Лекція 2-3. Функціональні і степеневі ряди

1. Основні поняття

Означення. Функціональним рядом називається ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (1)$$

членами якого є функції змінної x.

Якщо змінній x надати числового значення $x=x_0$, то отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \qquad (2)$$

Якщо числовий ряд (2) є збіжним, то точка x_0 називається **точкою збіжності ряду** (1). Множина X значень x, для яких функціональний ряд (1) збігається, називається **областю збіжності** цього ряду. Ряд (1) називається ***абсолютно збіжним на множині*** X, якщо збіжним на цій множині є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

На практиці для знаходження області збіжності функціонального ряду (1) користуються ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=l(x)$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=l(x).$$

Отже, для знаходження області збіжності слід розв'язати нерівність $l(x)<1$, а для знаходження області розбіжності – нерівність $l(x)>1$. Для визначення збіжності ряду у точках межі області, де $l(x)=1$, здійснюють додаткове дослідження. Це пов'язано з тим, що ознака Д'Аламбера і радикальна ознака Коші для $l(x)=1$ не дають відповіді на питання збіжний ряд чи ні.

Приклад 1. Знайти область збіжності й область абсолютної збіжності функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx.$

Розв'язання. а) Оскільки для даного ряду

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|x|^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x|},$$

то за радикальною ознакою Коші ряд збігається, якщо $\frac{1}{|x|}<1$, тобто

$$\frac{1}{|x|}<1 \quad\Rightarrow\quad |x|>1 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty),$$

і якщо $\frac{1}{|x|}\geq 1$, то ряд розбігається.

Отже, область збіжності співпадає з областю абсолютної збіжності і множиною $X=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$..

б) Оскільки для даного ряду

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^{n+1}x}{n+1}\cdot\frac{n}{\ln^n x}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\ln x\right|=\left|\ln x\right|,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд збігається, причому абсолютно, якщо $|\ln x|<1$, тобто якщо $e^{-1}<x<e$, і розбігається $|\ln x|>1$, тобто якщо $x\in(0;e^{-1})\cup(e;+\infty)$.

Дослідимо ряд на збіжність у точках $x=e^{-1}$ та $x=e$ (ці точки відповідають випадку, коли $|\ln x|=1$), в яких ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання збіжний чи розбіжний ряд.

При $x=e^{-1}$ числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n e^{-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln e^{-1})^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

збігається, але умовно.

При $x=e$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n e}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається.

Отже, область збіжності ряду даного ряду є інтервал $[e^{-1};e)$, а область абсолютної збіжності ряду – $(e^{-1};e)$.

в) Оскільки для даного ряду

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}\left|\frac{2x-3}{4}\right|=\left|\frac{2x-3}{4}\right|,$$

то за радикальною ознакою Коші ряд збігається, причому абсолютно, якщо $\left|\frac{2x-3}{4}\right|<1$, тобто якщо $-0{,}5<x<3{,}5$, і розбігається $\left|\frac{2x-3}{4}\right|>1$, тобто якщо $x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(3{,}5;+\infty)$.

При $x=-0{,}5$ і $x=3{,}5$ відповідні числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$ розбігаються.

Отже, область збіжності співпадає з областю абсолютної збіжності і множиною $(-0{,}5;3{,}5)$.

г) Оскільки $\forall\, x, x \neq 0$, границя $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$ не існує, а при $x = 0$ не виконується необхідна умова, то ряд не має жодної точки збіжності.

Отже, областю збіжності є порожня множина.

Означення. Сума n членів функціонального ряду (1) називається $n-$ **частковою сумою** $S_n(x)$ **ряду**, тобто

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Функція

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x \in X,$$

називається **сумою ряду**.

Функція

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

називається **залишком ряду** (1) після n-го члена.

2. Степеневі ряди

З усіх функціональних рядів найпростішим і найпоширенішим є степеневі ряди.

Означення. Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{3}$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{4}$$

де $a_n, (n = 0, 1, 2, \ldots) -$ дійсні числа, які називаються ***коефіцієнтами*** степеневого ряду, $x_0 -$ деяке стале число.

Ряд (4) заміною $y = x - x_0$ можна звести до ряду (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Тому нижче розглянемо лише ряди вигляду (3), тобто за степенями x.

Теорема Абеля. Якщо ряд (3) збіжний при $x = x_1$, то він збігається абсолютно для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$.

Якщо ряд (3) розбіжний при $x = x_2$, то він розбігається для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$.

Наслідком із теореми Абеля є наявність для степеневого ряду (3) такого числа $R \geq 0$, що для усіх $|x| < R$ ряд збігається, а для $|x| > R -$ розбігається.

Означення. Сукупність усіх числових значень, для яких ряд (3) збігається називається ***областю збіжності.***

Означення. Число R називається ***радіусом збіжності***, а інтервал $(-R;\, R)$ – ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду (3).

Всередині інтервалу збіжності ряд абсолютно збігається, за його межами – розбігається. Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу $x=-R$ і $x=R$ досліджується для кожного ряду окремо. Тоді областю збіжності степеневого ряду є інтервал збіжності, до якого приєднуються кінці інтервалу $x=\pm R$, якщо в цих точках ряд збіжний.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ складаємо ряд з абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\, a_n x^n \,|$. Далі, використовуючи ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші, отримуємо формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad \text{або} \qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5}$$

Зауваження. У деяких степеневих рядів інтервал збіжності вироджується у точку $(R=0)$, в інших охоплює всю вісь Ox ($R=\infty$).

Зауваження. Радіус збіжності для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ визначається за самими формулами (5), що й для ряду (3), але інтервал збіжності ряду (4) визначають з нерівності $|\, x-x_0 \,|< R$, тобто $(x_0-R;\ x_0+R)$.

Зауважимо, що радіус та інтервал збіжності степеневого ряду можна знаходити, використовуючи безпосередньо ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, складеного з абсолютних величин його членів. У цьому разі члени ряду (3) позначають: $a_n x^n = u_n(x)$. Вказані ознаки застосовують до ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\, u_n(x) \,|$ та знаходять інтервал збіжності з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1.$$

Приклад 3. Знайти області збіжності степеневих рядів:

а) $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; б) $x+2^2x^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$;

в) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{n^2}$.

Розв'язання. а) Радіус збіжності степеневого ряду обчислюємо за першою формулою (5)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

тобто інтервал збіжності $(-1;1)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Якщо $x=-1$ маємо ряд $1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца.

Якщо $x=1$ маємо ряд $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Якщо відкинути перший член (відкидання скінченої кількості членів на збіжність не впливає), то одержимо розбіжний гармонічний ряд.

Отже, областю збіжності ряду є проміжок $[-1;1)$;

б) Радіус збіжності степеневого ряду зручно обчислити за другою формулою (5).

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=0.$$

Радіус збіжності дорівнює нулю, тобто ряд розбіжний для всіх значень $x\in(-\infty;+\infty)$.

в) Радіус збіжності степеневого ряду обчислюємо за першою формулою (5).

Маємо $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

тобто інтервал збіжності $(-\infty;+\infty)$. Ряд збіжний для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

г) ***1-й спосіб.*** Область збіжності степеневого ряду можна знаходити аналогічно тому, як це робилося для функціонального ряду. Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Маємо $u_n(x)=\frac{(x+5)^{2n}}{n^2}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(x+5)^{2n+2}}{(n+1)^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2n+2}n^2}{(x+5)^{2n}(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^2 n^2}{(n+1)^2}\right| = |x+5|^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x+5|^2 .$$

Визначимо, за яких значень x ряд збіжний:

$|x+5|^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+5| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x+5 < 1 \quad \Rightarrow \quad -6 < x < -4.$

Якщо $x=-6$ і $x=-4$, то отримуємо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який збігається $p=2>1$.

Отже, областю збіжності ряду є відрізок $[-6;-4]$.

2-й спосіб. За першою формулою (5) знаходимо радіус збіжності степеневого ряду. Маємо

Маємо $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Тоді з нерівності $|x-x_0| < R$, тобто $|x-5| < 1$, отримуємо $-6 < x < -4$. Збіжність ряду на кінцях інтервалу досліджена вище.

Отже, областю збіжності ряду є відрізок $[-6;-4]$.

Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називається ряд вигляду

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k . \quad (6)$$

Тут $0!=1$, $\quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $\quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} -$ коефіцієнти Тейлора.

Формула Тейлора має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

де $r_n(x) -$ залишковий член, який у формі Лагранжа має вигляд:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Ряд Тейлора (6) при $x_0 = 0$ називають **рядом Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k . \qquad (7)$$

Залишковий член буде має вигляд:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$ можна розкласти у степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Наступні теореми вказують на умови, за яких ряд (6) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладу функції в ряд Тейлора.

Теорема. Для того, щоб ряд (6) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули Тейлора $r_n(x)$ прямував до нуля при $n\to\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$) для всіх x з цього інтервалу.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$ має похідні всіх порядків і існує число $M>0$ таке, що $|f^{(n)}(x_0)|\le M$, $x\in(x_0-R;\ x_0+R),\ n=0,1,2,\ldots$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

Розклад функцій в степеневі ряди здійснюють двома способами.

Перший спосіб – це безпосереднє обчислення коефіцієнтів ряду за допомогою значень похідних функції: $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Другий спосіб – це використання шаблонних рядів елементарних функцій у ряд Маклорена (8)-(18).

Розклади в ряд Маклорена деяких елементарних функцій та відповідні їхні області збіжності:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;+\infty); \tag{8}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\pm\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty); \tag{9}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots, x\in(-\infty;+\infty); \tag{10}$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}x^n+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty); \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}x^n+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty); \tag{12}$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+ \\ +\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1;1); \tag{13}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3\ldots+x^n+\ldots,\qquad x\in(-1;1); \tag{14}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\quad x\in(-1;1); \tag{15}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\pm\ldots,\qquad x\in(-1;1]. \tag{16}$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots,\quad x\in[-1;1]; \tag{17}$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)!!}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad x\in(-1;1). \tag{18}$$

Приклад 4. Розвинути у ряд за степенями x функцію $f(x)=e^x$.

Розв'язання. а) Для розкладу в ряд (7) (ряд Маклорена) функції $f(x)=e^x$ необхідно знайти її похідні в точці $x_0=0$. Маємо

$$f^{(k)}(x)=e^x \quad \forall\, k\in \mathrm{N} \ \text{ і } \ f^{(k)}(0)=e^0=1.$$

За формулою (7) запишемо:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Щоб упевнитися, що даний ряд має сумою функцію $f(x)=e^x$, дослідимо залишковий член

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Бачимо, що при $|x|<M$, $M-$довільне число,

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta M}\cdot M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Але ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ збіжний при будь-якому M (див. приклад 3в)).

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}=0$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, тобто функція розвивається у ряд: $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Приклад 5. Розвинути у ряд Тейлора або Маклорена функції у вказаних точках:

а) $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$; б) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-x}}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\ln x$, $x_0=2$;. г) $f(x)=2^x$, $x_0=0$.

Розв'язання. а) Замінимо у формулі (8) x на $-x^2$, отримаємо

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

б) Запишемо $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-x}}$ у вигляді:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-x}=\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Для розкладу функції у ряд Маклорена використаємо формулу (16), в якій для першого доданку функції замінимо x на $2x$, для другого – x на $-x$, а потім отримані ряди віднімемо.

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\ldots\right)=$$

$$=x-x^2+\frac{4x^3}{3}-\ldots-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\ldots=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x^3+\ldots$$

в) Запишемо $f(x)=\ln x$ у вигляді:

$$f(x)=\ln x=\ln(x-2+2)=\ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right).$$

У розкладі (16) функції $\ln(1+x)$ замінимо x на $\dfrac{x-2}{2}$ і до результату додаємо $\ln 2$. Отримаємо

$$\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2^2\cdot 2}+\frac{(x-2)^3}{2^3\cdot 3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-2)^n}{2^n\cdot n}+\ldots$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$-1<\frac{x-2}{2}\le 1,\qquad -2<x-2\le 2,\qquad 0<x\le 4.$$

Отже, область збіжності ряду є проміжок $(0;4]$.

г) Використаємо формулу (8), попередньо записавши функцію $f(x)=2^x$ у вигляді:

$f(x)=2^x=e^{x\ln 2}$.

Тоді

$$2^x=e^{x\ln 2}=1+x\ln 2+\frac{(x\ln 2)^2}{2!}+\frac{(x\ln 2)^3}{3!}+\ldots=$$
$$=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\ln^3 2}{3!}+\ldots+\frac{x^n\ln^n 2}{n!}+\ldots$$

Зауваження. Щоб отримати розклади у ряд Маклорена функцій, що добутком або часткою інших функцій, наприклад

$$x^3\sin^2 x,\qquad x^2\cos 4x,\qquad x^4\sqrt[3]{8+x^3},\qquad \sqrt{x}\,e^{-x^3},$$
$$\frac{1+\cos x}{x},\qquad \frac{\sin x}{x},\qquad \frac{\ln(1+6x)}{5x},\qquad \frac{\operatorname{arctg} x}{5x},\qquad \frac{x^5}{\sqrt{2-x^4}},$$

то записують розклади у ряд функцій, використовуючи формули (8)-(18), а потім виконують множення або ділення на x^k.

Степеневі ряди застосовують для наближених обчислень значень, границь і похідних функції, а також для обчислення визначених інтегралів та розв’язанні диференціальних рівнянь. Розглянемо застосування степеневих рядів для обчислення визначених інтегралів.

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, який не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. У припущенні, що підінтегральна функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд, який рівномірно збіжний на деякому відрізку, що містить відрізок інтегрування функції $f(x)$, то для обчислення визначеного інтегралу необхідно:

1) підінтегральну функцію розкласти у ряд;
2) проінтегрувати її почленно, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца;
3) визначити, яку кількість членів ряду потрібно залишити для необхідної точності обчислення. Оцінити похибку обчислень найпростіше у тому разі, якщо отриманий ряд є знакопочережним збіжним рядом. Згідно з ознакою Лейбніца, сума всіх відкинутих членів ряду (що є похибкою обчислення), не перевищує за абсолютною величиною першого члена, тобто $|r_n(x_0)|<u_{n+1}$. Для знакозмінних та знакододатних рядів оцінка похибки є складнішим завданням. Для цього потрібно оцінити величину

залишку ряду, використовуючи одну із форм залишкового члена формули Тейлора.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ з точністю до $0{,}0001$.

Розв'язання. Даний інтеграл не обчислюється в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію розкладемо у степеневий ряд (замінивши у формулі (9) x на x^2) і перевіримо, чи належить відрізок інтегрування області збіжності цього ряду. Маємо

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots$$

і за ознакою Д'Аламбера знаходимо область збіжності степеневого ряду.

$$a_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{4n+2}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^2\cdot 0 = 0.$$

Отже, область збіжності степеневого ряду: $(-\infty;+\infty)$, причому відрізок інтегрування $[0;1]$ належить області збіжності цього ряду. Отримуємо

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} + \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \ldots$$

Отримали знакопочережний ряд числовий ряд. Тоді число членів ряду, яке гарантує задану точність, визначаємо з нерівності

$$\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} < 10^{-4}.$$

Для $n = 2$ маємо, що

$$\frac{1}{11\cdot 5!} > 10^{-4}.$$

Для $n = 3$ маємо, що

$$\frac{1}{15\cdot 7!} < 10^{-4}.$$

У даному разі достатньо взяти перші три члени ряду:

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} = 0{,}3102,$$

причому

$$\left| \int_0^1 \sin x^2\, dx - 0{,}3102 \right| < 10^{-4}.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ з точністю до $0{,}001$.

Розв'язання. Використаємо ряд Маклорена (10) функції $\cos x$. Маємо

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{x^2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1} \cdot (2n)!} + \ldots$$

Число членів ряду, яке гарантує точність $0{,}001$, визначаємо з нерівності:

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1} \cdot (2n)!} < 10^{-3}.$$

Для $n = 2$ маємо, що

$$\frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} = \frac{1}{576} > 10^{-3}.$$

Для $n = 3$ маємо, що

$$\frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} = \frac{1}{115200} < 10^{-3}.$$

У даному разі достатньо взяти перші два члени ряду:

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \approx \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{576} = 0{,}2482,$$

причому

$$\left| \int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx - 0{,}2482 \right| < 10^{-3}.$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення функціонального ряду?
2. Що таке область збіжності функціонального ряду?
3. Дайте означення степеневого ряду?
4. Що таке область збіжності степеневого ряду?
5. Як знаходять радіус збіжності степеневого ряду?
6. Який ряд називається рядом Тейлора; рядом Маклорена?
7. Які умови розкладу функції в ряд Тейлора?
8. Наведіть формули розкладу функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ у ряд Маклорена?