Вправи для семінарських занять

1. 1.1. Обчислити $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, якщо:
а) $A=[-2;6)$, $B=[3;8)$; б) $A=[-5;3)$, $B=[1;5)$;
в) $A=[-2;4]$, $B=(-4;1)$; г) $A=(-6;2)$, $B=[-1;5)$.

1.2. Обчислити $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times B$, $B\times A$, якщо:
а) $A=[-2;4)\bigcap\mathbf{N}$, $B=(-1;2]\bigcap\mathbf{Z}$; б) $A=[-4;2]\bigcap\mathbf{N}$, $B=(-1;4)\bigcap\mathbf{Z}$;
в) $A=(-5;4]\bigcap\mathbf{N}$, $B=(-2;0]\bigcap\mathbf{Z}$; г) $A=[-1;2]\bigcap\mathbf{N}$, $B=(0;4]\bigcap\mathbf{Z}$.

1.3. Для лікування деякої хвороби є чотири препарати L_1, L_2, L_3, L_4. Хворобу лікують застосуванням хоча б двох цих ліків. Припустимо, що послідовність, у якій призначають ліки, не є суттєвою. Виписати усі можливі різні способи лікування цієї хвороби за допомогою цих препаратів.

1.4. В експерименті 300 добровольців дотримувались дієти протягом двох місяців. Після першого місяця 240 з них втратили понад 10 кілограмів, а 100 – понад 15 кілограмів. Після другого місяця 260 досліджуваних втратили більше 10 кілограм, а 150 – більше 15 кілограм. Припускаючи, що ні один з них не поправився, коли дотримувався дієти, описати співвідношення між цими чотирма множинами.

1.5. Нехай $A=\{\textit{мужчини в популяції}\}$, $B=\{\textit{жінки в популяції}\}$, $C=\{\textit{діти в популяції}\}$. Описати такі множини $A\times B$, $A\times C$, $B\times C$.

1.6. З потоку 1000 студентів, які вивчають природничі науки, 630 студентів відвідують лекції хоча б з одного курсу біології, 390 – з хімії і 720 – з математики. Відомо, що 440 студентів відвідують і біологію, і математику, 250 – математику і хімію, 200 – біологію і хімію. Крім того, 130 студентів відвідують лекції з усіх трьох предметів. Визначити скільки студентів не відвідують ні математики, ні біології, ні хімії; скільки відвідують лише один з трьох предметів; скільки студентів відвідують тільки два предмети?

1.7. Вивчаючи групи крові, було обстежено 10000 осіб. У 5500 з них було виявлено аглютиноген А, у 2500 – аглютиноген В, у 3000 цих аглютиногенів не виявлено. Позначимо А, В, О як три відповідні множини осіб. Описати словами такі множини $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\bigcap O$, $(A\bigcup B)\cap O$, $\overline{A}$, $\overline{A}\bigcap B$. Визначити, скільки осіб мають два аглютиногени А і В?

1.8. При вивченні ефекту впливу куріння на рак легень велика група дорослих осіб поділялась на курців і некурців. Ті, що курять, поділялись далі на тих, які курять мало, помірно і багато. Вся група досліджуваних також ділилась на тих, у кого є рак легень, тих, у кого раку немає. Також вся група ділилась на чоловіків і жінок. Описати усі можливі підмножини.

1.9. Обчислити, визначити дійсну й уявну частини виразів:

а) $(3-2i)(5+4i)$; б) $(5+3i)(4-3i)$; в) $(1-3i)^2+7i$; г) $\dfrac{6+i}{4+3i}$; г) $\dfrac{4+7i}{3-2i}$.

1.10. Обчислити: а) $(1+i)^{24}$; б) $(4-4i)^8$; в) $(\sqrt{3}i-1)^{12}$; г) $(\sqrt{3}-i)^6$.

1.11. Обчислити: а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[4]{-i}$; в) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$; г) $\sqrt[6]{-64}$.

2. 2.1. Визначити, чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, якщо:

а) $\vec{a}=(4,-3,5)$, $\vec{b}=(7,3,-5)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$;

б) $\vec{a}=(10,-3,7)$, $\vec{b}=(5,2,-4)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b}$;

в) $\vec{a}=(1,-3,8)$, $\vec{b}=(3,0,-5)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{a}+3\vec{b}$;

г) $\vec{a}=(5,-2,0)$, $\vec{b}=(7,5,-1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}+\vec{b}$.

2.2. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – перпендикулярні:

а) $\vec{a}=m\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+m\vec{k}$; б) $\vec{a}=5\vec{i}-m\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+m\vec{k}$;

в) $\vec{a}=2m\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$; г) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+m\vec{j}-4\vec{k}$.

2.3. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

а) $A(-3,2,7)$, $B(6,-1,1)$, $C(5,2,1)$; б) $A(-3,-1,2)$, $B(-1,-2,3)$, $C(0,3,1)$;

в) $A(1,-4,2)$, $B(9,1,2)$, $C(-1,4,0)$; г) $A(-1,1,-3)$, $B(1,5,-3)$, $C(7,-4,3)$.

2.4. Обчислити діагоналі паралелограма, який побудований на векторах:

а) $\vec{a}=2\vec{k}+3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$; б) $\vec{a}=2\vec{k}-3\vec{i}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$;

в) $\vec{a}=2\vec{k}-5\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; г) $\vec{a}=3\vec{k}-\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=7\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

2.5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a}=(-1,-2,1)$, $\vec{b}=(2,4,-5)$; б) $\vec{a}=(4,-2,7)$, $\vec{b}=(3,2,-1)$;

в) $\vec{a}=(2,-3,5)$, $\vec{b}=(2,0,-3)$; г) $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(3,5,-2)$.

2.6. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках:

а) $A(-1,1,-3)$, $B(1,5,-3)$, $C(7,-4,3)$;

б) $A(1,-2,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(3,-4,5)$.

2.7. Знайти об’єм паралелепіпеда з вершинами в точках A, B, C, D:

а) $A(1,-2,2)$, $B(0,-1,1)$, $C(2,-4,3)$, $D(-3,5,4)$;

б) $A(-1,-2,3)$, $B(2,1,-3)$, $C(2,-3,0)$, $D(-1,-5,6)$.

2.8. Обчислити об’єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D:

а) $A(-1,2,1)$, $B(0,1,2)$, $C(-3,4,1)$, $D(-1,4,3)$;

б) $A(4,2,1)$, $B(1,3,2)$, $C(0,4,1)$, $D(-1,2,3)$.

2.9. Перевірити, чи належать одній площині точки:

а) $A(-3,-1,1)$, $B(2,-3,0)$, $C(-3,0,1)$, $D(4,7,-3)$;

б) $A(0,-1,3)$, $B(-1,-2,1)$, $C(0,3,1)$, $D(5,-4,2)$;

2.10. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$;

ґ) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

2.11. Розв’язати системи за допомогою формул Крамера:

а) $\begin{cases} -7x-2y+4z=1, \\ -3x+y+6z=3, \\ 2x+2y-5z=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x+2y+z=-5, \\ -3x+y+5z=4, \\ -6x+2y-2z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+5y-2z=-2, \\ -3x+4y+9z=3, \\ -5x-y+6z=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-3y+4z=-4, \\ -7x+2y+5z=5, \\ 5x+2y-z=-2; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 4x+5y-2z=-2, \\ -3x-4y+9z=3, \\ x+y+7z=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x-3y+4z=0, \\ 7x-y+3z=0, \\ 5x+2y-z=0. \end{cases}$

3.

3.1. Знайти транспоновані матриці до матриць:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

3.2. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; б) $4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; ґ) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}^2$.

3.3. Обчислити:

а) $f(A) = 2A^2 + 5A$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $f(A) = 4A^2 - 3A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $f(A) = 5A^2 + 2A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4. Знайти загальний розв’язок систем:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 12, \\ -2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ -4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_4 = -7, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ -6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

3.5. Знайти матрицю $\boldsymbol{X}$ з рівнянь:

а) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

3.6. Припустимо, що дві особи захворіли заразною хворобою. Друга група з п’яти осіб можливо мала контакти з цими хворими. Третя група з чотирьох осіб контактувала з п’ятьма особами другої групи. Описати контакти другого порядку між особами третьої групи і двома хворими першої групи, якщо контакти першого порядку між групами задаються такими матрицями:

а) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

3.7. Три види бактерій співіснують у пробірці і споживають три субстрати. Припустимо, що бактерія i–го виду споживає в день c_{ij} кількості j–го субстрату, $\vec{c}_i^{\,T}=(c_{i1},c_{i2},c_{i3})$ – вектор споживання для i–го виду.

Нехай $\vec{c}_1^{\,T}=(1,1,2)$, $\vec{c}_2^{\,T}=(1,2,2)$ і $\vec{c}_3^{\,T}=(1,2,3)$. Щодня в пробірку вносять 20000 одиниць першого субстрату, 30000 одиниць другого і 45000 одиниць третього. Які кількості особин популяцій трьох видів бактерій можуть співіснувати в такому середовищі, якщо бактерії споживають весь денний запас субстрату?

3.8. На новий ареал переселяють три види птахів загальною кількістю 10000 особин. Згідно зі спостереженнями популяції цих трьох видів повинні збільшуватись щорічно з приростами 3%, 4% і 5%, відповідно для першого, другого і третього видів. Відомо, що загальний приріст популяцій за перший рік становить 380 особин, що приріст за перший рік популяції першого виду дорівнює приросту популяції третього виду. Знайти початкові кількості особин популяцій усіх трьох видів.

3.9. Активність тварини, що пасеться, грубо можна поділити на три стани:
1) споживання їжі; 2) рух (до нових пасовиськ чи втеча від хижаків); 3) спокій. Чисте енергетичне накопичення при споживанні – 200 калорій за годину. Чисті енергетичні втрати під час руху – 150 калорій за годину, у разі спокою – 50 калорій за годину. Як треба розподілити час доби між цими трьома станами, щоб енергетичне збагачення при споживанні їжі точно компенсувало енергетичні втрати під час руху та спокою?

4. 4.1. Задано вершини трикутника $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(13;-4)$. Написати рівняння медіани, проведеної з вершини B.
4.2. Задано трикутник з вершинами $A(-8,-4)$, $B(4,5)$, $C(2,-9)$. Написати рівняння медіани AD.
4.3. Задано трикутник з вершинами $A(0,-1)$, $B(12,8)$, $C(10,-6)$. Написати рівняння медіани CE.

4.4. Задано трикутник з вершинами $A(-2,-4)$, $B(10,5)$, $C(8,-9)$. Написати рівняння висоти CD.

4.5. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3,3)$, перпендикулярно до прямої $3x-y-1=0$.

4.6. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $B(9,-6)$, перпендикулярно до прямої $x+3y+1=0$.

4.7. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $C(7,8)$, паралельно до прямої $2x-y-5=0$.

4.8. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3,2)$, паралельно до прямої $2x-5y+1=0$.

4.9. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x+6y+5=0,\quad 3x-2y+1=0$ і через точку $M(-4;1)$.

4.10. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $5x+3y+10=0,\quad x+y-15=0$ і через початок координат.

4.11. Знайти відстань від точки $M(2;-1)$ до прямої, що відсікає на осях координат відрізки $a=8$, $b=6$.

4.12. Знайти відстань від точки $M(-3,1)$ до прямої, що відсікає на осях координат відрізки $a=-2$, $b=4$.

4.13. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(0;2)$, $B(1;3)$, $C(7;1)$. Знайти кут між його діагоналями.

4.14. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(2;0)$, $B(1;3)$, $C(7;3)$. Знайти кут між його діагоналями.

5. 5.1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9}{7n^3+10n+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4}{5n-3}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+7}{5n^2-3n+2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+9-2n^3}{n^3+10n+5}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-3n^2}{4n^2-6n+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1-6n^3}{2n^3-3n+5}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^6+3n^2+4}}{7n-8}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{2n^2-1}}{\sqrt{2n+3}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{625n^4-3n^2+1}}{\sqrt[3]{27n^6-4}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}$; 12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}$; 13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-3}{x^3-27}$;

14) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{8+x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 16) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{2x-7}-5}{\sqrt{x}-4}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2+x-2}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/4)}{x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(3x)}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(x/2)}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{x^2}$; 23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 8x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{x^4}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 4x}{x^3}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}^2(x/3)}$; 27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{\sin 7x}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+9}-3}$; 29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{\sin 5x}$; 30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$; 32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 33) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{(2+x)/x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{(5+x)/x}$; 35) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{6+x}{x+5}\right)^{x^2}$; 36) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2+x}{x+3}\right)^{x^2}$;

37) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+4}\right)^{x}$; 38) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{x}$; 39) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$;

40) $\lim\limits_{n\to \infty} n^2(\ln(n+5)-\ln n)$; 41) $\lim\limits_{n\to \infty}(\ln n-\ln(n+2))$; 42) $\lim\limits_{n\to \infty} n(\ln(n+4)-\ln n)$;

5.2. Обчислити похідні:

1) $y=2x^3-\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{12}{\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{4}{x}$; 2) $y=x^2-\dfrac{7}{\sqrt{x}}+\dfrac{8}{\sqrt[3]{x^5}}$; 3) $y=x^5+\dfrac{6}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^5}}+\dfrac{7}{x^4}$;

4) $y=3x^4+\dfrac{4}{\sqrt{x^7}}+\dfrac{9}{\sqrt[3]{x^4}}$; 5) $y=x^4\sin x$; 6) $y=x^3\cos x$; 7) $y=x^2 tgx$;

8) $y=x^6 ctgx$; 9) $y=\sqrt{x}\,e^x$; 10) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^3}$; 11) $y=\dfrac{3+x^4}{x^3+2}$; 12) $y=\dfrac{ctgx}{1+3x}$;

13) $y=\dfrac{tgx}{1-5x}$; 14) $y=\dfrac{1-x^5}{\cos x}$; 15) $y=\sqrt{x^3}\,5^x-3\cdot 2^x$; 16) $y=x^2e^x+x^6 4^x$;

17) $y=x^3e^x-x^5 3^x$; 18) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$; 19) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x+4}}$; 20) $y=\dfrac{12}{\sqrt[4]{x^3+10}}$;

21) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; 22) $y=\sqrt{\dfrac{2+x^3}{1-x^4}}$; 23) $y=\sqrt[3]{\dfrac{4+x^6}{3+x^2}}$; 24) $y=\sin 3x+4\cos 5x$;

25) $y=3\sin 4x-5\cos 2x$; 26) $y=5ctg\,2x$; 27) $y=5tg\,4x$; 28) $y=\ln\cos x$;

29) $y=\ln\sin x$; 30) $y=\log_2(x+3)$; 31) $y=\log_5(7x+2)$; 32) $y=\log_3(\ln x)$;

33) $y=\ln^3 x$; 34) $y=\ln^2 x$; 35) $y=\sin^5 x^4$; 36) $y=\cos^2 x^3$; 37) $y=\ln^5 x^2$;

38) $y=tg^3 x$; 39) $y=ctg^6 x$; 40) $y=tg^4 6x$; 41) $y=e^{1/x^2}$; 42) $y=e^{2/x^3}$;

43) $y=4^{\sin^2 x}$; 44) $y=3^{\cos^2 x}$; 45) $y=e^{1/x^2}$; 46) $y=3^{\cos^2 x}$; 47) $y=\arcsin(4x)$;

48) $y=\arccos(5\mathrm{x})$; 49) $y=arctg\sqrt{x}$; 50) $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$; 51) $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$;

52) $y=\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$; 53) $y=arcctg\sqrt[4]{x}$; 54) $y=\arcsin\sqrt{1-6x}$;

55) $y=\arccos\sqrt{1-4x}$; 56) $y=\arcsin^2(2x+1)$; 57) $y=\arccos^3(3x)$;

58) $y=arcctg^5 x^4$; 59) $y=x^2e^{-x}\cos x$; 60) $y=x^3e^{2x}\sin x$.

5.3. Знайти асимптоти кривих:

1) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x}$;

5) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$; 6) $y=\dfrac{x^3}{x^3+4}$; 7) $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$; 8) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x}$.

5.4. Дослідити функції на проміжки монотонності та точки екстремуму, проміжки опуклості та точки перегину:

1) $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+12$; 2) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3-5$; 3) $y=2x^2-x^4$; 4) $y=7-\dfrac{x^4}{2}+4x^2$;

5) $y=7-\dfrac{x^4}{2}+4x^2$; 6) $y=\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^4}{4}+2$; 7) $y=\dfrac{x^4}{4}+2x^3$; 8) $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}$.

5.5. Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному проміжку:

1) $y=2+x-x^2$ $[1;4]$; 2) $y=x^2+4x+5$ $[-3;0]$; 3) $y=2x^2-x^4$ $[-1;2]$;

4) $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$ $[-2;4]$; 5) $y=1-\dfrac{x^4}{4}+2x^2$ $[-1;4]$; 6) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3$ $[-1;2]$.

5.6. Розмір деякої популяції в момент часу x (час виражається в годинах) задається формулою $f(x)=200+25x^2$. Знайти середню швидкість росту популяції.

5.7. Розмір деякої популяції в момент часу x (час виражається в годинах) задається формулою $f(x)=400+25x^3$. Знайти швидкість зміни кількості особин популяції при: а) $x=1$ год; б) $x=2$ год; в) $x=5$ год.

5.8. Розмір популяції комах у момент x (час виражається в днях) задається величиною $f(x)=50000-4000(1+x)^{-2}$. Знайти початкову кількість особин популяції $f(0)$ і швидкість росту популяції $f'(x)$ в момент x.

5.9. Розмір популяції комах у момент x (час виражається в днях) задається величиною $f(x)=10000-9000(1+x)^{-1}$. Знайти початкову кількість особин популяції $f(0)$ і швидкість росту популяції $f'(x)$ в момент x.

5.10. Розмір популяції бактерій в момент x (час виражається в годинах) задається формулою $f(x)=10^6+10^4x-10^3x^2$. Знайти швидкість росту кількості особин популяції при: а) $x=1$ год; б) $x=5$ год; в) $x=10$ год.

5.11. Розмір деякої популяції в момент часу x (час виражається в годинах) задається формулою $f(x)=200+8x-x^2$. Знайти швидкість росту кількості особин популяції при: а) $x=0$ год; б) $x=2$ год; в) $x=5$ год. Визначити момент часу, коли популяція досягне свого найбільшого розміру.

5.12. Теплим літнім вечором температуру можна визначити, порахувавши скільки разів протягом 15 секунд застрекоче цикада, додавши до отриманого числа 40. Цей “термометр” доволі точний у діапазоні від 55 до 100^0F. Визначити швидкість зміни кількості стрекотання (за 15с) на градус Фаренгейта.

5.13. Якщо в бактеріальне середовище внести антибактеріальний агент, то він зумовлює зменшення популяції бактерій. Знайти швидкість зміни кількості особин популяції в момент часу x, якщо відомо, що через x хвилин після внесення антибактеріального агента популяція налічує $f(x)=f(0)2^{-x/3}$ бактерій. Якщо початкова кількість дорівнює $f(0)=10^6$, то скільки треба часу, щоб кількість особин зменшилась до 10^3 особин.

5.14. Дріжджі ростуть у цукровому розчині, причому їхня маса збільшується на 3% за кожну годину. Якщо початкова маса становить 1г, то маса через x годин становитиме $f(x)=1{,}03^x$. Знайти швидкість зміни маси $f(x)$ при:
а) $x=1$ год; б) $x=2$ год; в) $x=5$ год.

5.15. Популяція бактерій росте від початкового розміру 1000 особин до розміру $p(t)$ в момент t (час виражається в днях) згідно з законом $p(t)=\dfrac{1000\,e^{t}}{1+0{,}1(e^{t}-1)}$. Знайти швидкість росту популяції. Коли ця швидкість буде максимальною?

5.16. Хворому дають ін'єкції ліків у момент часу $x=0$. Концентрація цих ліків у крові в момент часу x описується залежністю $f(x)=3(e^{-4x}-e^{-2x})$. Довести, що $f(0)=0$ і що $f(x)>0$ при $x>0$. Яке найбільше значення $f(x)$? Коли воно досягається? Побудувати графік концентрації.

5.17. Рівень реакції організму на отримані ліки залежить від назначеної дози ліків. Припустимо, що x – доза отриманих ліків, а рівень реакції організму y описується функцією $y=f(x)=4x^{3}-x^{4}$. За якого значення x реакція буде максимальною?

5.18. Хворому дають ін'єкції ліків у момент часу $x=0$. Концентрація цих ліків у крові в момент часу x описується залежністю $f(x)=4(e^{-6x}-e^{-2x})$. Яке найбільше значення $f(x)$? Коли воно досягається? Побудувати графік концентрації.

5.19. У лососей віком рік споживання кисню зі збільшенням швидкості плавання збільшується експоненціально. Позначимо $f(x)$ як споживання кисню річним лососем, який пливе зі середньою швидкістю x футів у секунду. Нехай $f(0)=100$ і $f(3)=800$ (відповідних одиниць). Знайти $f(1)$ і $f(2)$.

5.20. Якщо світло проходить через рідину, то його інтенсивність експоненціально спадає з довжиною пройденого шляху. Це означає таке: якщо $I(x)$ сила світла на відстані x футів від поверхні рідини, то $I(x)=I(0)e^{-ax}$, де a додатна стала, яка характерна для цієї рідини. Нехай у деякій водоймі $a=0{,}5$ і для водяних рослин певного типу необхідне світло інтенсивності не менше 0,1 сили світла, що є на поверхні. На якій максимальній глибині можуть жити ці рослини?