака збіжності виконується;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{5n+2} = \frac{4}{5} \neq 0$, тобто необхідна ознака збіжності не виконується. Отже, ряд розбігається;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна ознака збіжності гармонічного ряду виконується, хоча цей розбігається.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то з цього ще не випливає, що ряд збігається. Слід застосувати інші ознаки – достатні, які ми розглянемо пізніше. Деякі ряди при виконанні умови $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ є розбіжними (наприклад, гармонічний ряд).

3. Ряди з додатними членами

Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів

Ознака порівняння. Нехай задані два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \; u_n > 0 \tag{I}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n\,,\ v_n > 0 \qquad \text{(II)},$$

причому члени одного ряду не перевищують членів іншого:

$$u_n \le v_n \text{ при } \forall\, n. \qquad (9)$$

Тоді: а) якщо збігається ряд (II), то збігається ряд (I);

б) якщо розбігається ряд (I), то розбігається і ряд (II).

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Розв'язання. а) Порівняємо заданий ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

з рядом геометричної прогресії, знаменник якої $q=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Кожний член заданого менше або дорівнює відповідному члену геометричного ряду, який збігається $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$: $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$, $\quad n\in N$.

Отже, ряд збігається.

б) Порівняємо заданий ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n-1)}}+\ldots$$

з гармонічним рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, відкинувши перший член 1, що не вплине на розбіжність ряду. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}>\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n-1)}}>\frac{1}{n},$$

тобто члени даного ряду перевищують члени розбіжного гармонічного ряду, то за ознакою порівняння ряд розбігається.

Зауваження. "Еталонні" ряди, які часто використовують для порівняння:

1) ***геометричний ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – збіжний при $|q|<1$ і розбіжний якщо $|q|\ge 1$;

2) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ – збіжний для $p>1$, розбіжний якщо $p\le 1$;

3) ***гармонічний ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний.

Зауважимо, що для використання ознаки порівняння необхідно підібрати відповідний “еталонний” ряд і довести нерівність (9), для цього часто вимагається перетворення рядів (наприклад, відкидання чи приписування скінченної кількості членів, множення на деяке число). Раціональніше використати граничну ознаку порівняння.

Гранична ознака порівняння. Нехай задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n > 0$. Якщо існує скінченна границя відношення їх загальних членів $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряди одночасно збігаються , або розбігаються.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^3 + 5n - 5}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

Розв’язання. а) Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Вибір такого ряду для порівняння однозначно випливає з того, що при великих n $\frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5} \approx \frac{3n^2}{n^3} = \frac{3}{n}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n}{n^3 + 5n - 5} : \frac{1}{n} \right) = 3 \neq 0$ і гармонічний ряд розбігається, то даний те ж розбігається.

а) Порівняємо даний ряд з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, який є збіжним при $p = \frac{3}{2} > 1$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = 1 \neq 0$, то даний ряд збігається.

Ознака Д’Аламбера. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ існує границя відношення $(n+1)$-го члена до n-го члена:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тоді:

а) якщо $l < 1$, то ряд збігається;

б) якщо $l > 1$, то ряд розбігається;

в) якщо $l = 1$, то ознака не дає відповіді: ряд може збігатися, або розбігатися; для дослідження треба використати інші ознаки.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд: $1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{9}{2^2 \cdot 5} + \frac{27}{2^3 \cdot 7} + \ldots$

Розв’язання. Запишемо $u_n = \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$, $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)}$ і застосуємо до заданого ряду ознаку Д’Аламбера. Тоді

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 2^n(2n+1)}{2^{n+1}\cdot 3^n(2n+3)}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Ряд розбіжний.

Ознака Д'Аламбера зручна практиці тоді, коли загальний член ряду містить показникову функцію або вирази з факторіалами.

Радикальна ознака Коші. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$ існує границя:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k.$$

Тоді: а) якщо $k<1$, то ряд збігається;

б) якщо $k>1$, то ряд розбігається;

в) якщо $k=1$, то ознака не дає відповіді: ряд може збігатися, або розбігатися.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$$

Розв'язання. Застосуємо до заданого ряду радикальну ознаку Коші. Тоді

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ додатні і не зростають, тобто $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_n\geq\ldots$ і нехай $f(x)$ така неперервна і незростаюча функція , що $f(1)=u_1,\quad f(2)=u_2,\ldots,f(n)=u_n,\ldots$

Тоді для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ необхідно і достатньо, щоб збігався невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$.

Коротко запишемо це так:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\begin{cases}A, & \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}u_n-\text{збіжний},\\ \infty, & \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}u_n-\text{розбіжний}.\end{cases}$$

Приклад 10. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Застосуємо цього ряду інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $\frac{1}{x^p}$, яка задовольняє умовам інтегральної ознаки Коші для $x \ge 1$ і дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

1) якщо $p = 1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln 1) = \infty.$$ Інтеграл розбіжний,

Отже, гармонічний ряд розбіжний.

2) якщо $p \ne 1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1) = \begin{cases}1/(p-1), \textit{ якщо } p>1;\\ \infty, \textit{ якщо } p<1.\end{cases}$$

Легко бачити, що якщо $p < 1$, то інтеграл розбіжний, а якщо $p > 1$, то інтеграл збіжний.

Отже, узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ є збіжним, якщо $p > 1$ та розбіжним, якщо $p \le 1$.

4. Збіжність рядів з довільними членами

Означення. Знакозмінним називається ряд, що містить як додатні, так і від'ємні члени.

Наприклад, $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$

До знакозмінних рядів належать ***знакочережні ряди (ряди Лейбніца)***, знаки членів якого строго чергуються. Такий ряд запишемо у вигляді

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \quad u_n > 0, \; n \in N. \qquad (10)$$

Для дослідження рядів (10) на збіжність використовують ознаку Лейбніца.

Ознака Лейбніца. Якщо члени знакопочережного ряду (10) монотонно спадають за абсолютною величиною: $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$

і загальний член прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається, причому сума ряду S не перевищує першого члену ряду.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n(n+1)^2} + \ldots$$

Розв'язання. Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца, оскільки

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \ldots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \ldots$$

і

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Отже, заданий ряд збіжний.

Перейдемо до розгляду загального випадку знакозмінного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad \text{(III)}$$

Запишемо ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad \text{(IV)}$$

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Означення. Знакозмінний ряд (III) називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений із абсолютних величин його членів.

Означення. Знакозмінний ряд (III) називається ***умовно збіжним***, якщо він є збіжним, але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений із абсолютних величин його членів, є розбіжним.

При дослідженні рядів на абсолютну збіжність застосовують ознаки збіжності рядів з додатними членами.

Приклад 12. Дослідити на абсолютну збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$.

Розв'язання. а) Запишемо ряд з абсолютних величин його членів ($\alpha -$довільне число):

$$\frac{|\cos\alpha|}{1} + \frac{|\cos 2\alpha|}{2^2} + \frac{|\cos 3\alpha|}{3^2} + \ldots + \frac{|\cos n\alpha|}{n^2} + \ldots$$

Порівняємо ряд із узагальненим гармонічним рядом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ Маємо, що $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathrm{N}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний.

За ознакою порівняння ряд з абсолютних величин збігається, а це означає, що знакопочережний ряд збігається абсолютно.

б) Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца, оскільки

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots > \frac{1}{7} > \ldots > \frac{1}{2n-1} > \ldots$$

і

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Отже, заданий ряд збіжний. З'ясуємо, як збігається. Дослідимо ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, що складається з абсолютних величин членів заданого ряду. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln|2x-1| \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\ln|2b-1| - \ln 1) = +\infty.$$

Ряд з додатними членами розбігається.

Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Члени заданого ряду

$$2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} + \ldots$$

спадають за абсолютним значенням

$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \ldots > \frac{n+1}{n} > \ldots,$$

але $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$

не задовольняє умовам ознаки Лейбніца.

Отже, заданий ряд розбіжний.

Контрольні запитання

1. Дайте означення числового ряду?
2. Який числовий ряд називається збіжним (розбіжним)? Що таке сума ряду?
3. Сформулюйте основні властивості збіжних рядів?
4. Який числовий ряд називається гармонічним, узагальненим гармонічним та геометричним?
5. За яких значень знаменника q геометричний ряд збігається, а за яких значень знаменника q – розбігається?
6. Чи збіжним є гармонічний ряд? За яких значень p узагальнений гармонічний є збіжним (розбіжним)?
7. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності числового ряду?
8. Сформулюйте достатні ознаки збіжності додатних числових рядів?
9. Дайте означення знакозмінного, знакопочережного числового ряду?
10. Який знакопочережний числовий ряд називається абсолютно збіжним (умовно збіжним)?
11. Сформулюйте ознаку Лейбніца?