**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Львівський національний університет імені Івана Франка**

**Механіко-математичний факультет**

**Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики**

**Затверджено**

На засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Львівського національного університету

імені Івана Франка

(протокол № 1 від 31.08.2020 р.)

Зав. кафедри д. е. н., проф. Оліскевич М. О.

**Силабус з навчальної дисципліни**

**«Математичний аналіз ІІ»,**

**що викладається в межах ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів зі спеціальності**

**113 «Прикладна математика», Спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка**

**Львів 2020**

|  |  |
| --- | --- |
| **Назва дисципліни** | Математичний аналіз ІІ |
| **Адреса викладання дисципліни** | Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, м. Львів, Україна, 79000 |
| **Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна** | Механіко-математичний факультет  Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики |
| **Галузь знань, шифр та назва спеціальності** | Галузь знань: 11 Математика і статистика  Спеціальність: 113 Прикладна математика  Спеціалізації: Математичне моделювання та комп'ютерна механіка |
| **Викладачі дисципліни** | Червінка Костянтин Андрійович, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри МЕЕФСМ |
| **Контактна інформація викладачів** | kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua  https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/chervinka-k-a, кафедра МЕЕФСМ, ЛНУ імені Івана Франка, Львів, вул. Університетська, 1 |
| **Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються** | Консультації в день проведення лекцій/практичних. Також можливі он-лайн консультації через Zoom, Skype і т.д. Для погодження часу он-лайн консультацій слід писати на електронну пошту викладача |
| **Сторінка дисципліни** | https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyj-analiz-ii-funktsiji-bahatoh-zminnyh-dlya-mehanikiv |
| **Інформація про дисципліну** | Курс містить матеріал, що стосується диференціального та інтегрального числення функції багатьох змінних, включаючи кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли, інтеграли залежні від параметра, теорії рядів Фур’є та перетворення Фур’є, теорії поля та векторного аналізу. |
| **Коротка анотація дисципліни** | Дисципліна «Математичний аналіз ІІ» є нормативною дисципліною зі спеціальності Прикладна математика для освітньої програми «Матема­тичне моделювання та комп'ютерна механіка», яка викладається протягом другого року навчання в першому семестрі в обсязі 4 кредитів (за Євро­пейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS). |
| **Мета та цілі дисципліни** | Метою нормативної навчальної дисципліни“Математичний аналіз ІІ” є оволодіння студентами класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної мате­матики, їх використання в подальших курсах з математики та механіки, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів |
| **Література для вивчення дисципліни** | *Основна література:*   1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.В. Математичний аналіз. Київ: Знання, 2008 2. Заболоцький М.В., Фединяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практи­кум з математичного аналізу. Львів: Вид.центр ЛНУ ім.Ів.Франка, 2009. 3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа.в 2-х чч. М: Наука, 1971,1973. 4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1979. 5. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу чч.1,2. М.: Наука, 1984, 1986.   *Додаткова література*   1. Рудин У. Основи математического анализа. М.Мир.1976. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х томах. М.:Наука,1970. 3. Давидов А.Б. Курс математичного аналізу: в 2-х чч. К.Вища школа. 1990, 1991, 1992. |
| **Обсяг курсу** | 64 години аудиторних занять. З них 32 годин лекційних занять, 32 годин лабораторних занять та 56 години самостійної роботи. |
| **Очікувані результати навчання** | Після завершення цього курсу студент буде :   * Знати   основні поняття математичного аналізу, зокрема: розвинення елементарних функцій в степеневі ряди та ряди Фур’є; диференціювання функцій багатьох змінних та їх властивості, дослідження функцій на екстремум і умовний екстремум, означення і властивості кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів, їх зв’язок, властивості інтегралів залежних від параметру, означен­ня та властивості перетворення Фур’є;   * Вміти   розвивати функції в степеневі ряди та ряди Фур’є, досліджувати функції бага­тьох змінних на диференційованість, екстремум, умовний екстремум, обчис­лювати кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, досліджувати на збіжність невластиві інтеграли залежні від параметру, знаходити основні характерис­ти­ки скалярних та векторних полів, працювати із функціями та їх графіками, заданими у прямокутних, криволінійних, зокрема полярній, циліндричній та сферичній системах координат. |
| **Формат курсу** | Очний, дистанційний |
| **Теми** | **Теми та плани лекцій**  **Другий курс**  **Ряди Фур’є.**  Ортогональні системи функцій. Теорема про екстремальну властивість коефіцієнтів Фур’є. Нерівність Беселя. Повні системи функцій. База векторів в нормованому просторі.  Означення тригонометричного ряду Фур’є. Достатні умови збіжності ряда Фур’є в точці. Терема Вейєрштраса про апроксимацію. Зв'язок між гладкістю функцій та наявністю спадання її коефіцієнтів Фур’є. Теорема про повноту тригонометричної системи. Рівність Парсеваля. .  **Диференціальне числення функцій багатьох змінних.**  Поняття метричного простору. Відкриті і замкнені підмножини метрич­ного простору. Властивості компактів в **Rn**. Зв’язність. Лінійна зв'язність лінійної підмножини в **Rn**. Повні метричні простори.  Неперервні відображення метричних просторів. Границя відображення. Критерій Коші існування границі. Неперервність в точці. Локальні влас­ти­вості неперервних відображень. Образ компакта при неперервному відображенні. Теорема Больцано-Коші про проміжне значення. Теорема Вейєрштраса. Теорема Кантора про рівномірну неперервність. Диферен­ційовані відображення **Rm** в **Rn**. Норма в **Rm**. Евклідова структура в **Rm** Диференційовність відображення в точці. Зв'язок між диференціалом і частинними похідними відображення в точці. Матриця Якобі. Частинні похідні вищих порядків. Формули Тейлора ФБЗ. Необхідна та достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра.  **Неявно задані функції та умовний екстремум**  Необхідна умова локального екстремуму. Дотична площина і дотичний вектор до графіка функції. Теорема про неявну функцію.  **Кратні інтеграли.**  Властивості мір *n*-вимірних проміжків. Означення інтеграла Рімана. Критерій Коші інтегрованості функції за Ріманом. Необхідна умова інтегровності функції за Ріманом. Достатня умова інтегровності функції. Нижня і верхня суми Дарбу. Інтеграл Дарбу. Теорема Дарбу. Критерій Дарбу інтегровності функції.  Означення інтеграла по множині. Міра Жордана множини. Множини вимірні за Жорданом. Критерій Лебега існування інтеграла по допустимій множині. Лінійність інтеграла. Адитивність інтеграла. Теорема про середнє для інтеграла. Теорема про заміну змінної в кратному інтегралі.  Вичерпання множини. Означення збіжності невластивого інтегралу.  **Криволінійні інтеграли.**  Означення та теореми існування криволінійних інтегралів I та II родів. Фізичний зміст та властивості. Формула Гріна. Критерій незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування в довільній та однозв’язній областях.  **Поверхневі інтеграли.**  Означення поверхні. Гладкі поверхні. Дотична площина та нормаль. Орієнтація гладких поверхонь. Формула для обчислення площі поверхні. Означення та властивості поверхневих інтегралів першого та другого родів. Фізичний зміст. Формули Гауса-Остроградського та Стокса.  **Елементи векторного аналізу і теорії поля.**  Диференціальні оператори **grad, rot, div, .** Векторний запис класичних інтегральних формул.. Поняття потенціального і соленоїдального полів. Критерій потенціальності і соленоїдальності поля  **Інтеграли, залежні від параметру.**  Теорема про комутування двох граничних переходів.  ***Властиві інтеграли залежні від параметру.***  Неперервність інтегралів залежних від параметру. Диференцювання інтегралів залежних від параметру. Інтегрування інтегралів залежних від параметру.  ***Невластиві інтеграли залежні від параметру.***  Рівномірна збіжність невластивих інтегралів залежних від параметру. Граничний перехід під знаком інтегралу залежного від параметру. Неперервність невластивих інтегралів залежних від параметру. Диференціювання невластивих інтегралів залежних від параметру. Інтегрування невластивих інтегралів залежних від параметру.  ***Ейлерові інтеграли.***  Бета-функція. Гама-функція. Формула пониження. Формула Ейлера-Гауса. Формула доповняння. Зв'язок між бета- і гама-функціями.  **Перетворення Фур’є.**  Означення перетворення Фур’є та інтегралу Фур’є. Теорема про власти­во­сті перетворення Фур’є. Достатні умови зображення функції інтегралом Фур’є. Обернене перетворення Фур’є. Зв'язок між гладкістю функції та швидкістю спадання її перетворення Фур’є. Простір швидкоспадних функцій  **Теми лабораторних робіт.**  Тема 1: Ряди Фур’є.  Тема 2: Границя функції багатьох змінних. Неперервність та диференційованість функцій. Похідні композиції функцій.  Тема 3: Похідна за напрямком. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора.  Тема 4: Неявно задані функції. Диференціювання неявно заданих функцій.  Тема 5: Екстремуми функцій багатьох змінних. Умовний та абсолютний екстремум. Задачі на екстремум.  Тема 6: Означення подвійного інтеграла. Зведення до повторних  Тема 7: Заміна змінних в подвійному інтегралі.  Тема 8: Обчислення об’ємів та площ поверхонь. Потрійні інтеграли.  Тема 9: Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.  Тема 10: Обчислення криволінійних інтегралів другого роду. Формула Гріна.  Тема 11: Поверхневі інтеграли. Формула Стокса.  Тема 12. Формула Остроградського. Елементи теорії поля.  Тема 13: Властиві інтеграли залежні від параметра. Диференціювання та інтегрування. Області збіжності.  Тема 14: Рівномірна збіжність невластивих інтегралів. Диференціювання та інтегрування невластивих інтегралів.  Тема 15: Інтеграли Ейлера. Диференціювання та інтегрування інтегралів Ейлера. |
| **Підсумковий контроль, форма** | екзамен в кінці семестру |
| **Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)** | Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співідношенням:  Протягом семестру відбувається 3 контрольні роботи, кожна з яких оцінюєть-ся в 10 балів, та письмовий колоквіум – 20 балів. Разом за семестр студент може отримати 50 балів. Іспит оцінюється в 50 балів.  Максимальна кількість балів 100  Очікується, що протягом семестру студенти виконають 3 контрольних роботи та напишуть письмовий колоквіум. Ці роботи є допуском до складання іспиту. Головна їх мета – перевірка самостійної роботи студентів в процесі навчання, виявлення ступеня засвоєння ними теоретичних положень курсу. При розв’язанні задач необхідно детально вказувати, яким саме був хід роздумів, які формули було використано. Списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахуванння, незалежно від масштабів плагіату чи обману.  **Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі зайняття курсу. Студенти мають інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов’язані дотримуватися усіх строків визначених для виконання усіх видів робіт, передбачених курсом.  Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.  При цьому обов’язково враховуються присутність на заняттях та актив­ність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов’язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.  Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються. |
| **Питання до заліку чи екзамену.** | ***І. Ряди Фур’є.***   1. Нескінченновимірні лінійні евклідові простори. Приклади ортонормованих систем. 2. Означення ряду Фур’є. 3. Екстремальна властивість ряду Фур’є. 4. Замкнені системи. Рівність Парсеваля. Єдиність ряду Фур’є. 5. Збіжність в середньому. Зв’язок з рівномірною збіжністю. 6. Нерівність Бесселя для коефіцієнтів ряду Фур’є. 7. Означення повної системи. Зв’язок між повними та замкнутими системами. 8. Тригонометричний ряд Фур’є. Наслідки з замкненості тригонометричної системи. 9. Найпростіші достатні умови розвинення в тригонометричний ряд Фур’є. Почленне диференціювання рядів Фур’є.   ***ІІ. Функції багатьох змінних.***   1. Простір **R**n .Границя послідовності точок, властивості границь. 2. Відкриті та замкнені множини в **R**n,, властивості. Компакт. 3. Функції багатьох змінних, їх границі та властивості. Неперервність. 4. Теорема Вейєрштраса про неперервність функцій на компакті. 5. Аналог теореми Больцано-Коші, теорема Кантора, рівномірна неперервність. 6. Часткові похідні та диференціал функції. 7. Зв’язок між неперервністю, диференційованістю та існуванням частинних похідних. Приклади. 8. Теорема про часткові похідні від композиції функцій. Диференційованість складної функції. 9. Похідна за напрямком. Терема існування. Градієнт. 10. Часткові похідні вищих порядків. Рівність мішаних похідних. 11. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних. 12. Означення точки локального екстремуму. Необхідна умова точки екстремуму. 13. Достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра.   ***ІІІ. Неявно задані функції.***   1. Неявно задані функції, їх існування. 2. Обчислення часткових похідних неявно заданих функцій. Похідна оберненої функції. 3. Теорема існування неявно заданих функцій , що задані системою. 4. Поняття умовного екстремуму, необхідна та достатня умови.   ***IV. Кратні інтеграли.***   1. Означення подвійного інтегралу, необхідна умова інтегрованості. 2. Суми Дарбу. Критерій інтегрованості. Класи інтегрованих функцій. 3. Зведення подвійного інтегралу до повторного. 4. Основні властивості подвійних інтегралів. 5. Заміна змінних. Геометричний зміст модуля і знаку якобіану. 6. Потрійні інтеграли, сферична та циліндрична системи координат. 7. Невластиві кратні інтеграли. Критерій збіжності для невід’ємних функцій. Ознака порівняння. 8. Cтатичні моменти фігури. Центр ваги. ІІ-га теорема Гульдена.   ***V. Метричні простори.***   1. Означення метричного простору, приклади. Означення кулі, околу, внутрішньої точки. Відкриті та замкнені множини, їх властивості. 2. Збіжність в метричних просторах. Компакти. Необхідна та достатня умови компакту. 3. Неперервні відображення в метричних просторах. 4. Повні метричні простори. Критерій повноти. Теорема про нерухому точку. Лінійні нормовані простори. Банахів простір. Приклади. 5. Евклідові простори. Теорема про повноту скінченновимірного евклідового простору. Лінійні оператори в нормованих просторах. Норма лінійного оператора. Відображення з Rn  в Rm. 6. Відображення з ненульовим якобіаном (принцип збереження області, теорема про обернену функцію).   ***VІ. Криволінійний інтеграл.***   1. Означення та теореми існування криволінійного інтегралу першого роду. 2. Означення та теорема існування криволінійного інтегралу другого роду. Фізичний зміст та властивості. 3. Формула Гріна. 4. Критерій незалежності криволінійного інтегралу другого роду від шляху інтегрування. 5. Критерій незалежності криволінійного інтегралу 2-го роду від шляху інтегрування в однозв'язній області.   ***VІІ. Поверхневі інтеграли.***   1. Означення поверхні, гладкі поверхні. Дотична площина та нормаль. 2. Площа поверхні. Формула до обчислення площ. 3. Орієнтація гладких поверхонь. Операція склеювання поверхонь. 4. Поверхневий інтеграл 1-го роду. (Властивості. Фізичний зміст) 5. Поверхневий інтеграл 2-го роду.   ***VІІІ. Елементи теорії поля.***.   1. Основні характеристики векторних полів. 2. Плоско-паралельне векторне поле. Необхідна і достатня умови потенціальності. 3. Теорема Гауса-Остроградского. Геометричний зміст дивергенції. 4. Формула Стокса. Геометричний зміст ротора. 5. Соленоїдальне векторне поле. 6. Потенціальні векторні поля.   ***ІX. Інтеграли залежні від параметра.***   1. Рівномірна збіжність по одній змінній функції двох змінних. Зв'язок з рівномірно збіжними функціональними послідовностями. 2. Неперервність та інтегровність властивого інтегралу залежного від параметру. 3. Диференційовність властивого інтегралу залежного від параметру.   ***X. Невластиві інтеграли залежні від параметра.***   1. Рівномірна збіжність невластивого інтегралу залежного від параметру. Критерій Коші рівномірної збіжності. 2. Ознака Вейєрштраса рівномірної збіжності. 3. Ознака Діріхле та Абеля. 4. Терема про граничний перехід під знаком невластивого інтегралу. 5. Неперервність невластивого інтегралу та наслідки. 6. Інтегровність невластивого інтегралу залежного від параметру. 7. Диференційовність невластивого інтегралу залежного від параметру. 8. Інтегровність невластивого інтегралу залежного від параметру по нескінченому проміжку. 9. Інтеграли Діріхле та Пуассона 10. Гама функція та її властивості. 11. Бета функція та її властивості. 12. Зв'язок між гама та бета функціями.   ***XІ. Перетворення та інтеграл Фур'є.***   1. Інтеграл Фур'є, його властивості. 2. Достатні умови зображення функції інтегралом Фур'є. 3. Перетворення Фур'є та його властивості. 4. Обернена формула перетворення Фур'є. |
| **Опитування** | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу. |