Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

**Ю. В. Жерновий**

# МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тексти лекцій

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2004

ББК – В 171я73-2
Ж – 59
УДК 519.217(042.4)

***Рецензент***
*Б. І. Копитко*, д-р фіз.-мат. наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, професор (Львівський банківський ін-т НБУ)

*Рекомендовано до друку Вченою радою механіко-математичного факультету Протокол №8 від 21.05.2003*

**Жерновий Ю. В.**
**Ж – 59** Марковські моделі масового обслуговування: Тексти лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 154 с.

Викладено математичну теорію потоків випадкових подій, зокрема найпростішого і пуассонівського потоків, яка лежить в основі марковських моделей масового обслуговування. Умови ергодичності марковських процесів вивчено у зв’язку з вимогами до структури графа станів системи масового обслуговування. Розглянуто інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь для ймовірностей станів пуассонівської системи масового обслуговування за допомогою перетворення Лапласа. Теорію проілюстровано детальним аналізом граничних стаціонарних режимів роботи важливих для практики розімкнених і замкнених систем масового обслуговування та розрахунками їхньої ефективності.

Для студентів математичних спеціальностей університетів.

**ББК – В 171я73-2**

# Вступ

Теорія масового обслуговування як розділ теорії ймовірностей виникла на початку XX століття у зв'язку з потребами практики, зокрема бурхливим розвитком телефонних мереж. Згодом виявилось, що математичні моделі, розроблені і досліджені як моделі телефонії, можуть описувати також інші процеси в багатьох сферах практичної діяльності людини.

Прикладні задачі теорії масового обслуговування пов'язані з дослідженням будь-яких процесів, що складаються з багатьох однорідних елементарних операцій, на здійснення яких впливають випадкові чинники. Наведемо приклади.

*Автоматична телефонна станція* (АТС) обслуговує певну кількість абонентів, які виходять на зв'язок випадково. Абонент, який намагається зателефонувати (послати виклик) у момент зайнятості лінії, отримує відмову – короткі гудки. Елементарна операція для такої системи *масового обслуговування* (МО) – окрема телефонна розмова. Головною характеристикою цієї операції в процесі функціонування АТС протягом тривалого часу є ймовірність відмови під час виклику.

У складальний цех надходять для складання певного виробу деталі різних видів. Якщо не вистачає деталей хоча б одного виду, виробництво зупиняється; разом з тим зайві деталі надходять у бункери певної місткості. На процес надходження деталей, як і на час складання виробу з них, впливають випадкові чинники. Виникають питання щодо ймовірності простоювання виробничої лінії та ймовірності переповнення бункерів. Елементарною операцією у цьому випадку є складання одного виробу з готового комплекту деталей.

У морський порт прибувають судна не строго за графіком, а з випадковими відхиленнями. В наявності є кілька розвантажувально-завантажувальних платформ з відповідним обладнанням. Важливо знати, яким буде середній час з моменту прибуття судна до завершення його розвантаження і завантаження. Елементарною операцією у цьому випадку вважають процес розвантаження і завантаження одного судна.

Дослідження системи МО можна звести до побудови і вивчення деякого випадкового процесу, який описує еволюцію системи. Щоб математично описати систему МО, необхідно описати *властивості вхідного потоку* однорідних подій – *потоку замовлень*, *структуру системи*, *дисципліну і характеристики обслуговування*, а також зазначити ті характеристики, які треба



визначити.

Предмет теорії масового обслуговування – встановлення залежності між характером потоку замовлень, продуктивністю окремого каналу (канал обслуговування – сукупність усіх технічних пристроїв, необхідних для обслуговування одного замовлення), кількістю каналів і ефективністю обслуговування. Залежно від умов задачі і мети дослідження характеристиками ефективності обслуговування вважають: середній відсоток замовлень, які будуть обслужені (відносна пропускна здатність системи); середній час простою окремих каналів і системи загалом; середній час повного завантаження системи; середній час неповного завантаження системи; середній час перебування замовлення в системі; середня кількість замовлень, які перебувають у черзі та ін.

Багаточисельні розрахунки, здійснені під час розв'язування задач теорії МО, засвідчують, що здебільшого задовільний за точністю розв'язок можна отримати припустивши, що всі потоки, які діють на систему, – пуассонівські, тобто процес функціонування системи є марковським випадковим процесом з неперервним часом. Тому в текстах лекцій розглянуто лише марковські моделі МО.

Розділи 1 та 2 присвячені вивченню математичної теорії потоків випадкових подій та обґрунтуванню властивості пуассонівського потоку як границі суми значної кількості незалежних потоків малої інтенсивності.

У розділі 3 розглянуто особливості протікання марковських процесів у системах МО, умови ергодичності таких процесів вивчено у зв'язку з вимогами до структури графа станів системи, подано виведення системи звичайних диференціальних рівнянь для визначення ймовірностей станів і методи її інтегрування.

Детальний аналіз важливих для практики розімкнених і замкнених систем МО здійснено у розділі 4. Увагу зосереджено на дослідженні граничних стаціонарних режимів і визначенні характеристик ефективності систем. Наведено гіпотетичні приклади з числовими розрахунками.

# Розділ 1
# Потоки випадкових подій та їхні властивості

## § 1. 1. Класифікація потоків подій. Найпростіший потік. Інтенсивність найпростішого потоку

***Потоком подій*** називають послідовність подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Наприклад: потік викликів, що надходять на АТС; потік виготовлених деталей, що надходять у ВТК заводу; потік машин, що потребують заправки пальним; потік літаків, що приземляються в аеропорту тощо. Розрізняють потоки *однорідних* і *неоднорідних* подій. Наприклад, потік літаків, що приземляються в аеропорту, буде однорідним, якщо не розрізняти літаки за типами. Якщо ж розрізняти типи літаків (ТУ-144, ІЛ-18 і т.д.), то той самий потік можна вважати неоднорідним. Ми розглядатимемо однорідні потоки подій.

Графічно потік подій зображають як послідовність точок $t_1$, $t_2$… на числовій осі $Ot$, що відповідають моментам появи подій.

Потоки подій розрізняють за своєю *внутрішньою структурою*. Найпростішим потоком з погляду його побудови є ***регулярний потік*** – потік, у якому події відбуваються одна за одною через точно визначені проміжки часу. Строго регулярних потоків у природі не існує, оскільки моменти появи подій завжди містять елементи випадковості.

Розглянемо потік, у якому події відокремлено інтервалами часу $T_1$, $T_2$…. Ці інтервали загалом є випадковими величинами. Якщо інтервали $T_1$, $T_2$… незалежні між собою, то потік подій називають ***потоком з обмеженою післядією*** або ***потоком Пальма***. Прикладом такого потоку слугує потік деталей, які обточує токар на станку, якщо час виготовлення кожної чергової деталі не залежить від часу виготовлення усіх попередніх деталей.

Потік подій називають ***стаціонарним***, якщо $\forall\ t>0$ і цілого $k\geq 0$ ймовірність того, що за проміжок часу $(a,\ a+t)$ відбудеться $k$ подій, одна і та сама для всіх $a\geq 0$ (і, отже, залежить лише від $k$ і $t$). Надалі позначатимемо цю ймовірність через $v_k(t)$.

Ми матимемо справу лише з потоками, в яких за скінченний



проміжок часу з імовірністю 1 відбувається скінченна кількість подій, тобто виконується умова $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1$ при будь-якому $t$.

Стаціонарність потоку – це незмінність його ймовірнісного режиму в часі. Очевидно, регулярний потік з однаковими інтервалами між подіями, а також потік Пальма з однаково розподіленими інтервалами часу $T_1$, $T_2$… є стаціонарними потоками.

Вважають, що потік володіє властивістю ***відсутності післядії***, якщо ймовірність $v_k(t)$ появи $k$ подій за проміжок часу $(a,\ a+t)$ не залежить від чергування подій до моменту $a$; іншими словами, умовна ймовірність появи $k$ подій за проміжок часу $(a,\ a+t)$, обчислена за будь-якого припущення щодо чергування подій до моменту $a$, дорівнює безумовній імовірності $v_k(t)$ появи $k$ подій. Відсутність післядії – це взаємна незалежність протікань потоку в проміжках часу, що не перетинаються.

Нехай для стаціонарного потоку $\psi(t)=1-v_0(t)-v_1(t)=\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)$ – імовірність того, що за (де завгодно розташований) проміжок часу довжини $t$ відбудеться *хоча б дві події*. Стаціонарний потік називають ***ординарним***, якщо $\psi(t)=o(t)$ при $t\to 0$, тобто $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=0.$ Ординарність потоку виражає практичну неможливість суміщення двох і більше подій в один і той самий момент часу.

Потік, який володіє трьома переліченими властивостями, тобто стаціонарний ординарний потік без післядії, називають ***найпростішим потоком***.

Вивчення найпростішого потоку розпочнемо з обчислення щодо нього ймовірності появи $k$ подій за проміжок часу довжини $t$, тобто визначення функції $v_k(t)$. Унаслідок стаціонарності потоку розташування проміжку довжини $t$ на осі $Ot$ не вплине на результат.

Розглянемо проміжок часу одиничної довжини і позначимо через $p$ ймовірність того, що за цей час не відбудеться жодної події

($p$=$v_0$(1)). Розіб'ємо проміжок 1 на $n$ рівних частин довжиною 1/$n$, які не перетинаються. Унаслідок стаціонарності та відсутності післядії

$$p = \left(v_0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,$$

(імовірність добутку незалежних подій), звідси:

$$v_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{1/n}, \quad v_0\left(\frac{k}{n}\right) = p^{k/n},$$

де $k$ – натуральне число.

Нехай $t$≥0 – деяке невід'ємне число. Тоді для кожного натурального $n$ існує натуральне число $k$, таке, що $\frac{k-1}{n} \le t < \frac{k}{n}$. Оскільки $v_0(t)$ – незростаюча функція часу (чим довший проміжок часу $t$, тим менша ймовірність, що не відбудеться жодна подія), то:

$$v_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \ge v_0(t) \ge v_0\left(\frac{k}{n}\right),$$

тобто

$$p^{(k-1)/n} \ge v_0(t) \ge p^{k/n}. \tag{1.1}$$

Нехай тепер $k$ і $n$ прямують до ∞ так, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n} = t$. З (1.1) випливає, що $v_0(t) = p^t$.

Оскільки $v_0(t)$ як імовірність задовольняє нерівності 0≤$v_0(t)$≤1, то тут можливі такі 3 випадки: 1) $p$=0; 2) $p$=1; 3) 0<$p$<1. Перші 2 випадки для нас нецікаві. В першому для всіх $t$ $v_0(t)$=0 і, отже, ймовірність за проміжок часу будь-якої тривалості відбутися хоча б одній події дорівнює 1. Це означає, що кількість подій нескінченна для всіх $t$ з імовірністю 1. У другому випадку $v_0(t)$=1 і, отже, події не відбуваються. Розглянемо третій випадок, в якому покладемо $p = e^{-\lambda}$, де λ=const>0 (λ=– $ln\, p$).

Використовуючи лише умови стаціонарності та відсутності післядії, ми визначили, що:

$$\forall \quad t \ge 0 \qquad v_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{1.2}$$



Очевидно, що для всіх $t$ $v_0(t)+v_1(t)+\psi(t)$=1. Для малих $t$ з (1.2) випливає рівність (розклад за формулою Маклорена) $v_0(t)$=1–λ$t$+$o(t)$. Оскільки $\psi(t)=o(t)$ (ординарність), то при малих $t$

$$v_1(t)=\lambda t+o(t). \tag{1.3}$$

Перейдемо безпосередньо до виведення формули для $v_k(t)$ при $k$≥1. З цією метою визначимо ймовірність того, що за час $t+\Delta t$ подія відбудеться $k$ разів. Це може здійснитися $k$+1 різним способом, а саме: 1) за проміжок часу $t$ відбудуться усі $k$ подій, а за проміжок $\Delta t$ не відбудеться жодної; 2) за проміжок $t$ відбудеться $k$–1 подія, а за проміжок $\Delta t$ – одна… $k$+1) за проміжок $t$ не відбудеться жодної події, а за проміжок $\Delta t$ – $k$ подій. Беручи до уваги умови стаціонарності та відсутності післядії, за формулою повної ймовірності отримаємо рівність:

$$v_k(t+\varDelta t) = \sum_{j=0}^{k} v_j(t) v_{k-j}(\varDelta t).$$

Поклавши $R_k = \sum\limits_{j=0}^{k-2} v_j(t) v_{k-j}(\varDelta t)$, одержимо:

$$R_k \le \sum_{j=0}^{k-2} v_{k-j}(\varDelta t) = \sum_{s=2}^{k} v_s(\varDelta t) \le \sum_{s=2}^{\infty} v_s(\varDelta t) = \psi(\varDelta t) = o(\varDelta t)$$

(остання рівність випливає з умови ординарності потоку).

Отже,

$$v_k(t+\Delta t) = v_k(t)v_0(\Delta t) + v_{k-1}(t)v_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Враховуючи (1.2) і (1.3), для малих $\Delta t$ маємо:

$$v_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t); \qquad v_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Тому $v_k(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)v_k(t) + \lambda\Delta t v_{k-1}(t) + o(\Delta t)$. Звідси:

$$\frac{v_k(t+\Delta t) - v_k(t)}{\Delta t} = -\lambda v_k(t) + \lambda v_{k-1}(t) + o(1).$$

Оскільки при $\Delta t \to 0$ границя правої частини існує, то існує й границя лівої частини. Перейшовши в останній рівності до границі, одержимо диференціальне рівняння для визначення $v_k(t)$:

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = -\lambda v_k(t) + \lambda v_{k-1}(t). \tag{1.4}$$

З (1.2) та умови ординарності випливають початкові умови:

$$v_0(0)=1,\quad v_k(0)=0,\ k\geq 1. \qquad (1.5)$$

У рівняннях (1.4) зробимо заміну шуканих функцій:

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}u_k(t). \qquad (1.6)$$

Тоді з (1.2) випливає, що $u_0(t)=1$, а з (1.5) отримаємо:

$$u_0(0)=1,\quad u_k(0)=0,\ k\geq 1. \qquad (1.7)$$

Підставивши (1.6) в (1.4), одержимо систему диференціальних рівнянь для послідовного визначення функцій $u_k(t)$, $k\geq 1$:

$$\frac{du_k(t)}{dt}=\lambda u_{k-1}(t). \qquad (1.8)$$

При $k=1$ звідси отримаємо рівняння $\frac{du_1(t)}{dt}=\lambda$; інтегруючи його з урахуванням початкової умови (1.7), визначимо: $u_1(t)=\lambda t$. Продовжуючи аналогічно процес послідовного інтегрування рівнянь (1.8), для всіх $k\geq 1$ матимемо: $u_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$. Звідси, враховуючи (1.2) та заміну (1.6), остаточно визначимо функції $v_k(t)$ для всіх $k\geq 0$:

$$v_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}. \qquad (1.9)$$

Співвідношення (1.9) дають змогу стверджувати, що ті 3 властивості (стаціонарність, відсутність післядії, ординарність), якими ми визначили найпростіший потік, цілком характеризують його структуру з точністю до параметра $\lambda$, який може бути будь-яким додатним числом. Два найпростіші потоки можуть відрізнятися один від одного лише значеннями цього параметра.

Для будь-якого стаціонарного потоку домовимося позначати через $w(t)$ імовірність того, що за проміжок часу $t$ відбудеться *хоча б одна* подія, тобто:

$$w(t)=1-v_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)=v_1(t)+\psi(t).$$

Для найпростішого потоку з параметром $\lambda$ $v_0(t)=e^{-\lambda t}$ і, отже, при $t\to 0$ $w(t)=1-e^{-\lambda t}=1-(1-\lambda t+o(t))=\lambda t+o(t)$, тобто:



$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}=\lambda. \qquad (1.10)$$

Вважатимемо це співвідношення означенням параметра $\lambda$ цього потоку. Далі побачимо, що границя (1.10) існує для будь-якого стаціонарного потоку і визначений співвідношенням (1.10) параметр $\lambda$ є однією з найважливіших характеристик цього потоку.

Повернемось до найпростішого потоку і визначимо математичне сподівання кількості подій, що відбуваються за проміжок часу $t$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kv_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=e^{-\lambda t}\lambda te^{\lambda t}=\lambda t.$$

Ми могли б передбачити цей результат, оскільки відомо, що математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює параметру цього закону, тобто $\lambda t$.

Математичне сподівання кількості подій за одиницю часу називають ***інтенсивністю стаціонарного потоку*** ($\mu$). Отже, для найпростішого потоку $\mu=\lambda$.

Покажемо, що для будь-якого стаціонарного потоку $\mu\geq\lambda$. Справді, математичне сподівання кількості подій за час $t$ для стаціонарного потоку дорівнює $\mu t=\sum_{k=1}^{\infty}kv_k(t)\geq\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)=w(t)$, звідки $\mu\geq\frac{w(t)}{t}$. Оскільки ліва частина цієї нерівності від $t$ не залежить, то внаслідок (1.10) $\mu\geq\lambda$, хоча саме існування границі (1.10) для будь-якого стаціонарного потоку ще треба довести (це буде зроблено нижче).

Отже, інтенсивність $\mu$ найпростішого потоку дорівнює його параметру $\lambda$; а для довільного стаціонарного потоку ми можемо лише стверджувати, що $\mu\geq\lambda$.

## § 1. 2. Потік зі змінним параметром (пуассонівський потік)

Вивчимо потоки, які не володіють стаціонарністю, однак, як і найпростіший потік, є ординарними потоками без післядії.

Якщо потік нестаціонарний, то ймовірність появи $k$ подій за проміжок часу довжини $\tau$ залежить не лише від $\tau$, а й від початкового моменту $t$ цього проміжку, отож позначатимемо її через $v_k(\tau,t)$. Отже, $v_k(\tau,t)$ – ймовірність того, що за проміжок часу $(t, t+\tau)$ відбудеться $k$ подій.

По аналогії зі стаціонарним випадком покладемо:

$$w(\tau,t)=1-v_0(\tau,t), \qquad \psi(\tau,t)=1-v_0(\tau,t)-v_1(\tau,t).$$

Назвемо нестаціонарний потік ***ординарним***, якщо для кожного фіксованого $t\geq 0$ $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\psi(\tau,t)}{\tau}=0$. Далі припустімо, що $\forall\ t\geq 0$ існує границя:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{w(\tau,t)}{\tau}=\lambda(t)- \tag{1.11}$$

миттєве значення параметра.

Виходячи зі зроблених припущень, поставимо завдання: знайти функції $v_k(\tau,t)$. Розглянемо спочатку випадок $k=0$.

Оскільки ми маємо справу з потоком без післядії, то при $\Delta\tau>0$ $v_0(\tau+\Delta\tau,t)=v_0(\tau,t)v_0(\Delta\tau,t+\tau)$, проте за припущенням при $\Delta\tau\to 0$ і фіксованих $t$, $\tau$

$$v_0(\Delta\tau,t+\tau)=1-w(\Delta\tau,t+\tau)=1-\lambda(t+\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau)$$

(оскільки, згідно з (1.11), $w(\tau,t)=\lambda(t)\tau+o(\tau)$ ), отже:

$$v_0(\tau+\Delta\tau,t)-v_0(\tau,t)=v_0(\tau,t)(v_0(\Delta\tau,t+\tau)-1)=$$
$$=-v_0(\tau,t)\lambda(t+\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau).$$

Після почленного ділення на $\Delta\tau$ та граничного переходу одержимо:

$$\frac{\partial v_0(\tau,t)}{\partial\tau}=-\lambda(t+\tau)v_0(\tau,t) \tag{1.12}$$

(причому існування похідної, очевидно, автоматично доводиться). Звідси:

$$\frac{\partial\ln v_0(\tau,t)}{\partial\tau}=-\lambda(t+\tau), \qquad \ln v_0(\tau,t)-\ln v_0(0,t)=-\int_0^\tau\lambda(t+u)du.$$

Оскільки $v_0(0,t)=1$, то $\ln v_0(\tau,t)=-\int_0^\tau\lambda(t+u)du\overset{df}{=}-\Lambda(\tau,t)$. Отже,



остаточно $v_0(\tau,t)=e^{-\Lambda(\tau,t)}$.

У стаціонарному випадку показник експоненти дорівнював $-\lambda\tau$; у нестаціонарному, як ми тепер бачимо, треба замінити $\lambda$ величиною

$$\frac{\Lambda(\tau,t)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\lambda(t+u)du,$$

яку природно розглядати як середнє значення *миттєвого параметра* $\lambda(t)$ на проміжку $(t, t+\tau)$.

Перейдемо до випадку $k>0$. Враховуючи, що маємо потік без післядії, одержимо:

$$v_k(\tau+\Delta\tau,t)=v_k(\tau,t)v_0(\Delta\tau,t+\tau)+$$
$$+v_{k-1}(\tau,t)v_1(\Delta\tau,t+\tau)+\ldots+v_0(\tau,t)v_k(\Delta\tau,t+\tau),$$

де для $\Delta\tau\to 0$

$$v_0(\Delta\tau,t+\tau)=1-\lambda(t+\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau),$$
$$v_1(\Delta\tau,t+\tau)=1-v_0(\Delta\tau,t+\tau)-\psi(\Delta\tau,t+\tau)=\lambda(t+\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau).$$

Оскільки потік ординарний, то:

$$\sum_{s=2}^{k}v_{k-s}(\tau,t)v_s(\Delta\tau,t+\tau)\leq\sum_{s=2}^{\infty}v_s(\Delta\tau,t+\tau)=\psi(\Delta\tau,t+\tau)=o(\Delta\tau).$$

Отож

$$v_k(\tau+\Delta\tau,t)=v_k(\tau,t)v_0(\Delta\tau,t+\tau)+v_{k-1}(\tau,t)v_1(\Delta\tau,t+\tau)+o(\Delta\tau)=$$
$$=v_k(\tau,t)(1-\lambda(t+\tau)\Delta\tau)+v_{k-1}(\tau,t)\lambda(t+\tau)\Delta\tau+o(\Delta\tau),$$

звідки

$$\frac{v_k(\tau+\Delta\tau,t)-v_k(\tau,t)}{\Delta\tau}=\lambda(t+\tau)(v_{k-1}(\tau,t)-v_k(\tau,t))+o(1),$$

$$\frac{\partial v_k(\tau,t)}{\partial\tau}=\lambda(t+\tau)(v_{k-1}(\tau,t)-v_k(\tau,t)). \tag{1.13}$$

Останнє співвідношення, доведене нами для всіх $k>0$, як засвідчує (1.12), залишається вірним, і при $k=0$, якщо покласти $v_{-1}(\tau,t)\equiv 0$.

Визначимо розв'язок системи (1.13) за допомогою методу *твірних функцій*. Покладемо $F(t,\tau,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}v_k(\tau,t)x^k$. Домножуючи усі члени рівняння (1.13) на $x^k$ і сумуючи по $k$ від 0 до $\infty$, отримуємо:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}=\lambda(t+\tau)\sum_{k=0}^{\infty}v_{k-1}(\tau,t)x^k-\lambda(t+\tau)F=(x-1)\lambda(t+\tau)F,$$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \tau}=(x-1)\lambda(t+\tau),$$

$$\ln F(t,\tau,x)-\ln F(t,0,x)=(x-1)\int_0^{\tau}\lambda(t+u)du=(x-1)\Lambda(\tau,t). \qquad (1.14)$$

За будь-яких $x$ і $t$ маємо $F(t,0,x)=v_0(0,t)=1$, тому з (1.14) випливає:

$$F(t,\tau,x)=e^{(x-1)\Lambda(\tau,t)}=e^{-\Lambda(\tau,t)}e^{x\Lambda(\tau,t)}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\Lambda(\tau,t)}\frac{\left(\Lambda(\tau,t)\right)^k}{k!}x^k.$$

Порівнюючи одержаний вираз з означенням функції $F(t,\tau,x)$, одержуємо:

$$v_k(\tau,t)=e^{-\Lambda(\tau,t)}\frac{\left(\Lambda(\tau,t)\right)^k}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (1.15)$$

Отже, ми бачимо, що й для потоку зі змінним параметром кількість подій у проміжку $(t,\ t+\tau)$ розподілена за законом Пуассона; однак параметр цього закону тепер залежить не лише від довжини $\tau$ цього проміжку, а й від його початкового моменту $t$. У випадку стаціонарного потоку ми мали закон Пуассона з параметром $\lambda\tau$; при переході до нестаціонарного випадку ми повинні, як бачимо, замінити стале число $\lambda$ виразом:

$$\frac{\Lambda(\tau,t)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\lambda(t+u)du,$$

тобто середнім значенням $\lambda(x)$ у проміжку $t\le x\le t+\tau$. Навпаки, якщо функція $\lambda(x)=\lambda$ є сталою величиною, то, очевидно, для всіх $t$

$$\Lambda(\tau,t)=\int_0^{\tau}\lambda(t+u)du=\lambda\tau$$

і формули (1.15) переходять у розв'язки, одержані для стаціонарного випадку.

Зазначимо, що кількість подій у проміжку $(t,\ t+\tau)$, розподілена за законом Пуассона (1.15), має своїм математичним сподіванням параметр цього закону, тобто величину



$\Lambda(\tau,t)=\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du$; тому величину $\Lambda(\tau,t)\ /\tau$ розуміють як *середню інтенсивність* потоку на проміжку $(t,\ t+\tau)$; а границя цієї величини при $\tau\to 0$ є *миттєвою інтенсивністю* $\mu(t)$ цього потоку в момент $t$:

$$\mu(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Lambda(\tau,t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du=\lambda(t).$$

Отже, і у випадку найпростішого потоку зі змінним параметром миттєва інтенсивність потоку дорівнює миттєвому значенню параметра.

## § 1. 3. Потік подій як випадковий процес

Позначимо через $x(t)$ кількість подій, що відбуваються за проміжок часу $(0,\ t)$, тоді для кожного фіксованого значення $t>0$ $x(t)$ є випадкова величина. При змінному $t$ $x(t)$ – однопараметрична сім'я випадкових величин, яку називають *випадковим процесом* або *випадковою функцією*. Функція $x(t)$ може набувати лише цілих невід'ємних значень і зі зростанням $t$ ніколи не спадає.

Для задання будь-якого випадкового процесу $x(t)$ треба, щоб для *будь-якої* групи додатних чисел $t_1,\ t_2\ldots\ t_n$ було задано $n$-вимірний закон розподілу вектора $x(t_1),\ x(t_2)\ldots\ x(t_n)$.

Якщо процес $x(t)$ є потоком подій і, отже, $x(t)$ може набувати лише цілих невід'ємних значень, то для задання цього потоку як випадкового процесу треба задати для *кожної* групи додатних $t_1,\ t_2\ldots\ t_n$ і для *кожної* групи цілих невід'ємних чисел $k_1,\ k_2\ldots\ k_n$ ймовірність системи рівностей $x(t_1)=k_1,\ x(t_2)=k_2\ldots\ x(t_n)=k_n$. Очевидно, ця ймовірність може бути відмінною від нуля лише у випадку, коли при $t_1<t_2<\ldots<t_n$ матимемо $k_1\le k_2\le\ldots\le k_n$. Зокрема, $(n=1)$, для будь-якого $t>0$ і будь-якого цілого невід'ємного $k$, повинна бути відома ймовірність рівності $x(t)=k$, яку ми позначимо через $v_k(t)$. Отже, система функцій $v_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2\ldots)$ входить як обов'язковий елемент до складу опису кожного потоку подій.

Загалом, однак, задання цієї системи функцій для вичерпної характеристики потоку ще недостатньо.

Потік подій називають ***стаціонарним***, якщо при $0< t_1< <t_2<\ldots< t_n$ і при будь-якому додатному $a$ закон розподілу вектора $x(t_i)$ $(i=1,2\ldots n)$ збігається з законом розподілу вектора $x(a+t_i)–x(a)$ $(i=1,2\ldots n)$. Іншими словами, закон розподілу вектора $x(a+t_i)–x(a)$ $(i=1,2\ldots n)$ залежить від чисел $t_i$, проте не залежить від $a$. Зокрема, $(n=1)$, $v_k(t)$ для стаціонарного потоку означає ймовірність появи $k$ подій в проміжку $(a, a+t)$, де $a\geq 0$ – довільне, тобто у будь-якому проміжку довжини $t$.

Потік подій називають ***потоком без післядії,*** якщо закон розподілу вектора $x(a+t_i)–x(a)$ $(t_i>0,\ \ i=1,2\ldots n)$ при будь-якому $a\geq 0$ не залежить від значення величини $x(t)$ при $t<a$. Це означення – математично строго сформульована вимога, щоб випадкове протікання потоку подій після будь-якого моменту часу $a$ не залежало від його протікання до моменту $a$.

Легко бачити, що *стаціонарний потік без післядії* цілком характеризується системою функцій $v_k(t)$ $(k=0,\ 1,\ 2\ldots)$, тобто законом розподілу кількості подій, що з'являються протягом (де завгодно розташованого) проміжку часу довжини $t$. Справді, оскільки система рівностей $x(t_i)=k_i$ $(i=1,2\ldots n;\ \ 0< t_1< t_2<\ldots< t_n)$, очевидно, рівносильна системі рівностей $x(t_i)–x(t_{i-1})=k_i–k_{i-1}$ $(i=1,\ldots,n)$, де $t_0=k_0=x(t_0)=0$, то:

$$P\{x(t_i)=k_i,\ i=1,\ldots,n\}=P\{x(t_i)–x(t_{i-1})= –k_{i-1},\ i=1,2\ldots n\}.$$

Оскільки проміжки $(0,\ t_1)$, $(t_1,\ t_2)\ldots$ $(t_{n-1},\ t_n)$ взаємно не перетинаються, то внаслідок відсутності післядії

$$P\{x(t_i)=k_i,\quad i=\overline{1,n}\ \}=\prod_{i=1}^{n}P\{x(t_i)-x(t_{i-1})=k_i-k_{i-1}\},$$

а оскільки внаслідок стаціонарності потоку

$$P\{x(t_i)-x(t_{i-1})=k_i-k_{i-1}\}=$$
$$=P\{x(t_i-t_{i-1})=k_i-k_{i-1}\}=v_{k_i-k_{i-1}}(t_i-t_{i-1}),\quad i=\ \overline{1,n}$$

(тут враховано, що $x(t_i)-x(t_{i-1})=x(t_i-t_{i-1})$ ), то



$$P\{x(t_i)=k_i,\quad i=\overline{1,n}\ \}=\prod_{i=1}^{n}v_{k_i-k_{i-1}}(t_i-t_{i-1}).$$

Отже, заданням системи функцій $v_k(t)$ справді однозначно визначаються ймовірності вигляду $P\{x(t_i)=k_i,\quad i=\overline{1,n}\ \}$, тобто цілком характеризується цей потік як випадковий процес.

Зокрема, для найпростішого потоку з параметром $\lambda$ ми мали:

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad (k=0,\ 1,\ 2\ldots),$$

тому для найпростішого потоку з параметром $\lambda$ при $0=t_0< t_1< t_2<\ldots< t_n$, $0=k_0\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_n$ визначальною є формула:

$$P\{x(t_i)=k_i,\quad i=\overline{1,n}\ \}=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\frac{\lambda^{k_i-k_{i-1}}(t_i-t_{i-1})^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}=e^{-\lambda t_n}\lambda^{k_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(t_i-t_{i-1})^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}.$$

## § 1. 4. Основна властивість стаціонарних потоків

Для будь-якого стаціонарного потоку домовимось, як і раніше позначати через $w(t)$ ймовірність того, що протягом проміжку часу довжини $t$ відбудеться хоча б одна подія, тобто:

$$w(t)=1-v_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t).$$

Вище ми переконались, що як для *найпростішого потоку*, так і для *стаціонарного потоку без післядії* відношення $w(t)/t$ при $t\to 0$ прямує до певної границі $\lambda$, яку ми назвали параметром потоку і який має важливе значення для вивчення основних властивостей цього потоку. Співвідношення

$$\frac{w(t)}{t}\to\lambda,\qquad t\to 0, \tag{1.16}$$

рівносильне такому:

$$w(t)=\lambda t+o(t),\qquad t\to 0, \tag{1.17}$$

і виводиться як прямий наслідок вимог стаціонарності та відсутності післядії (при виведенні формули $v_0(t)=e^{-\lambda t}$

ординарність не використовується).

Доведемо, що співвідношення (1.16) справедливе *для будь-якого стаціонарного потоку*.

Розглянемо лему теорії границь, яку використовуватимемо і надалі.

***Лема.*** Нехай функція $f(x)$ – невід'ємна і неспадна для $0<x\le a$ і $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ для $x, y, x+y\in(0, a)$. Тоді відношення $f(x)/x$ при $x\to 0$ або безмежно зростає, або прямує до деякої границі; ця границя дорівнює нулю лише в тривіальному випадку $f(a)=0$.

***Доведення.*** З нерівності $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ випливає, що:

$$f(x)\le mf\left(\frac{x}{m}\right) \tag{1.18}$$

для $0<x\le a$ і будь-якого натурального $m$. Зокрема, при $x=a$

$$\frac{f\left(\frac{a}{m}\right)}{\frac{a}{m}}\ge\frac{f(a)}{a},\qquad m=1,\ 2\ldots.$$

Це означає, що (крім тривіального випадку $f(a)=0$ ):

$$\alpha=\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{f(x)}{x}\ge\frac{f(a)}{a}>0,$$

причому не виключений випадок $\alpha=+\infty$.

Припустимо спочатку, що $\alpha<+\infty$. Нехай число $c>0$, а саме:

$$\frac{f(c)}{c}>\alpha-\varepsilon, \tag{1.19}$$

де $\varepsilon>0$ – будь-яке мале наперед задане число, і нехай $0<x<c$. Визначимо натуральне число $m\ge 2$ з нерівностей $\frac{c}{m}\le x<\frac{c}{m-1}$; тоді внаслідок (1.18) і припущення монотонності $f(x)$

$$\frac{f(x)}{x}\ge\frac{f\left(\frac{c}{m}\right)}{\frac{c}{m-1}}=\frac{m-1}{m}\frac{mf\left(\frac{c}{m}\right)}{c}\ge\frac{m-1}{m}\frac{f(c)}{c}, \tag{1.20}$$

і, отже, внаслідок (1.19) $\frac{f(x)}{x}\ge\left(1-\frac{1}{m}\right)(\alpha-\varepsilon)$, а оскільки $\varepsilon$ – довільно мале і $m\to\infty$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\alpha$, і лему доведено для $\alpha<+\infty$. Міркування залишаються в принципі такими самими при $\alpha=+\infty$. Беремо довільно велике $A>0$ і вибираємо число $c$ так, що $f(c)/c>A$; тоді з (1.20) маємо $\frac{f(x)}{x}\ge\frac{m-1}{m}A$, і, отже, $\frac{f(x)}{x}\to\infty$ при $x\to 0$. □

***Теорема.*** Для будь-якого стаціонарного потоку існує границя:

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}=\lambda>0,$$

причому не виключений випадок $\lambda=+\infty$.

***Доведення.*** Досить показати, що функція $w(t)$ на деякому проміжку $(0, a)$ задовольняє усі умови леми. Очевидно, що $w(t)\ge 0$ і зі зростанням $t$ не може спадати (чим більший проміжок, тим більша ймовірність, що відбудеться хоча б одна подія). Очевидно також, що $w(a)>0$, якщо відкинути тривіальний випадок потоку, в якому події взагалі неможливі. Нарешті, якщо відбулась хоча б одна подія на проміжку $(0, t_1+t_2)$, то, очевидно, те саме повинно виконуватись хоча б для одного з проміжків $(0, t_1)$ і $(t_1, t_1+t_2)$, звідки:

$$w(t_1+t_2)\le w(t_1)+w(t_2)\quad(t_1>0,\ t_2>0,\ t_1+t_2<a).$$

Застосовуючи лему, бачимо, що теорему доведено. □

Для стаціонарного потоку без післядії $v_0(t)=e^{-\lambda t}$ ($\lambda>0$ – стала), окрім випадків, коли в будь-якому проміжку часу або з вірогідністю взагалі не відбуваються події, або з вірогідністю виникає нескінченно багато подій. Ці два випадки, які не мають практичного значення, ми домовились не розглядати. Звідси, *для стаціонарного потоку без післядії*:

$$w(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad \lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t} = \lambda.$$

Отже, границя, існування якої ми довели в теоремі, завжди є деяким скінченним додатним числом. Однак, якщо припустити можливість післядії, $\lambda$ може перетворюватися в $+\infty$.

## § 1. 5. Загальна форма стаціонарного потоку без післядії

Як ми бачили раніше, стаціонарний потік без післядії однозначно визначається заданням функцій $v_k(t)$ ($k$=0, 1, 2…), причому завжди $v_0(t) = e^{-\lambda t}$. Тому загальний вигляд стаціонарного потоку без післядії однозначно визначається загальним виглядом сім'ї функцій $v_k(t)$.

Спочатку доведемо, що для такого потоку при будь-якому $k$>0 відношення $v_k(t)/t$ при $t\to 0$ прямує до певної границі, яка може бути або нулем, або додатним числом.

Позначимо через $\psi_k(t)$ ($k$=0, 1, 2…) ймовірність того, що на проміжку довжини $t$ відбудеться хоча б $k$ подій, отож для $k$=0, 1, 2…:

$$\psi_k(t) = \sum_{i=k}^{\infty} v_i(t), \;\; v_k(t) = \psi_k(t) - \psi_{k+1}(t),$$

$$\psi_0(t) = 1, \quad \psi_1(t) = w(t), \quad \psi_2(t) = \psi(t).$$

У попередньому параграфі ми довели, що для будь-якого стаціонарного потоку відношення $\psi_1(t)/t$ при $t\to 0$ прямує до певної границі, скінченної або нескінченної. У випадку потоку без післядії цей результат є тривіальним, оскільки $\psi_1(t) = w(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, звідки $\psi_1(t)/t\to\lambda$ при $t\to 0$. Однак ми тепер переконаємось, що у випадку стаціонарного потоку без післядії границя відношення $\psi_k(t)/t$ при $t\to 0$ існує для всіх $k$>0. Оскільки $v_k(t) = \psi_k(t) - \psi_{k+1}(t)$, то звідси випливатиме, що й границя відношення $v_k(t)/t$ при $t\to 0$ існує для всіх $k$>0. У випадку найпростішого потоку ми маємо, звичайно, що $v_1(t)/t\to\lambda$, $v_k(t)/t\to 0$ ($k$> 1).

***Лема.*** Нехай функція $f(x)$ – невід'ємна і неспадна на відрізку $0<x\le a$, відношення $f(x)/x$ обмежене на цьому відрізку і

$$f(nx) \le nf(x) + cn^2x^2, \tag{1.21}$$

де $c$>0 – стала, $n$ – будь-яке натуральне число і $0<nx\le a$; тоді відношення $f(x)/x$ при $x\to 0$ прямує до деякої границі $l\ge 0$.

***Доведення.*** Беручи в (1.21) $x=x_0/n$, де $0<x_0\le a$, одержуємо:

$$f(x_0) \le nf\left(\frac{x_0}{n}\right) + cx_0^{\,2},$$

звідки:

$$\frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} \ge \frac{f(x_0)}{x_0} - cx_0. \tag{1.22}$$

Покладемо $\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{f(x)}{x} = l$; ми можемо взяти $l$>0, оскільки при $l$=0 твердження леми тривіальне. Нехай $\varepsilon$>0 – задане довільно. Виберемо $x_0 < \frac{\varepsilon}{c}$ і так, щоб $\frac{f(x_0)}{x_0} > l - \varepsilon$. Нехай $0<x<x_0$ і натуральне число $n$>1 визначається нерівностями $\frac{x_0}{n} \le x < \frac{x_0}{n-1}$; тоді внаслідок (1.22):

$$\frac{f(x)}{x} \ge \frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n-1}} = \frac{n-1}{n}\frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} \ge \frac{n-1}{n}\frac{f(x_0)}{x_0} - cx_0 \ge$$

$$\ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)(l-\varepsilon) - \varepsilon > l - 3\varepsilon.$$

Оскільки, з другого боку, $\dfrac{f(x)}{x} < l + \varepsilon$ для достатньо малих $x$, то $\dfrac{f(x)}{x} \to l, \quad x \to 0,$ і лему доведено. □

Щоб довести існування границі відношення $\psi_k(t)/t$ при $t \to 0$, нам необхідно лише переконатися, що функція $\psi_k(t)$ при $k=1, 2\ldots$ задовольняє всі умови доведеної леми. Невід'ємність і монотонність $\psi_k(t)$ на будь-якому відрізку очевидні. Далі, зі співвідношень $\psi_k(t) \le \psi_1(t) = w(t)$ і $w(t)/t \to \lambda$ $(t \to 0)$ випливає обмеженість $\psi_k(t)/t$ на будь-якому відрізку. Тому нам залишається лише перевірити, що $\psi_k(t)$ задовольняє співвідношення (1.21).

Позначимо через $g_l$ верхню межу відношення $\psi_l(t)/t$ в області $0<t<+\infty$ $(l \ge 1)$ і покладемо $A_k = \sum_{l=1}^{k-1} g_l g_{k-l}$. Ми стверджуємо, що:

$$\psi_k(nt) \le n\psi_k(t) + A_k \frac{n(n-1)}{2} t^2, \tag{1.23}$$

звідки й випливатиме, що функція $\psi_k(t)$ задовольняє співвідношення (1.21).

Нерівність (1.23) доведемо за допомогою індукції по $n$. При $n=1$ вона тривіальна. Припустимо, що для деякого $n$ вона справедлива. Для того, щоб на відрізку $[0, (n+1)t]$ довжини $(n+1)t=nt+t$ відбулось не менше $k$ подій (імовірність цього дорівнює $\psi_k((n+1)t)$ ), необхідно, щоб за деякого $l$ ( $0 \ge l \ge k$ ) було не менше $l$ подій на проміжку $(0, t)$ і не менше $k-l$ подій на відрізку $[t, (n+1)t]$ (довжини $nt$); тому:

$$\psi_k((n+1)t) \le \sum_{l=0}^{k} \psi_l(t)\psi_{k-l}(nt) = \psi_0(t)\psi_k(nt) + \psi_k(t)\psi_0(nt) +$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1} \psi_l(t)\psi_{k-l}(nt) \le \psi_k(nt) + \psi_k(t) + nt^2 \sum_{l=1}^{k-1} g_l g_{k-l} = \psi_k(nt) + \psi_k(t) + A_k nt^2.$$

Унаслідок (1.23) отримаємо:

$$\psi_k((n+1)t) \le (n+1)\psi_k(t) + A_k \frac{n(n+1)}{2} t^2,$$



а це і є співвідношення (1.23) з $n+1$ замість $n$.

Отже, функція $\psi_k(t)$ при $k=1, 2\ldots$ задовольняє всі умови леми, і тому при $t \to 0$ відношення $\psi_k(t)/t$, а, отже, і відношення $v_k(t)/t$ прямують до деяких границь. Оскільки $w(t)/t \to \lambda > 0$ при $t \to 0$, то й відношення $v_k(t)/w(t)$ при цьому має деяку границю. Покладемо:

$$\lim_{t \to 0} \frac{v_k(t)}{w(t)} = p_k, \quad (k = 1, \ 2\ldots).$$

Відношення $v_k(t)/w(t)$ – це ймовірність появи $k$ подій на проміжку часу довжини $t$, якщо відомо, що на цьому проміжку події відбуваються. Тому число $p_k$ можна розглядати як імовірність появи $k$ подій у певний момент, якщо відомо, що в цей момент взагалі події відбуваються.

Перейдемо до визначення загального вигляду функцій $v_k(t)$ для стаціонарного потоку без післядії. Для такого потоку раніше було встановлено співвідношення:

$$v_k(t+\tau) = \sum_{l=0}^{k} v_l(\tau) v_{k-l}(t) \qquad (t > 0, \quad \tau > 0, \quad k = 0, \ 1, \ 2\ldots);$$

оскільки при $\tau \to 0$ $v_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\lambda\tau)$, то звідси при $k>0$

$$v_k(t+\tau) = (1-\lambda\tau)v_k(t) + \sum_{l=1}^{k} v_l(\tau) v_{k-l}(t) + o(\tau),$$

і, отже,

$$\frac{v_k(t+\tau) - v_k(t)}{\tau} = -\lambda v_k(t) + \sum_{l=1}^{k} \frac{v_l(\tau)}{\tau} v_{k-l}(t) + o(1).$$

Однак при $l>0$ і $\tau \to 0$ згідно з доведеним вище:

$$\frac{v_l(\tau)}{\tau} = \frac{v_l(\tau)}{w(\tau)} \frac{w(\tau)}{\tau} \to \lambda p_l;$$

тому граничний перехід доводить існування $v_k'(t)$ і є справедливим

$$v_k'(t) = -\lambda v_k(t) + \lambda \sum_{l=1}^{k} p_l v_{k-l}(t) \qquad (k = 1, \ 2\ldots). \tag{1.24}$$

Додаючи сюди очевидне співвідношення:

$$v_0'(t) = -\lambda v_0(t), \tag{1.25}$$

отримуємо систему рівнянь для однозначного визначення функцій

$v_k(t)$. Використовуючи заміну $v_k(t) = e^{-\lambda t} u_k(t)$, з (1.24) можна послідовно визначити:

$$v_1(t) = \lambda p_1 t e^{-\lambda t}, \quad v_2(t) = \left( \lambda p_2 t + \frac{(\lambda p_1 t)^2}{2!} \right) e^{-\lambda t} \ldots.$$

Для виявлення структури стаціонарного потоку без післядії розглянемо твірну функцію потоку $F(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) x^k$. Домножуючи співвідношення (1.24) (для $k$=0 – (1.25) ) на $x^k$ і сумуючи по $k$ від 0 до ∞, знаходимо:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda F + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{l=1}^{k} p_l v_{k-l}(t) = -\lambda F + \lambda \sum_{l=1}^{\infty} p_l \sum_{q=0}^{\infty} v_q(t) x^{q+l} =$$

$$= -\lambda F + \lambda \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l \sum_{q=0}^{\infty} v_q(t) x^q,$$

або, покладаючи $\sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l = \Phi(x)$, одержимо:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda(\Phi(x) - 1) F, \quad \frac{\partial \ln F}{\partial t} = \lambda(\Phi(x) - 1).$$

Оскільки за будь-якого $x$ $F(0,x)=v_0(0)=1$, то інтегруванням по $t$ остаточно визначаємо:

$$F(t,x) = e^{\lambda(\Phi(x)-1)t}. \tag{1.26}$$

Зазначимо, що при будь-якому $t$ $F(t,1) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1$, унаслідок чого (1.26) дає $\Phi(1) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l = 1$.

Отже, твірна функція $F(t,x)$ для будь-якого стаціонарного потоку без післядії матиме вигляд (1.26), де $\lambda$>0, $\Phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l$, $p_l \geq 0$, $\sum_{l=1}^{\infty} p_l = 1$. Крім того, для кожного стаціонарного потоку без післядії потік моментів часу, в які виникають події, є найпростішим з параметром $\lambda$. Проте сам потік подій загалом не є найпростішим, оскільки в кожен момент появи



події можна з імовірністю, відмінною від нуля, зафіксувати і понад одну подію. Отже, для вичерпного задання цього потоку необхідно, крім параметра $\lambda$, задати ще закон розподілу (ймовірності $p_1$, $p_2$…) кількості подій, які відбуваються в будь-який момент появи. Очевидно, ці міркування цілком визначають структуру будь-якого стаціонарного потоку без післядії.

Зазначимо ще, що у випадку $p_1$=1, $p_k$=0 ($k$>1) (у кожен момент появи відбувається лише одна подія):

$$\Phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l = p_1 x = x,$$

і формула (1.26) дає нам твірну функцію найпростішого потоку з параметром $\lambda$:

$$F(t,x) = e^{\lambda t(x-1)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t x} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) x^k.$$

# Розділ 2
# Граничні теореми для сумарних потоків

## § 2. 1. Функції Пальма

Розглянемо два послідовні проміжки часу, з яких перший має довжину $\tau$, а другий – $t$ (далі: проміжок $\tau$, проміжок $t$ ). Позначимо для даного стаціонарного потоку через $H_k(\tau, t)$ $(k\geq 0)$ ймовірність такої подвійної події $AB$: $A$ – в проміжку $\tau$ відбудеться хоча б одна подія; $B$ – в проміжку $t$ відбудеться не більше $k$ подій. Ці дві події загалом будуть взаємозалежними (тут нема припущення, що потік без післядії). Оскільки ймовірність події $A$ $P(A)=w(\tau)$, а $H_k(\tau, t)=P(AB)$, то відношення:

$$\frac{H_k(\tau,t)}{w(\tau)}=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{2.1}$$

виражає умовну ймовірність $P(B/A)$ події $B$ за умови, що відбулася подія $A$, тобто ймовірність появи не більше $k$ подій у проміжку $t$ за умови, що в проміжку $\tau$ з'явилася хоча б одна подія.

Якщо це відношення при $\tau\to 0$ (і при сталому $t$) прямує до деякої границі, то цю границю природно назвати умовною ймовірністю появи не більше $k$ подій у проміжку $t$ за умови, що в початковий момент цього проміжку відбулась подія.

Переконаємось тепер, що границя відношення (2.1) при $\tau\to 0$ (і сталому $t$) завжди існує, якщо лише стаціонарний потік має *скінченний* параметр $\lambda$. З цією метою розглянемо спочатку відношення $H_k(\tau,t)/\tau$. Щоб довести існування границі цього відношення при $\tau\to 0$, досить переконатися, що $H_k(\tau, t)$ як функція від $\tau$ задовольняє усі умови леми §1.4. Невід'ємність і монотонність цієї функції очевидні. Нехай $\tau=\tau_1+\tau_2$ і проміжок $\tau_1$ передує проміжку $\tau_2$. Тоді, якщо виконана подвійна подія $AB$, то, очевидно, виконується хоча б одна з таких двох подій: $A_2$ – у проміжку $\tau_2$ має місце хоча б одна подія, а в проміжку $t$ – не більше $k$ подій $(P(A_2)=H_k(\tau_2, t))$; $A_1$ – у проміжку $\tau_1$ має місце хоча б одна подія, а в проміжку $\tau_2+t$ – не більше $k$ подій $(P(A_1)=H_k(\tau_1,\tau_2+t)\leq H_k(\tau_1, t)$, оскільки при фіксованому $\tau$ $H_k(\tau,t)$, очевидно, є незростаюча функція від $t$). З того, що $AB\subset A_1+A_2$, знаходимо:

$$H_k(\tau_1+\tau_2, t)\leq H_k(\tau_1, t)+H_k(\tau_2, t),$$

тобто функція $H_k(\tau,t)$ задовольняє (відносно $\tau$) і останню умову леми. Застосовуючи лему, ми бачимо, що відношення $H_k(\tau, t)/\tau$ при $\tau\to 0$ прямує до деякої границі або безмежно зростає. Проте останній випадок неможливий, оскільки, очевидно, завжди $H_k(\tau,t)\leq w(\tau)$ (бо $AB\subset A$), а відношення $w(\tau)/\tau$ за нашим припущенням прямує до скінченної границі $\lambda$ ($w(\tau)/\tau\to\lambda$ для будь-якого стаціонарного потоку, однак ми додатково припустили, що $\lambda<\infty$).

Нарешті,

$$\frac{H_k(\tau,t)}{w(\tau)}=\frac{H_k(\tau,t)/\tau}{w(\tau)/\tau};$$

чисельник і знаменник цього дробу прямують при $\tau\to 0$ до певних границь; тому й існує границя

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{H_k(\tau,t)}{w(\tau)}=\Phi_k(t), \tag{2.2}$$

яка, зрозуміло, є функцією від $t$.

Покладемо тепер

$$h_0(\tau, t)=H_0(\tau, t),\quad h_k(\tau, t)=H_k(\tau, t)-H_{k-1}(\tau, t),\quad k=1, 2\dots.$$

Очевидно, $h_k(\tau, t)$ – це ймовірність того, що: 1) у проміжку $\tau$ має місце хоча б одна подія; 2) у проміжку $t$ є саме $k$ подій. Відношення $h_k(\tau, t)/w(\tau)$ – це умовна ймовірність існування $k$ подій у проміжку $t$ за умови, що у проміжку $\tau$ є хоча б одна подія. З (2.2) випливають співвідношення:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h_0(\tau,t)}{w(\tau)}=\Phi_0(t),\qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{h_k(\tau,t)}{w(\tau)}=\Phi_k(t)-\Phi_{k-1}(t),\qquad k=1,2\dots.$$

Покладаючи $\varphi_0(t)=\Phi_0(t)$, $\varphi_k(t)=\Phi_k(t)-\Phi_{k-1}(t)$, $k=1, 2\dots$, маємо:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h_k(\tau,t)}{w(\tau)}=\varphi_k(t),\qquad k=0,1,2\dots.$$

Функції $\varphi_k(t)$ ми й називатимемо ***функціями Пальма.*** Функцію $\varphi_k(t)$ можна розуміти як імовірність появи $k$ подій у проміжку довжини $t$ за умови, що в початковий момент цього проміжку відбулась подія. Цим вона відрізняється від функції $v_k(t)$, яка є ймовірністю тієї ж події за умови, що відносно початкового моменту нічого невідомо.

Отже, вся сукупність функцій Пальма однозначно визначається для будь-якого стаціонарного потоку зі *скінченним* параметром $\lambda$.

Оскільки $H_k(\tau, t)$ щодо $t$ є функція незростаюча, а $w(\tau)$ від $t$ не залежить, то всі функції $\Phi_k(t)$ (див. (2.2) ), зокрема $\Phi_0(t)=\varphi_0(t)$ – незростаючі в області $0<t<+\infty$.

## § 2. 2. Формули Пальма

Функції Пальма зв'язані з основними функціями $v_k(t)$ кожного стаціонарного потоку простими і важливими формулами, які ми зараз виведемо.

Припустимо, що заданий стаціонарний потік – *ординарний* і має *скінченний* параметр $\lambda$. Розглянемо знову проміжок часу довжини $\tau+t$, до складу якого входять "проміжок $\tau$" і "проміжок $t$", розташовані послідовно один за одним. Позначимо через $n_1$ і $n_2$, відповідно, кількості подій у проміжках $\tau$ і $t$ ($n_1$ і $n_2$ – випадкові величини). Маємо, очевидно,

$$v_k(\tau+t)=P\{n_1+n_2=k\}=\sum_{l=0}^{k}P\{n_1=l,\ n_2=k-l\},$$

звідки внаслідок ординарності потоку при $\tau\to 0$:

$$v_k(\tau+t)=P\{n_1=0,\quad n_2=k\}+P\{n_1=1,\quad n_2=k-1\}+o(\tau). \tag{2.3}$$

Оскільки $P\{\ n_2=k\}=P\{n_1=0,\quad n_2=k\}+P\{n_1>0,\quad n_2=k\}$, то

$$\begin{aligned}P\{n_1=0,\quad n_2=k\}=P\{\ n_2=k\}-P\{n_1>0,\quad n_2=k\}=\\=v_k(t)-h_k(\tau,t)\end{aligned} \tag{2.4}$$

(див. означення $h_k(\tau, t)$ з попереднього параграфа). Разом з тим,

$$\begin{aligned}P\{n_1=1,\quad n_2=k-1\}=P\{n_1>0,\quad n_2=k-1\}-\\-P\{n_1>1,\quad n_2=k-1\}=h_{k-1}(\tau,t)+o(\tau).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Підставляючи (2.4) і (2.5) в (2.3), знаходимо:

$$v_k(t+\tau)=v_k(t)-h_k(\tau,t)+h_{k-1}(\tau,t)+o(\tau),$$



звідки:

$$\frac{v_k(t+\tau)-v_k(t)}{\tau}=\frac{h_{k-1}(\tau,t)}{w(\tau)}\frac{w(\tau)}{\tau}-\frac{h_k(\tau,t)}{w(\tau)}\frac{w(\tau)}{\tau}+o(1).$$

Унаслідок результатів попереднього параграфа (там розглядається стаціонарний потік зі скінченним параметром $\lambda$; $w(\tau)/\tau\to\lambda$, $h_k(\tau\ ,t)/\tau\to\varphi_k(t)$ при $\tau\to 0$) звідси випливає диференційовність функції $v_k(t)$ і співвідношення:

$$v_k'(t)=\lambda(\varphi_{k-1}(t)-\varphi_k(t))\qquad (k>0). \tag{2.6}$$

При $k$=0 аналогічні міркування дають $v_0'(t)=-\lambda\varphi_0(t)$, отож формули Пальма (2.6) мають місце й при $k$=0, якщо покласти $\varphi_{-1}(t)\equiv 0$.

Позначимо через $V_m(t)=\sum_{k=0}^{m}v_k(t)$ ймовірність появи у проміжку довжини $t$ не більше, ніж $m$ подій. Сумуючи співвідношення (2.6) для $k$=0, 1…$m$, знаходимо:

$$V_m'(t)=-\lambda\varphi_m(t),\quad m=0,\ 1,\ 2\dots. \tag{2.7}$$

Формули (2.6) і (2.7) і були метою нашого виведення. Їх інколи зручніше застосовувати в інтегральній формі. Інтегруючи обидві частини (2.7) від 0 до $t$, знаходимо:

$$V_m(+0)-V_m(t)=\lambda\int_0^t\varphi_m(u)du,\quad (m=0,\ 1,\ 2\dots),$$

однак $V_m(+0)$=1. Справді, маємо $V_m(+0)\geq V_0(+0)=v_0(+0)=1-w(+0)$; а оскільки при $t\to 0$ $w(t)/t\to\lambda<+\infty$, то $w(+0)=0$ (бо границя $w(t)/t$ при $t\to 0$ може бути скінченною лише у випадку невизначеності 0/0). Отже, $V_m(+0)$=1. Отож ми отримуємо для всіх $t>0$:

$$1-V_m(t)=\lambda\int_0^t\varphi_m(u)du,\quad (m=0,\ 1,\ 2\dots), \tag{2.8}$$

звідки як наслідок рівностей $v_k(t)=V_k(t)-V_{k-1}(t)$ випливають співвідношення:

$$v_0(t)=1-\lambda\int_0^t \varphi_0(u)du;$$
$$v_k(t)=\lambda\int_0^t (\varphi_{k-1}(u)-\varphi_k(u))du \qquad (k=1,\ 2\ldots). \tag{2.9}$$

Формули (2.9) просто і безпосередньо виражають функції $v_k(t)$ стаціонарного ординарного потоку через функції Пальма $\varphi_k(t)$. Зазначимо, що ці формули можна одержати інтегруванням безпосередньо з (2.6).

## § 2. 3. Інтенсивність стаціонарного потоку, теорема Королюка

У § 1.1 ми домовились називати *інтенсивністю* $\mu$ стаціонарного потоку математичне сподівання кількості подій за одиницю часу. Внаслідок адитивності математичних сподівань ми маємо тоді, що математичне сподівання кількості подій у проміжку довжини $t$ для стаціонарного потоку пропорційне $t$, тобто $\sum_{k=0}^{\infty} kv_k(t)=\mu t.$ Раніше ми переконались, що завжди $\mu\ge\lambda,$ а для найпростішого потоку $\mu=\lambda.$

Продовжимо дослідження співвідношення між параметрами $\mu$ і $\lambda$. Розглянемо спочатку випадок *стаціонарного потоку без післядії*. У §1.5 ми бачили, що для таких потоків твірна функція має вигляд:

$$F(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)x^k=e^{\lambda t(\Phi(x)-1)},$$

де $\lambda>0,\quad \Phi(x)=\sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l,\quad p_l\ge 0\quad (l=1,\ 2,\ldots),\quad \sum_{l=1}^{\infty} p_l=1.$

Оскільки, очевидно, $\mu t=\sum_{k=0}^{\infty} kv_k(t)=\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)_{x=1}$ і

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=\lambda t e^{\lambda t(\Phi(x)-1)}\Phi'(x)=F(t,x)\lambda t\Phi'(x),\qquad F(t,1)=\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)=1,$$



то $\mu t=\lambda t\Phi'(1)=\lambda t(p_1+2p_2+3p_3+\ldots),$ звідки:

$$\mu=\lambda(p_1+2p_2+3p_3+\ldots)=\lambda(1+p_2+2p_3+3p_4\ldots).$$

Оскільки $\sum_{l=1}^{\infty} p_l=1$ і $p_l\ge 0$ $(l=1,\ 2\ldots),$ то безпосередньо бачимо, що для рівності $\mu=\lambda$ необхідно і достатньо мати: $p_1=1,\quad p_2=p_3=\ldots=0.$ Проте тоді цей потік – найпростіший (бо стаціонарний, ординарний і без післядії).

Отже, *серед стаціонарних потоків без післядії лише найпростіші потоки задовольняють умову $\mu=\lambda$; для всіх інших $\mu>\lambda$.*

Оскільки для стаціонарного потоку без післядії ординарність є необхідною і достатньою умовою того, щоб цей потік був найпростішим, то можна ще сказати, що *для стаціонарного потоку без післядії, інтенсивність якого скінченна, необхідною і достатньою умовою рівності $\mu=\lambda$ є ординарність цього потоку*.

Виведені в попередньому параграфі формули Пальма дають змогу, як це довів В. С. Королюк, легко переконатися, що ***для будь-якого стаціонарного потоку ординарність тягне за собою рівність $\mu=\lambda$*** (причому не виключається випадок $\mu=\lambda=+\infty$).

Справді, маємо:

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty} kv_k(1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(v_k(1)+v_{k+1}(1)+v_{k+2}(1)+\ldots\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(1-V_{k-1}(1))=\sum_{k=0}^{\infty}(1-V_k(1)),$$

звідки внаслідок формули (2.8)

$$\mu=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \varphi_k(u)du. \tag{2.10}$$

Однак

$$\varphi_k(u)=\lim_{\tau\to 0}\frac{h_k(\tau,u)}{w(\tau)}, \tag{2.11}$$

а оскільки відношення $h_k(\tau,u)/w(\tau)$ – це умовна ймовірність мати в проміжку $u$ саме $k$ подій (за умови наявності подій у проміжку $\tau$), то при кожному $m>0$ $\sum_{k=0}^{m}\frac{h_k(\tau,u)}{w(\tau)}\le 1 \quad (0<u\le 1)$, а тому внаслідок (2.11) $\sum_{k=0}^{m}\varphi_k(u)\le 1 \quad (0<u\le 1)$. Отже, при кожному $m>0$

$$\sum_{k=0}^{m}\int_0^1\varphi_k(u)du = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m}\varphi_k(u)\right)du\le 1;$$

а, отже, і $\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\varphi_k(u)du\le 1$, і (2.10) дає $\mu\le\lambda$; а оскільки ще в §1.1 ми бачили, що завжди $\mu\ge\lambda$, то $\mu=\lambda$, і наше твердження доведено.

## § 2. 4. Найпростіший потік як границя суми великої кількості незалежних потоків. Теорема Пальма

Значна кількість досліджень прикладного характеру ґрунтується на припущенні, що первинний потік замовлень, що надходить у систему МО, – найпростіший. Однак нема достатніх підстав вважати, що умови, покладені в основу означення найпростішого потоку, з достатнім ступенем точності виконуються в більшості важливих для практики випадків (передусім це стосується припущення відсутності післядії).

Спробу тлумачення кращого, ніж можна було б очікувати, узгодження експериментальних даних з висновками теорії вперше зроблено Пальмом, виходячи з припущення, що потік замовлень є *сумою* (суперпозицією) *значної кількості взаємно незалежних потоків малої інтенсивності*, причому кожен з потоків-доданків – *стаціонарний і ординарний*, а щодо післядії ці потоки можуть поводити себе довільно. Вимагається, щоб при досить широких припущеннях сумарний потік був близьким до найпростішого. Така постановка задачі в багатьох випадках близька до реальної ситуації. Наприклад, якщо до деякої АТС під'єднано значну кількість абонентів, то загальний потік викликів складається з потоків (порівняно вельми малої інтенсивності), що виходять від окремих абонентів, причому ці потоки-доданки можна в першому



наближенні вважати стаціонарними, ординарними і взаємно незалежними.

На цьому шляху ми приходимо до кількох своєрідних граничних теорем, які здатні значною мірою пояснити явище, що досліджується.

Нехай досліджуваний потік є суперпозицією *n стаціонарних, ординарних і взаємно незалежних* потоків. Позначимо через $\lambda_r$ інтенсивність $r$-го потоку, через $\varphi_{0r}(t)$ – його функцію Пальма (яку раніше ми позначали через $\varphi_0(t)$ ) і через $v_{kr}(t)$ – ймовірність появи на проміжку $(0,t)$ $k$ подій $r$-го потоку. Ті самі величини щодо сумарного потоку позначимо, відповідно, через $\Lambda$, $\Phi(t)$ і $W_k(t)$, так що, зокрема, $\Lambda=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r$. Виходитимемо з таких припущень:

А. При $n\to\infty$ $\Lambda$=const, водночас числа $\lambda_1, \lambda_2\dots \lambda_n$ рівномірно прямують до нуля, так що $\forall\, \varepsilon>0$ маємо $\lambda_r<\varepsilon$ $(r=\overline{1,n})$, якщо $n$ достатньо велике.

Б. При будь-якому сталому $t>0$ і при $n\to\infty$ числа $\varphi_{0r}(t)$ $(r=\overline{1,n})$ рівномірно прямують до 1, так що $\forall\, \varepsilon>0$ маємо: $1-\varphi_{0r}(t)<\varepsilon$ $(r=\overline{1,n})$, якщо $n$ достатньо велике.

Припущення Б вимагає деякого пояснення. Детальний аналіз засвідчує, що лише рівномірного зменшення інтенсивності потоків-доданків (припущення А) недостатньо для того, щоб сумарний потік наближався до найпростішого. Цьому можуть завадити накопичення значної кількості подій одного і того ж потоку на невеликих інтервалах – накопичення, можливість яких створюється тим, що на післядію у кожному з потоків ми не накладали досі жодних обмежень. Умова Б має на меті якраз зменшити шанси таких накопичень. *Суть умови* Б: при будь-якому великому $t$ ймовірність не отримати після деякої події за час $t$ жодної нової події *того самого потоку* повинна при $n\to\infty$ прямувати до 1 рівномірно по всіх потоках-доданках.

Передусім доведемо, що при зроблених припущеннях імовірність $W_0(t)$ відсутності подій сумарного потоку в проміжку $(0,\ t)$ наближається при $n\to\infty$ до відповідної ймовірності для найпростішого потоку з параметром $\Lambda$.

***Теорема Пальма.*** При сталому $t$>0 і при $n\to\infty$ $W_0(t)\to e^{-\Lambda t}$.

***Доведення.*** Формула $v_0'(t)=-\lambda\varphi_0(t)$, одержана в § 2.2, дає для $r$-го потоку:

$$v_{0r}(t)=1-\lambda_r\int_0^t\varphi_{0r}(u)du=1-\lambda_r t+\lambda_r\int_0^t(1-\varphi_{0r}(u))du;$$

$\varphi_{0r}(t)$ – незростаюча функція, тому (згідно з припущенням Б) при достатньо великому $n$

$$\int_0^t(1-\varphi_{0r}(u))du\le\int_0^t(1-\varphi_{0r}(t))du=t(1-\varphi_{0r}(t))<\varepsilon t.$$

Отже, $\int_0^t(1-\varphi_r(u))du=\varepsilon\theta_r t$, де $0<\theta_r<1$, і при достатньо великому $n$

$$v_{0r}(t)=1-\lambda_r t+\varepsilon\theta_r\lambda_r t,\quad 0<\theta_r<1,\quad r=\overline{1,n}\ . \tag{2.12}$$

Враховуючи умову А, запишемо:

$$\ln v_{0r}(t)=\ln(1-\lambda_r t+\varepsilon\theta_r\lambda_r t)=-\lambda_r t+\varepsilon\theta_r\lambda_r t+o(\lambda_r).$$

Оскільки $0<\theta_r<1$, то можна знайти таку функцію $c(t)>0$, що

$$|\ln v_{0r}(t)+\lambda_r t|<c(t)\varepsilon\lambda_r\quad(r=\overline{1,n}).$$

Унаслідок взаємної незалежності потоків

$$W_0(t)=\prod_{r=1}^n v_{0r}(t),\qquad \ln W_0(t)=\sum_{r=1}^n\ln v_{0r}(t).$$

Звідси:

$$|\ln W_0(t)+\Lambda t|=|\sum_{r=1}^n(\ln v_{0r}(t)+\lambda_r t)|\le\sum_{r=1}^n|\ln v_{0r}(t)+\lambda_r t|<c(t)\varepsilon\Lambda.$$

Оскільки $\varepsilon$>0 – будь-яке мале при достатньо великому $n$, то при $n\to\infty$ $\ln W_0(t)\to-\Lambda t,\quad W_0(t)\to e^{-\Lambda t}$, що й треба було довести. □

## § 2. 5. Гранична поведінка функцій $W_k(t)$

Тепер переконаємось, що й за будь-якого $k$>0 функція $W_k(t)$ сумарного потоку при $n\to\infty$ прямує до відповідної функції



найпростішого потоку з параметром $\Lambda$, тобто до $e^{-\Lambda t}(\Lambda t)^k/k!$. З цією метою нам необхідна така лема.

***Лема.*** Нехай маємо *стаціонарний і ординарний* потік з параметром $\lambda$ і функцією Пальма $\varphi_0(t)$ і нехай $\psi(t)$ – це ймовірність мати не менше двох подій за час $t$. Тоді $\forall\ t>0$ $\psi(t)\le\lambda t(1-\varphi_0(t))$.

***Доведення.*** Розіб'ємо проміжок (0, $t$) на $m$ рівних між собою частин:

$$\Delta_k=\left(\frac{k-1}{m}t,\ \frac{k}{m}t\right),\qquad k=\overline{1,\ m}.$$

Поява у проміжку (0, $t$) *хоча б двох подій*, очевидно, спричинює появу хоча б одної з таких двох подій:

*A* – існує хоча б один проміжок $\Delta_k$, який містить не менше двох подій;

*B* – існує такий проміжок $\Delta_k$ ($k<m$), що як в $\Delta_k$, так і в проміжку $(\frac{k}{m}t,t)$ містяться події.

Отож матимемо:

$$\psi(t)\le P(A)+P(B). \tag{2.13}$$

Унаслідок стаціонарності та ординарності потоку ($\psi(t)/t\to0$ при $t\to0$):

$$P(A)\le\sum_{k=1}^m\psi\left(\frac{t}{m}\right)=m\psi\left(\frac{t}{m}\right)=t\frac{\psi\left(\frac{t}{m}\right)}{\frac{t}{m}}\to0,\quad m\to\infty. \tag{2.14}$$

У § 2.1 ми позначали через $h_0(\tau,\ t)$ ймовірність того, що в проміжку довжини $\tau$ є події, а в проміжку довжини $t$, який йде після проміжку $\tau$, подій немає. Тому $w(\tau)-h_0(\tau,\ t)$ – це ймовірність того, що події є як в $\tau$, так і в $t$. Можемо записати:

$$P(B) \le \sum_{k=1}^{m-1}\left( w\left(\frac{t}{m}\right) - h_0\left(\frac{t}{m}, \frac{m-k}{m}t\right)\right) \le m\left( w\left(\frac{t}{m}\right) - h_0\left(\frac{t}{m}, t\right)\right) =$$

$$= mw\left(\frac{t}{m}\right)\left(1 - \frac{h_0\left(\frac{t}{m}, t\right)}{w\left(\frac{t}{m}\right)}\right). \qquad (2.15)$$

Оскільки при $m \to \infty$

$$mw\left(\frac{t}{m}\right) = t\frac{w\left(\frac{t}{m}\right)}{\frac{t}{m}} \to \lambda t, \qquad \frac{h_0(\tau, t)}{w(\tau)} \underset{\tau\to 0}{\to} \varphi_0(t),$$

то права частина (2.15) при $m\to\infty$ прямує до $\lambda t(1-\varphi_0(t))$. А оскільки $\psi(t)$ від $m$ не залежить, то з (2.13)–(2.15) при переході до границі при $m\to\infty$ випливає нерівність $\psi(t) \le \lambda t(1-\varphi_0(t))$, яку й треба було довести. □

Введемо тепер такі позначення для подій:

$S_k$ – у проміжку $(0, t)$ виникає $k$ подій сумарного потоку;

$H_1$ – жоден з потоків-доданків не має в $(0, t)$ понад одну подію;

$H_2$ – хоча б один з потоків-доданків має в $(0, t)$ понад одну подію.

Наша мета – дослідження асимптотичної поведінки величини $W_k(t)=P(S_k)$. Однак $P(S_k)= P(H_1S_k)+P(H_2S_k)$. Позначаючи функцію $\psi(t)$ для $r$-го потоку-доданка через $\psi_r(t)$, згідно з доведеною лемою, одержимо:

$$P(H_2S_k) \le P(H_2) \le \sum_{r=1}^{n}\psi_r(t) \le \sum_{r=1}^{n}\lambda_r t(1-\varphi_{0r}(t)).$$

Оскільки, згідно з умовою Б, при достатньо великому $n$ ми маємо $1-\varphi_{0r}(t)<\varepsilon$ $(r=\overline{1,n})$, то при достатньо великому $n$ $P(H_2S_k)<\varepsilon t\Lambda$, а, отже, при $n\to\infty$

$$P(H_2S_k) \to 0, \qquad W_k(t)= P(H_1S_k)+o(1). \qquad (2.16)$$

Проте подія $H_1S_k$ полягає, очевидно, в тому, що з $n$ потоків-доданків якісь $k$ дають у проміжку $(0, t)$ по одній події, тоді як решта $n-k$ у цьому проміжку подій не дають. Тому, якщо $C(r_1, r_2 \ldots r_k)$ означає довільну комбінацію з $k$ різних чисел ряду $1, 2 \ldots n$, то:

$$P(H_1S_k) = \sum_C \frac{v_{1r_1}(t)v_{1r_2}(t)\ldots v_{1r_k}(t)}{v_{0r_1}(t)v_{0r_2}(t)\ldots v_{0r_k}(t)}\prod_{i=1}^{n}v_{0i}(t) = W_0(t)\prod_{p=1}^{k}\frac{v_{1r_p}(t)}{v_{0r_p}(t)}, \qquad (2.17)$$

де сумування проводиться по всіх комбінаціях описаного типу.

Тепер можна перейти до доведення нашого основного твердження.

***Теорема Хінчина.*** При $n\to\infty$ $W_k(t) \to e^{-\Lambda t}\frac{(\Lambda t)^k}{k!}$ $(k=0,1,2\ldots)$.

***Доведення.*** З урахуванням (2.12) та умови А при сталому $t$ маємо:

$$v_{0r}(t) = 1-\lambda_r t + \varepsilon\theta_r\lambda_r t = 1+\varepsilon q_1,$$

де стала $q_1$ – обмежена при $n\to\infty$. Оскільки $v_{1r}(t)=w_r(t)-\psi_r(t)$ і, згідно з доведеною лемою та умовою Б, $\psi_r(t)=\theta_{1r}\lambda_r t(1-\varphi_{0r}(t))=\varepsilon\theta_{2r}\lambda_r t$ $(0<\theta_{ir}<1,\ i=1, 2)$, то при сталому $t$:

$$v_{1r}(t) = w_r(t) - \psi_r(t) = 1 - v_{0r}(t) - \psi_r(t) =$$
$$= 1 - 1 + \lambda_r t - \varepsilon\theta_r\lambda_r t - \varepsilon\theta_{2r}\lambda_r t = \lambda_r t + \varepsilon q_2\lambda_r t,$$

де $q_2$ – обмежена при $n\to\infty$. Звідси:

$$\frac{v_{1r_p}(t)}{v_{0r_p}(t)} = \frac{\lambda_{r_p}t(1+q_2\varepsilon)}{1+q_1\varepsilon} = \lambda_{r_p}t(1+q_3\varepsilon), \qquad p=\overline{1,k},$$

і, отже, $\prod_{p=1}^{k}\frac{v_{1r_p}(t)}{v_{0r_p}(t)} = \lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k}t^k(1+q_4\varepsilon)$. З (2.17) і теореми Пальма маємо $P(H_1S_k) = e^{-\Lambda t}t^k(1+q_5\varepsilon)\sum_C \lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k}$. Оскільки $\varepsilon$ – довільно мале при достатньо великому $n$, то для доведення теореми, враховуючи (2.16), нам досить переконатися, що при $n\to\infty$ (далі замість $C$ пишемо $C_k$):

$$\sigma_k = \sum_{C_k}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k} \to \frac{\Lambda^k}{k!}. \qquad (2.18)$$

Доведемо (2.18) за індукцією. При $k=1$:

$$\sigma_1 = \sum_{C_1}\lambda_{r_1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \Lambda,$$

і (2.18) тривіально виконується. Нехай для деякого $k>1$ при $n\to\infty$

$$\sigma_{k-1}=\sum_{C_{k-1}}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_{k-1}}=\frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!}+o(1). \qquad (2.19)$$

Домножимо кожен член суми $\sigma_{k-1}$ на суму всіх $\lambda_i$, які не зачислено у нього, тобто на величину $\Lambda-\lambda_{r_1}-\lambda_{r_2}-\ldots-\lambda_{r_{k-1}}$. Після розкриття усіх дужок одержимо суму добутків вигляду $\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\ldots\lambda_{r_k}$, де індекси $r_1, r_2 \ldots r_k$ попарно різні між собою.

Кожен такий добуток є одним з членів суми $\sigma_k$, причому кожен член суми $\sigma_k$ буде, очевидно, отриманий при цій операції і притому саме $k$ разів. Оскільки при достатньо великому $n$ і за будь-якої комбінації $C_{k-1}$

$$\Lambda-(k-1)\varepsilon\le\Lambda-\lambda_{r_1}-\lambda_{r_2}-\ldots-\lambda_{r_{k-1}}\le\Lambda,$$

то з наших підрахунків випливають нерівності:

$$(\Lambda-k\varepsilon)\sigma_{k-1}\le k\sigma_k\le\Lambda\sigma_{k-1},$$

і, отже, з урахуванням (2.19) при $n\to\infty$

$$(\Lambda-k\varepsilon)\left(\frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!}+o(1)\right)\le k\sigma_k\le\Lambda\left(\frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!}+o(1)\right).$$

Оскільки при достатньо великому $n$ число $\varepsilon$ – достатньо мале, то $k\sigma_k\to\frac{\Lambda^k}{(k-1)!}$ при $n\to\infty$, тобто $\lim_{n\to\infty}\sigma_k=\frac{\Lambda^k}{k!}$, і теорему доведено. □

## § 2. 6. Гранична теорема Хінчина про збіжність сумарного потоку до найпростішого

Доведена у попередньому параграфі теорема ще не стверджує, що сумарний потік наближається при $n\to\infty$ до найпростішого потоку. Справа в тому, що (див. § 1.3) сукупність функцій $W_k(t)$ ($k$=0, 1, 2… ) однозначно визначає собою деякий потік лише за умови, що це потік без післядії; ми ж поки що не розглядали питання про післядію в сумарному потоці. Тому питання про наближення цього сумарного потоку до найпростішого потоку з параметром $\Lambda$ вимагає подальшого



дослідження. Як зазначено в § 1.3, для найпростішого потоку з параметром $\Lambda$ визначальною є формула:

$$P\{x(t_i)=k_i,\ \ i=\overline{1,m}\}=e^{-\Lambda t_m}\Lambda^{k_m}\prod_{i=1}^{m}\frac{(t_i-t_{i-1})^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}, \qquad (2.20)$$

де $x(t_i)$ – кількість подій на $(0,\ t_i)$, $t_0=k_0=0$, $m$ – будь-яке натуральне число, $0<t_1<\ t_2<\ldots<t_m$, $0\le k_1\le k_2\le\ldots\le k_m$ і всі $k_i$ – невід’ємні цілі числа. Вважатимемо, що **сумарний потік збігається до найпростішого** з параметром $\Lambda$, якщо для цього сумарного потоку ймовірність, яка стоїть у лівій частині рівності (2.20), за будь-яких $m$, $t_i$, $k_i$ $(i=\overline{1,m})$ і при $n\to\infty$ має своєю границею праву частину цієї рівності.

Введемо зручніші позначення. Покладемо $t_i–t_{i-1}=u_i$, $k_i–k_{i-1}=l_i$, $t_m=\sum_{i=1}^{m}u_i=u$, $k_m=\sum_{i=1}^{m}l_i=k$ і позначимо через $n(u_i)$ кількість подій, які виникають у проміжку $(t_{i-1},t_i)$ довжини $u_i$. Тоді, очевидно, (2.20) рівносильна рівності:

$$P\{n(u_i)=l_i,\ \ i=\overline{1,m}\}=e^{-\Lambda u}\Lambda^k\prod_{i=1}^{m}\frac{u_i^{\,l_i}}{l_i\,!}. \qquad (2.21)$$

У попередньому параграфі ми розглядали подію $H_1S_k$, яка полягає в тому, що за деякий проміжок часу $(0,\ u)$ відбувається $k$ подій і що всі ці події належать різним потокам-доданкам. Нехай проміжок $(0,\ u)$ розбито на $m$ частин $u_1, u_2 \ldots u_m$ з довжинами $u_1, u_2 \ldots u_m$, і нехай подія $H_1S_k$ відбулась. Унаслідок стаціонарності та взаємної незалежності потоків-доданків для будь-якої з $k$ подій, що відбулися у проміжку $(0,u)$, імовірність потрапити в проміжок $u_i$ $(i=\overline{1,m})$ дорівнює $u_i/u$, яким би не було розташування цього проміжку і які б не були моменти появи решти подій. Позначимо через $B=\{n(u_i)=l_i\quad(i=\overline{1,m}\ )\}$, тоді з зазначеного вище випливає, що:

$$P(B/H_1S_k)=\frac{k\,!}{l_1!\,l_2!\ldots l_m!}\left(\frac{u_1}{u}\right)^{l_1}\left(\frac{u_2}{u}\right)^{l_2}\ldots\left(\frac{u_m}{u}\right)^{l_m}.$$

У цьому випадку $\dfrac{k!}{l_1!l_2!\ldots l_m!}$ – кількість способів розбиття множини з $k$ елементів на $m$ множин без спільних елементів.

Однак у попередньому параграфі ми бачили, що при $n\to\infty$

$$W_k(u)=P(S_k)\to e^{-\Lambda u}\frac{(\Lambda u)^k}{k!},\quad P(H_1S_k)\to e^{-\Lambda u}\frac{(\Lambda u)^k}{k!},\quad P(H_2S_k)\to 0.$$

Тому, враховуючи, що внаслідок рівності $\sum_{i=1}^{m} l_i=k$ подія $S_k$ є наслідком події $B$, тобто $B\subset S_k$ і $BS_k=B$, одержимо:

$$P(B)=P(S_kB)=P(H_1S_kB)+P(H_2S_kB)=$$
$$=P(H_1S_k)P(B/H_1S_k)+P(H_2S_k)P(B/H_2S_k)\underset{n\to\infty}{\to}$$
$$\underset{n\to\infty}{\to} e^{-\Lambda u}\frac{(\Lambda u)^k}{k!}\frac{k!}{l_1!l_2!\ldots l_m!}\left(\frac{u_1}{u}\right)^{l_1}\left(\frac{u_2}{u}\right)^{l_2}\cdots\left(\frac{u_m}{u}\right)^{l_m}=e^{-\Lambda u}\Lambda^k\prod_{i=1}^{m}\frac{u_i^{l_i}}{l_i!},$$

що збігається з правою частиною рівності (2.21). Теорему доведено. □

## § 2. 7. Закон розподілу інтервалу часу, на який падає точка

Розглянемо *стаціонарний потік Пальма* (тобто потік, в якому всі інтервали $T$ між сусідніми подіями взаємонезалежні і розподілені однаково з функцією розподілу $F(t)$).

Припустимо, що на вісь $Ot$ падає випадково точка $S$, причому положення точки $S$ ніяк не зв'язане з моментами появи подій. Наше завдання – визначити закон розподілу того інтервалу $T^*$, на який впала точка $S$.

Така ситуація виникає в різних прикладних задачах. Наприклад, пасажир потрапляє на автобусну зупинку в якийсь випадковий момент часу, не зв'язаний з розкладом руху. Необхідно вивести закон розподілу інтервалу часу між відбуттям попереднього автобуса і прибуттям наступного за умови, що пасажир вже стоїть на зупинці, а потік автобусів є стаціонарним потоком Пальма. Закон розподілу інтервалу часу $T^*$ між прибуттям



двох автобусів, на якому з'явився пасажир, загалом не збігається з законом $F(t)$. Цей на перший погляд парадоксальний факт можна пояснити на такому простому прикладі.

Припустімо, що інтервал часу $T$ (в годинах) між прибуттям двох сусідніх за часом автобусів може приймати лише два значення: $t_1$=0,8 з імовірністю $p_1$=0,5 і $t_2$=0,2 з імовірністю $p_2$=0,5. Тоді на осі $Ot$ матимемо потік, в якому з однаковою частотою траплятимуться довгі (довжини 0,8) і короткі (довжини 0,2) проміжки. Припустімо, що пасажир прибув на зупинку в якийсь момент часу. Що ймовірніше – що він потрапить на проміжок довжини 0,8 чи на проміжок довжини 0,2? Очевидно, перша подія ймовірніша: кількість проміжків 0,8 і 0,2 на осі $Ot$ *в середньому* однакова, проте проміжок 0,8 довший у 4 рази. Отже, проміжки 0,8 займають на осі *в середньому* в 4 рази більше місця, ніж проміжки 0,2. Як наслідок, імовірність потрапляння точки $S$ на проміжок 0,8 дорівнює вже не 0,5, а 0,8, а ймовірність потрапляння на проміжок 0,2 дорівнює 0,2. Тому закон розподілу того інтервалу, на який потрапила точка $S$, загалом не збігається з його апріорним законом розподілу (зокрема, для математичних сподівань випадкових величин $T$ і $T^*$ одержимо: $ET$=(0,8+0,2)0,5=0,5; $ET^*=0{,}8^2+0{,}2^2$=0,68).

Розв'яжемо узагальнену задачу. Нехай $F(t)$ – апріорна функція розподілу випадкової величини $T$ (інтервалу між двома сусідніми подіями) з щільністю розподілу $f(t)$. Визначимо щільність розподілу $f^*(t)$ того інтервалу $T^*$, на який випадково впала точка $S$.

З цією метою знайдемо $f^*(t)dt$ – ймовірність того, що точка $S$ потрапляє на проміжок, довжина якого міститься в інтервалі $(t, t+dt)$. Ця ймовірність наближено дорівнює відношенню *сумарної довжини таких проміжків* на дуже великому інтервалі часу до *всієї довжини цього інтервалу*. Нехай на дуже великому інтервалі вклалися $N$ проміжків (довільної довжини). Середня кількість проміжків, довжина яких лежить у межах $(t, t+dt)$, дорівнює $Nf(t)dt$ (кількість проміжків $N$, помножена на ймовірність того, що довжина міститься в інтервалі $(t, t+dt)$, рівну $f(t)dt$). Середня сумарна довжина усіх таких проміжків дорівнює $tNf(t)dt$. Середня загальна довжина всіх $N$ проміжків становить $e_TN$ (середня довжина $e_T$ одного на їхню кількість), де $e_T = ET = \int\limits_0^\infty tf(t)dt$ – математичне сподівання випадкової величини $T$. Отже,

$$f^*(t)dt \approx \frac{Ntf(t)dt}{Ne_T} = \frac{t}{e_T} f(t)dt.$$

Ця рівність виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу розглядається (чим більше $N$). В границі при $N \to \infty$ одержимо закон розподілу випадкової величини $T^*$:

$$f^*(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{e_T} f(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

### § 2. 8. Закон розподілу часу до появи чергової події

Розглянемо на осі $Ot$ *стаціонарний потік Пальма* і візьмемо довільну точку $S$, яка випадково займає на осі будь-яке положення. Як зазначено вище, інтервал $T^*$ розподілений не так, як будь-який інтервал між подіями $T$. Якщо інтервал $T$ мав щільність розподілу $f(t)$, то інтервал $T^*$ має щільність розподілу $f^*(t) = \dfrac{t}{e_T} f(t)$. Нас цікавитиме закон розподілу залишку часу $\Theta$ від точки $S$ до моменту появи чергової події за умови, що щільність розподілу $f(t)$ інтервалу $T$ нам відома.

Для розв'язання цієї задачі введемо гіпотезу, яка полягає у тому, що довжина інтервалу $T^*$, на який впала точка $S$, дорівнює $t^*$. У припущенні, що ця гіпотеза справедлива, визначимо умовну щільність розподілу $\varphi(\theta/t^*)$ випадкової величини $\Theta$.

Оскільки розташування точки $S$ на числовій осі $Ot$ не залежить від розподілу подій у потоці, то нема жодних підстав вважати будь-яку частину інтервалу $T^*$, на який впала точка $S$, ймовірнішою для розташування цієї точки, ніж іншу. Тому точка $S$ на інтервалі часу $T^*$ буде розподілена з рівномірною щільністю (для рівномірного розподілу ймовірність потрапити на відрізок



пропорційна довжині цього відрізка):

$$\varphi(\theta / t^*) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^*}, & \theta \in (0, t^*); \\ 0, & \theta \notin (0, t^*). \end{cases} \qquad (2.22)$$

Щільність розподілу випадкового вектора $(T^*, \Theta)$ згідно з означенням умовної щільності $\varphi(\theta/t^*)$ дорівнює $\psi(t^*,\theta) = f^*(t^*)\varphi(\theta/t^*)$, звідки за формулою для щільності розподілу складової двовимірної випадкової величини визначимо:

$$\varphi(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t^*, \theta)dt^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^*(t^*)\varphi(\theta / t^*)dt^*.$$

Оскільки, згідно з (2.22), підінтегральна функція відмінна від нуля лише при $t^* > \theta$, то:

$$\varphi(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^*}{e_T} f(t^*)\varphi(\theta / t^*)dt^* = \int\limits_{\theta}^{\infty} \frac{t^*}{e_T} f(t^*) \frac{1}{t^*} dt^* = \frac{1 - F(\theta)}{e_T},$$

де $F(t)$ – функція розподілу випадкової величини $T$: $F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau.$

Отже, щільність розподілу залишку часу $\Theta$ від випадкового моменту $S$ до моменту появи чергової події запишемо так:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1 - F(\theta)}{e_T}, & \theta > 0; \\ 0, & \theta < 0; \end{cases} \qquad (2.23)$$

де $e_T$ – математичне сподівання випадкової величини $T$ – інтервалу між двома будь-якими сусідніми подіями.

<u>Приклад 2.1.</u> Пасажир виходить на зупинку автобуса в момент часу, не зв'язаний з розкладом. Потік автобусів – стаціонарний потік Пальма з інтервалами, рівномірно розподіленими у межах від 15 до 25 хв. Знайти середній час очікування автобуса пасажиром.

<u>Розв'язання.</u> Щільність розподілу інтервалу часу $T$ між двома автобусами, згідно з законом рівномірного розподілу, дорівнює

$f(t)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{10}$, $t\in(a,b)$, де $a$=15, $b$=25. Тоді $e_T=\frac{a+b}{2}=20$, а щільність розподілу того інтервалу часу, на який потрапив пасажир, обчислюється за формулою:

$$f^*(t)=\frac{t}{e_T}f(t)=\frac{t}{200},\quad t\in(15,25).$$

Оскільки функція розподілу випадкової величини $T$ має вигляд:

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 15;\\ \frac{t-15}{10}, & 15<t\le 25;\\ 1, & t>25,\end{cases}$$

то, згідно з (2.23), щільність розподілу часу $\Theta$ очікування прибуття автобуса пасажиром:

$$\varphi(\theta)=\begin{cases}0, & \theta<0;\\ \frac{1}{20}, & 0<\theta<15;\\ \frac{25-\theta}{200}, & 15<\theta\le 25;\\ 0, & \theta>25.\end{cases}$$

Середній час очікування:

$$E\Theta=\int_0^{15}\frac{\theta}{20}d\theta+\int_{15}^{25}\theta\frac{25-\theta}{200}d\theta\approx 10{,}2\text{ хв.}$$

## § 2. 9. Найпростіший потік як частковий випадок стаціонарного потоку Пальма

Визначимо закон розподілу інтервалу часу $T$ між двома будь-якими сусідніми подіями в найпростішому потоці. Імовірність того, що на проміжку часу довжини $t$, який триває безпосередньо після однієї з подій, не з'явиться жодної події $v_0(t)=e^{-\lambda t}$ (унаслідок відсутності післядії в найпростішому потоці наявність події на



початку проміжку не впливає на ймовірність появи тієї чи іншої кількості подій саме на проміжку). Проте ця ймовірність дорівнює ймовірності того, що випадкова величина $T$ буде більшою від величини $t$ (бо подія виникає через проміжок $T$), тобто $P\{T>t\}=e^{-\lambda t}$, звідки $F(t)=P\{t<T\}=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t}$ $(t>0)$, де $F(t)$ – функція розподілу випадкової величини $T$. Диференціюючи останню рівність, одержимо щільність розподілу випадкової величини $T$: $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $(t>0)$.

Отже, *у найпростішому потоці інтервал часу між двома сусідніми подіями розподілений згідно з показниковим законом з параметром $\lambda$*. Унаслідок відсутності післядії всі інтервали між сусідніми подіями – незалежні випадкові величини. Тому найпростіший потік – це стаціонарний потік Пальма. Отже, ***найпростіший потік – це стаціонарний потік Пальма, в якому інтервали між сусідніми подіями розподілені за показниковим законом***.

Визначимо числові характеристики випадкової величини $T$ для найпростішого потоку. Математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$e_T=\int_0^\infty tf(t)dt=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\tag{2.24}$$

і, отже, обернено пропорційне до параметра потоку. Для дисперсії $DT$ отримуємо:

$$DT=ET^2-e_T^2=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.\tag{2.25}$$

Розглянемо на осі $Ot$ найпростіший потік і точку $S$, яка випадково падає на цю вісь. Визначимо закон розподілу того інтервалу $T^*$, на який впала точка $S$. Оскільки $e_T=\frac{1}{\lambda}$, то:

$$f^*(t)=\frac{t}{e_T}f(t)=\lambda^2te^{-\lambda t}\quad(t>0).\tag{2.26}$$

Закон розподілу (2.26) називають ***законом Ерланга першого порядку***.

Визначимо для найпростішого потоку закон розподілу інтервалу часу $\Theta$ між точкою $S$ і першою подією, яка виникла після точки $S$. Отримаємо:

$$\varphi(\theta)=\frac{1-F(\theta)}{e_T}=\frac{1-(1-e^{-\lambda\theta})}{1/\lambda}=\lambda e^{-\lambda\theta} \quad (\theta>0).$$

Отже, випадкова величина $\Theta$ розподілена так само, як і випадкова величина $T$, тобто за показниковим законом.

Ця чудова властивість найпростішого потоку є іншою формою прояву властивості відсутності післядії. Вона означає, що будь-яка як завгодно докладна інформація про те, як себе поводив потік у минулому (до довільної точки $S$), не дає нам жодної інформації про те, що відбудеться після цієї точки. Іншими словами, ***майбутній розвиток процесу появи подій не залежить від того, як цей процес проходив у минулому***. Ця властивість значно полегшує дослідження різноманітних задач, пов'язаних з аналізом потоку подій.

Нагадаємо, що характеристичною функцією випадкової величини $T$ називають функцію:

$$g(x)=E(e^{ixT})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t)dt,$$

де $f(t)$ – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $T$. Диференціюючи функцію $g(x)$, одержимо співвідношення:

$$g^{(k)}(0)=i^k ET^k, \quad k=1,2\ldots,$$

звідки, зокрема, випливає:

$$ET=-ig'(0). \tag{2.27}$$

Обчислимо характеристичну функцію інтервалу $T$ між двома сусідніми подіями у найпростішому потоці з параметром $\lambda$:

$$g(x)=\int_0^{\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda}{\lambda-ix}\int_0^{\infty}(\lambda-ix)e^{-(\lambda-ix)t}dt=\frac{\lambda}{\lambda-ix}. \tag{2.28}$$

Отже, можна стверджувати, що потік Пальма є найпростішим, якщо характеристична функція інтервалу між сусідніми подіями дорівнює $\lambda/(\lambda-ix)$. Це твердження ґрунтується на однозначності зв'язку між характеристичною функцією та щільністю розподілу.



<u>Приклад 2.2.</u> Потік машин, що рухаються по шосе в одному напрямі, є найпростішим потоком з інтенсивністю $\lambda$=0,1 хв$^{-1}$. Людина виходить на шосе, щоб зупинити першу машину, яка їхатиме в цьому напрямі. Знайти середній час очікування і його середнє квадратичне відхилення.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки найпростіший потік не володіє післядією, то „майбутнє" не залежить від „минулого", зокрема від того, скільки часу минуло після того, як проїхала остання машина. Тому розподіл часу очікування $\Theta$ такий самий, як і розподіл проміжку часу між прибуттям сусідніх машин, тобто показниковий з параметром $\lambda$: $\varphi(\theta)=\lambda e^{-\lambda\theta}$ $(\theta>0)$. Звідси $E\Theta=1/\lambda=10$ хв, $D\Theta=1/\lambda^2 \Rightarrow \sigma_\Theta=1/\lambda=10$.

## § 2. 10. Потік Ерланга, нормований потік Ерланга

Потік Ерланга отримуємо шляхом особливого перетворення („розрідження") найпростішого потоку. Це перетворення здійснюється шляхом вилучення деяких подій з найпростішого потоку.

Припустимо, що з найпростішого потоку вилучено кожну другу подію. Події, що залишились, утворюють новий потік подій, який називають потоком Ерланга першого порядку $E_1$. Якщо вилучати дві події підряд і залишати в потоці кожну третю подію, то отримаємо потік Ерланга другого порядку $E_2$ і т.д.

Подамо таке загальне означення: ***потоком Ерланга k-го порядку*** називають стаціонарний потік Пальма, в якому інтервали між подіями є сумою $(k+1)$-ої незалежних випадкових величин, розподілених однаково за показниковим законом з параметром $\lambda$. Параметр $\lambda$ – це інтенсивність вихідного найпростішого потоку. Величина $k$ може набувати значення 0, 1, 2 …. При $k$=0 отримуємо вихідний найпростіший потік, оскільки жодного перетворення ми не здійснювали.

Визначимо щільність розподілу ймовірностей $f_k(t)$ інтервалу $T$ між двома сусідніми подіями в потоці Ерланга $k$-го порядку.

Очевидно, що $f_k(t)$ – щільність розподілу суми ($k$+1)-ої незалежних випадкових величин, розподілених однаково за показниковим законом $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Відомо, що щільність розподілу суми двох незалежних випадкових величин $\xi$ та $\eta$ визначають за формулою згортки:

$$f_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(u) f_\eta(t-u) du.$$

Отож при $k$=1, 2, 3:

$$f_1(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \lambda^2 t e^{-\lambda t};$$

$$f_2(t) = \int_0^t \lambda^2 u e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \frac{\lambda(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t};$$

$$f_3(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \lambda^3 u^2 e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \frac{\lambda(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

і т.д. За індукцією можна довести, що:

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad k = 0,1,2\ldots.$$

Для подальших розрахунків нам необхідно ввести до розгляду спеціальну функцію $P(k,a) = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $a$, набуде значення $k$. Отже, $f_k(t) = \lambda P(k, \lambda t)$. Функція розподілу випадкової величини $T$ для потоку Ерланга $k$-го порядку набуде вигляду:

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(\tau) d\tau = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \qquad (2.29)$$

що можна довести безпосереднім інтегруванням та застосуванням методу математичної індукції. Простіше отримати (2.29), виходячи безпосередньо з означення $F_k(t) = P\{T < t\}$. Справді, перейдемо до протилежної події і визначимо $P\{T > t\}$. Пов'яжемо початок відліку з однією з подій потоку Ерланга $k$-го порядку і відкладемо



від нього два проміжки: $T$ (відстань до наступної події потоку Ерланга) і $t$<$T$. Для виконання нерівності $T$>$t$ необхідно, щоб на проміжок $t$ потрапило менше, ніж $k$+1 подій найпростішого потоку з параметром $\lambda$ (або 0, або 1, …, або $k$). Імовірність того, що на проміжок $t$ потрапить $n$ подій, становить:

$$v_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

За правилом додавання ймовірностей:

$$P\{T > t\} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

звідки випливає співвідношення (2.29).

Якщо ввести ще одну спеціальну функцію:

$$R(k,a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^n}{n!} e^{-a} = \sum_{n=0}^{k} P(n,a),$$

то вираз (2.29) для функції розподілу набуде компактного вигляду:

$$F_k(t) = 1 - R(k, \lambda t), \quad t > 0.$$

Числові характеристики випадкової величини $T$ для потоку Ерланга $k$-го порядку обчислюють за формулами:

$$ET = \frac{k+1}{\lambda}, \qquad DT = \frac{k+1}{\lambda^2}, \qquad (2.30)$$

які безпосередньо випливають з того, що $T$ – це сума ($k$+1)-ої незалежних однаково розподілених випадкових величин, математичне сподівання та дисперсію кожної з яких визначають за формулами (2.24), (2.25).

Розглянутий нами потік Ерланга отримують шляхом вилучення з найпростішого потоку $k$ точок підряд, залишаючи кожну ($k$+1)-у точку. Таке перетворення приводить до того, що інтенсивність потоку Ерланга $k$-го порядку зменшується в $k$+1 разів порівняно з інтенсивністю вихідного найпростішого потоку $\mu$=$\lambda$: $\mu_k = \dfrac{1}{ET} = \dfrac{\lambda}{k+1}$.

Розглянемо нове перетворення найпростішого потоку, утворене з такого ж „розрідження”, як вище, проте після цього потік „стискають” так, щоб його інтенсивність дорівнювала інтенсивності найпростішого потоку. З цією метою інтервал часу $T$ між двома сусідніми подіями в потоці Ерланга $k$-го порядку необхідно зменшити в $k+1$ разів. Назвемо цей потік ***нормованим потоком Ерланга k-го порядку***. В ньому випадковий інтервал часу між двома сусідніми подіями становить $\tilde{T} = T/(k+1)$.

Математичне сподівання випадкової величини $\tilde{T}$ дорівнює:

$$E\tilde{T} = E\left(\frac{T}{k+1}\right) = \frac{(k+1)/\lambda}{k+1} = \frac{1}{\lambda}.$$

Отож інтенсивність нормованого потоку Ерланга $k$-го порядку дорівнює $1/E\tilde{T} = \lambda,$ тобто інтенсивності вихідного найпростішого потоку. Дисперсія випадкової величини $\tilde{T}$ дорівнює:

$$D\tilde{T} = \frac{DT}{(k+1)^2} = \frac{k+1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)}.$$

Отож при $k \to \infty$ інтенсивність потоку не змінюється, а дисперсія $D\tilde{T}$ прямує до нуля, тобто потік наближається до регулярного стаціонарного. За достатньо великого $k$ нормований потік Ерланга $k$-го порядку буде як завгодно близьким до регулярного потоку.

Отже, за допомогою нормованого потоку Ерланга можна побудувати цілу гаму потоків з різною післядією, починаючи від цілковитої відсутності післядії ($k$=0, найпростіший потік) аж до регулярного потоку (у випадку $k=\infty$).

Приклад 2.3. Потік відмов технічного пристрою є потоком Ерланга $k$-го порядку з функцією розподілу (2.29) інтервалу між відмовами (відновлення роботи пристрою після відмови відбувається миттєво). „Перевіряючий” прибуває у випадковий момент часу і чекає до першої відмови. Знайти середній час очікування відмови, якщо $k$=3, $\lambda$=0,5 год.$^{-1}$

Розв’язання. Згідно з (2.23) щільність розподілу часу очікування:

$$\varphi(\theta) = \frac{1 - F_k(\theta)}{e_T},$$

де $F_k(\theta)$ задають формулою (2.29), а $e_T = (k+1)/\lambda.$ Звідси:



$$\varphi(\theta) = \frac{\lambda}{k+1}\sum_{n=0}^{k}\frac{(\lambda\theta)^n}{n!}e^{-\lambda\theta} = \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k}\frac{\lambda(\lambda\theta)^n}{n!}e^{-\lambda\theta} \quad (\theta > 0),$$

тобто випадкова величина $\Theta$ має розподіл, „змішаний” з $k+1$ ерлангових розподілів різних порядків; з однаковою ймовірністю $1/(k+1)$ вона має розподіл Ерланга нульового, першого, другого… $k$-го порядків. Математичне сподівання такої випадкової величини визначимо за формулою повного математичного сподівання:

$$E\Theta = \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k}E(\Theta/n),$$

де $E(\Theta/n)$ – умовне математичне сподівання випадкової величини $\Theta$ за умови, що вона розподілена за законом Ерланга $n$-го порядку. За першою формулою (2.30) знаходимо $E(\Theta/n) = (n+1)/\lambda,$ звідки:

$$E\Theta = \frac{1}{(k+1)\lambda}\sum_{n=0}^{k}(n+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2(k+1)\lambda} = \frac{k+2}{2\lambda}.$$

Отже, середній час очікування до першої відмови становить 5 год.

## § 2. 11. Випадкове розрідження потоків подій. Гранична теорема для розріджених потоків

Потоки подій, які трапляються на практиці, часто піддаються операції „розрідження”. Вона полягає в тому, що під впливом випадкових причин ті чи інші події випадають з потоку. Наприклад, потік космічних частинок, перш ніж досягнути поверхні Землі, рідшає за рахунок зіштовхування цих частинок з атомами атмосфери; потік літаків, які прориваються через систему ППО противника, рідшає за рахунок ураження частини цих літаків; потік готових виробів також рідшає за рахунок вибраковування частини з них у ВТК. На відміну від потоку Ерланга $k$-го порядку, який отримують шляхом строго закономірного розрідження найпростішого потоку, у наведених прикладах здійснюють *випадкове* розрідження вихідного потоку подій, коли кожну подію з певною ймовірністю вилучають з потоку незалежно від того, вилучені інші події чи ні.

Розглянемо докладніше таке випадкове розрідження. За вихідний потік візьмемо стаціонарний потік Пальма. До нього застосуємо операцію розрідження $R_p$, яка полягає в тому, що кожна подія, незалежно від інших, переноситься з вихідного потоку в розріджений потік з незмінною ймовірністю $p$ (отже, вилучається з імовірністю $q$=1–$p$).

Припустимо, що у вихідному потоці інтервал між сусідніми подіями $T$ має характеристичну функцію $g(x)$. Визначимо характеристичну функцію $g_p(x)$ інтервалу $T_p$ між сусідніми подіями в розрідженому потоці. Очевидно, що випадкова величина $T_p$ – це сума випадкової кількості $Z$ доданків $T_p=\sum_{i=1}^{Z} T_i$, де випадкові величини $T_i$ ($i$=1, 2, …) – взаємно незалежні, однаково розподілені і кожна з них має характеристичну функцію $g(x)$. Випадкова величина $Z$ (кількість просумованих інтервалів з вихідного потоку) розподілена за законом Паскаля (геометричний розподіл) $P\{Z=k\}=pq^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$, де $q$=1–$p$ (0<$p$<1).

З метою визначення характеристичної функції $g_p(x)$ випадкової величини $T_p$ висунемо гіпотезу, що $Z=k$. Тоді вираз для умовної характеристичної функції $g_{p/k}(x)$ одержимо як характеристичну функцію суми $k$ однаково розподілених випадкових величин з характеристичними функціями $g(x)$. Отже, $g_{p/k}(x)=(g(x))^k$. Безумовну характеристичну функцію $g_p(x)$ визначимо за формулою повної ймовірності:

$$g_p(x)=\sum_{k=1}^{\infty} P\{Z=k\} g_{p/k}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}(g(x))^k=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\left(g(x)q\right)^k=$$

$$=\frac{p}{q}\frac{qg(x)}{1-qg(x)}=\frac{pg(x)}{1-qg(x)}$$

(тут ми можемо використати формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, оскільки 0<$q$<1 і $|g(x)|\le 1$).

Оскільки:



$$g'_p(x)=\frac{pg'(x)(1-qg(x))+pg(x)qg'(x)}{(1-qg(x))^2},$$

то

$$g'_p(0)=\frac{pg'(0)}{(1-q)^2}=\frac{g'(0)}{p}.$$

Тому, згідно з (2.27):

$$ET_p=-ig'_p(0)=\frac{-ig'(0)}{p}=\frac{ET}{p}.$$

Аналізуючи цю формулу, переконуємось, що ***інтенсивність*** $\mu_p$ ***розрідженого потоку*** дорівнює інтенсивності вихідного потоку $\mu$, помноженій на ймовірність збереження події в потоці $p$:

$$\mu_p=\frac{1}{ET_p}=\frac{p}{ET}=\mu p.$$

Введемо нове перетворення $r_p$ потоку $\Pi$, яке полягає в тому, що до потоку $\Pi$ спочатку застосовують перетворення $R_p$: $R_p\{\Pi\}=\Pi_p$, а потім потік $\Pi_p$ стискають так, щоб інтенсивність перетвореного потоку $\pi_p=r_p\{\Pi\}$ дорівнювала інтенсивності вихідного потоку $\Pi$. З цією метою досить випадкову величину $T_p$ домножити на ймовірність $p$: $\tau_p=T_p p$. Зазначимо, що характеристична функція інтервалу між сусідніми подіями $\tau_p$ в потоці $\pi_p$ (згідно з відомою властивістю характеристичної функції від добутку випадкової величини і сталої) має вигляд:

$$\tilde{g}_p(x)=r_p\{g(x)\}=g_p(px)=\frac{pg(px)}{1-qg(px)}.$$

Перейдемо до ***граничної теореми для розріджених потоків.*** Отож якщо послідовно розріджувати *стаціонарний ординарний потік Пальма* достатньо велику кількість разів, то такий багаторазово розріджуваний потік буде близьким до найпростішого.

Припустимо, що перше розрідження зберігає подію в потоці з імовірністю $p_1$>0, друге – з імовірністю $p_2$>0 і т.д. Позначимо через $\mu$ інтенсивність вихідного стаціонарного ординарного потоку Пальма. Оскільки потік ординарний, то за теоремою Королюка (див. § 2.3) його інтенсивність дорівнюватиме параметру потоку: $\mu=\lambda$. Припустимо також, що за кожним розрідженням відбувається таке стискання потоку, щоб інтенсивність залишалась незмінною. Позначимо $n$ послідовних таких перетворень символом $r^{(n)}$: $r^{(n)}\{\Pi\} = r_{p_n}\{r_{p_{n-1}}\{\dots r_{p_1}\{\Pi\}\dots\}\}$.

Спочатку доведемо, що послідовне подвійне розрідження зі стисканням потоку $\Pi$ з імовірностями $p_1$ і $p_2$ еквівалентне одному „розрідженню зі стисканням" з імовірністю $p=p_1p_2$, тобто:

$$r_{p_2}\{r_{p_1}\{\Pi\}\} = r_{p_1 p_2}\{\Pi\}.$$

Справді, перетворення $r_{p_1}\{\Pi\}$ дає характеристичну функцію:

$$r_{p_1}\{g(x)\} = \tilde{g}_{p_1}(x) = \frac{p_1 g(p_1 x)}{1-q_1 g(p_1 x)}, \quad q_1 = 1-p_1.$$

Тоді:

$$r_{p_2}\{\tilde{g}_{p_1}(x)\} = \frac{p_2\tilde{g}_{p_1}(p_2 x)}{1-q_2\tilde{g}_{p_1}(p_2 x)} = \frac{p_2\dfrac{p_1 g(p_1 p_2 x)}{1-q_1 g(p_1 p_2 x)}}{1-q_2\dfrac{p_1 g(p_1 p_2 x)}{1-q_1 g(p_1 p_2 x)}} =$$

$$= \frac{p_1 p_2 g(p_1 p_2 x)}{1-(q_1+p_1 q_2) g(p_1 p_2 x)} = \frac{p_1 p_2 g(p_1 p_2 x)}{1-(1-p_1 p_2) g(p_1 p_2 x)}, \quad q_2 = 1-p_2.$$

Звідси випливає, що:

$$r^{(n)}\{g(x)\} = \frac{p^{(n)} g(p^{(n)} x)}{1-(1-p^{(n)}) g(p^{(n)} x)}, \quad p^{(n)} = p_1 p_2 \dots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Поділимо чисельник і знаменник на $p^{(n)}$:

$$r^{(n)}\{g(x)\} = \frac{g(p^{(n)} x)}{\dfrac{1-g(p^{(n)} x)}{p^{(n)}} + g(p^{(n)} x)}.$$

Визначимо границю цього виразу при необмеженому зростанні кількості перетворень ($n\to\infty$). При $n\to\infty$ $p^{(n)}\to 0$, і в знаменнику отримаємо невизначеність типу 0/0. Розкриємо її:

$$\lim_{p^{(n)}\to 0}\frac{1-g(p^{(n)} x)}{p^{(n)}} = \lim_{p^{(n)}\to 0}\frac{-g'(p^{(n)} x)x}{1} = -xg'(0) = -x\left(-\frac{ET}{i}\right) = \frac{x}{i\lambda}.$$



Отже,

$$\lim_{n\to\infty} r^{(n)}\{g(x)\} = \frac{1}{\dfrac{x}{i\lambda}+1} = \frac{i\lambda}{x+i\lambda} = \frac{-\lambda}{ix-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - ix}.$$

Це означає (див. (2.28)), що в граничному потоці інтервали між сусідніми подіями розподілені за показниковим законом. Оскільки вихідний потік – це потік Пальма і будь-яке перетворення $r_p$ залишає його потоком Пальма (інтервали залишаються незалежними), то граничний потік також буде потоком Пальма з показниково розподіленими інтервалами, тобто найпростішим потоком. □

Дослідження засвідчує, що на практиці вже 4-5-разове розрідження (при $p$<0,8) дає потік, близький до найпростішого, навіть якщо вихідний потік був регулярним.

Розглянемо розрідження найпростішого потоку з інтенсивністю $\lambda$. При розрідженні без стискання (перетворення $R_p$) перетворений потік залишається найпростішим з параметром $\lambda p$:

$$g_p(x) = \frac{pg(x)}{1-qg(x)} = p\frac{\lambda}{\lambda - ix}\left(1-\frac{q\lambda}{\lambda - ix}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{p\lambda}{\lambda - ix}\frac{\lambda - ix}{\lambda - ix - q\lambda} = \frac{\lambda p}{\lambda p - ix}.$$

Якщо ж здійснюють розрідження зі стисканням (перетворення $r_p$) найпростішого потоку з параметром $\lambda$, то отримують найпростіший потік з тим самим параметром $\lambda$:

$$\tilde{g}_p(x) = g_p(px) = \frac{\lambda p}{\lambda p - ipx} = \frac{\lambda}{\lambda - ix}.$$

<u>Приклад 2.4.</u> Станок виготовляє кульки для підшипників. Середня продуктивність одного станка – $\lambda_1$ (кульок за одиницю часу). В цеху є $m$ таких станків ($m>5$). Кульки від станків надходять в єдиний потік, в якому деякі з них забраковують. Середній брак становить $l$%. Стандартні кульки надходять у складальний цех, а браковані зсипають в бункер, який може вмістити $k$ кульок. Знайти закон розподілу часу $T$, через який бункер буде заповнено бракованими кульками.

Розв'язання. Оскільки кількість станків значна, то загальний потік виготовлених кульок вважатимемо найпростішим з інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 m$. Потік бракованих кульок буде також найпростішим, оскільки розрідження загального потоку відбувається випадково (імовірність того, що кульку забракують, дорівнює $p = l/100$). Інтенсивність найпростішого потоку бракованих кульок $\lambda_0 = \lambda p$, оскільки інтенсивність розрідженого потоку дорівнює інтенсивності вихідного потоку, помноженій на ймовірність збереження події в потоці $p$. Позначимо кількість бракованих кульок, які надійшли в бункер за час $t$, через $X(t)$. Для фіксованого моменту $t$ випадкова величина $X(t)$ підпорядкована закону Пуассона з параметром $a = \lambda_0 t$. Очевидно, що випадкова величина $T$ визначається випадковим моментом виконання рівності $X(T) = k$. Отже, функцію розподілу випадкової величини $T$ можна визначити з умови:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

тобто випадкова величина $T$ підпорядкована закону Ерланга $k$-го порядку з параметром $\lambda_0$.



# Розділ 3
# Марковські процеси в системах масового обслуговування

## § 3. 1. Дискретні марковські випадкові процеси в системах масового обслуговування. Граф можливих станів системи

Об'єктом нашого вивчення будуть випадкові процеси, що протікають у системах МО і описують зміни станів цих систем в часі. Розглянемо лише такі системи, які мають скінченну або зчисленну множину можливих станів. Такі системи називатимемо *системами з дискретними станами*. Стани системи МО позначатимемо через $x_0$, $x_1$… $x_n$ (для систем зі скінченною множиною станів) або через $x_0$, $x_1$… $x_k$… (для систем з нескінченною множиною станів). Вважатимемо, що перехід системи зі стану у стан здійснюється миттєво (стрибком).

Розглянемо систему зі скінченною кількістю станів $x_0, x_1 \ldots x_n$. Позначимо стан системи $X$ у момент часу $t$ через $X(t)$. Тоді у будь-який момент часу $t$ можлива одна з $n+1$ подій $X(t)=x_i$ ($i=0, 1\ldots n$), які утворюють повну групу несумісних подій. Подія $X(t)=x_i$ полягає в тому, що система у момент часу $t$ перебуває у стані $x_i$. Імовірність цієї події позначимо черех $p_i(t)$: $p_i(t)=P\{X(t)=x_i\}$ ($i=0, 1\ldots n$). Оскільки події $X(t)=x_i$ ($i=0, 1\ldots n$) утворюють повну групу несумісних подій, то для будь-якого моменту часу $t$ виконується умова $\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1$, яку називають *нормувальною*.

*Дискретним випадковим процесом* $X(t)$ називатимемо процес, який протікає в системі з дискретними станами. Такий процес зручно інтерпретувати за допомогою *графа* (схеми) можливих станів, на якому стрілками позначають можливі переходи зі стану у стан. Наприклад, граф можливих станів телефону-автомата можна зобразити у вигляді:

$$x_0 \rightleftarrows x_1,$$

де стан $x_0$ означає, що автомат вільний, $x_1$ – автомат зайнятий. Перехід вважаємо можливим, якщо система, перебуваючи у стані, звідки бере початок стрілка, може перейти з цього стану безпосередньо до того стану, куди спрямована стрілка, не потрапляючи в інші стани.

Стан, з якого система не може перейти в жоден інший, називають *станом без виходу* (або поглинаючим). Наприклад, електрична лампочка може перебувати в трьох станах: вимкнена ($x_0$), увімкнена ($x_1$) і перегоріла ($x_2$). Граф такої системи має вигляд:

$$x_0 \rightleftarrows x_1 \rightarrow x_2 .$$

Очевидно, що тут стан $x_2$ – стан без виходу. Стан $x_i$ називають *сусіднім* щодо стану $x_j$, якщо можливий безпосередній перехід зі стану $x_j$ у стан $x_i$.

Якщо серед станів є лише один стан без виходу $x_m$, то при достатньо тривалому протіканні процесу система рано чи пізно опиниться у цьому стані, тобто виконуватиметься умова $\lim\limits_{t\to\infty} p_m(t) = 1.$ Оскільки для будь-якого моменту часу виконується нормувальна умова, то в цьому випадку одержимо: $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = 0 \ \ (i \neq m).$ Існують системи з кількома станами без виходу, з групою станів без виходу або з кількома групами станів без виходу. Кілька станів називають *групою станів без виходу*, якщо з групи виходу немає, однак існує зв'язок між станами всередині групи. Наприклад, в системі, зображеній графом:

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightleftarrows x_2 ,$$

групою станів без виходу є стани $x_1$ і $x_2$.

Стан, в який система не може перейти з жодного іншого, називають *станом без входу*. Наприклад, для системи

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightleftarrows x_2$$

стан $x_0$ є станом без входу. Якщо $x_s$ – стан без входу, то виконується умова $\lim\limits_{t\to\infty} p_s(t) = 0.$

Аналіз будь-якої системи МО необхідно завжди розпочинати з розгляду всіх станів, в яких система може перебувати, та з побудови графа станів системи з зазначенням можливих переходів.

Нехай маємо дискретний випадковий процес, який протікає в системі з можливими станами $x_0$, $x_1$… $x_i$… $x_j$…. Позначимо умовну



ймовірність того, що в момент $t=t_0+\tau$ система перебуватиме у стані $x_j$, якщо в момент $t_0$ вона перебувала у стані $x_i$, через $p_{ij}(t_0,\tau)$.

Дискретний випадковий процес $X(t)$ називають ***марковським***, якщо ймовірність $p_{ij}(t_0,\tau)$ залежить лише від параметрів $i$, $j$, $t_0$, $\tau$, тобто від того, в якому стані система перебувала в момент $t_0$ і в який стан вона перейде через час $\tau$. Іншими словами, всі ймовірнісні характеристики марковського процесу в майбутньому (при $t>t_0$) залежать лише від того, в якому стані цей процес перебуває у теперішній момент часу $t_0$ і не залежать від того, як цей процес протікав до моменту $t_0$ (у минулому), тобто для марковського процесу *майбутнє залежить від минулого лише через теперішнє*.

Розрізняють два типи марковських випадкових процесів: з дискретним часом і з неперервним часом. *Марковським випадковим процесом з дискретним часом* називають такий марковський процес, коли переходи з одного стану в інший можливі у чітко визначені наперед моменти часу $t_1$, $t_2$… $t_k$…. Такі процеси рідко трапляються в системах МО, тому ми їх не розглядатимемо. *Марковським випадковим процесом з неперервним часом* називають такий марковський процес, коли перехід з одного стану в інший можливий у будь-який момент часу $t$.

Справедливе таке важливе твердження: ***якщо всі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, - пуассонівські, то випадковий процес, який протікає в системі, є марковським з неперервним часом.***

Обмежимося доведенням цього твердження для випадку, коли потоки, які переводять систему зі стану у стан – найпростіші. Розглянемо систему, яка складається з $n$ каналів обслуговування, на які надходить найпростіший потік замовлень. Зазначимо, що *каналом обслуговування* називають сукупність усіх технічних пристроїв, що забезпечують обслуговування одного замовлення. Кожен канал, коли він вільний, доступний для будь-якого замовлення. Кожне замовлення обслуговується лише одним каналом, кожен канал обслуговує одночасно лише одне замовлення (тоді він зайнятий). Замовлення, яке застало всі канали зайнятими, втрачається.

Розглянемо процес зміни станів такої системи. У будь-який момент часу система може перебувати в одному з таких станів: $x_0$ – усі канали вільні; $x_1$ – один канал зайнятий, усі інші – вільні; $\ldots x_n$ – усі канали зайняті. Нехай у деякий момент часу $t_0$ наша система перебуває у стані $x_k$. Доведемо, що подальше протікання процесу цілком визначається цим фактом і не залежить від того, що відбувалося до моменту $t_0$ (іншими словами, процес є марковським). Справді, подальше протікання процесу цілком визначається такими чинниками: 1) моментами закінчення обслуговувань, які здійснюються в момент часу $t_0$; 2) моментами прибуття нових замовлень; 3) тривалістю обслуговування замовлень, які надійдуть в систему після моменту $t_0$. Унаслідок вищезгаданої особливості показникового розподілу (див. § 2.9), тривалості частин обслуговування, що залишились, не залежать від того, як довго тривало обслуговування до моменту $t_0$. Оскільки потік замовлень – найпростіший, то минуле не впливає на те, коли з'являться замовлення після моменту $t_0$ (відсутність післядії). Нарешті, час обслуговування замовлень, які надійдуть після моменту $t_0$, жодним чином не залежить від того, як протікав процес до цього моменту. Отже, процес зміни станів системи є марковським. $\square$

Системи, в яких протікають марковські випадкові процеси з неперервним часом, називатимемо *пуассонівськими* системами. Оскільки стаціонарні і нестаціонарні пуассонівські потоки подій часто трапляються на практиці, то часто доводиться досліджувати пуассонівські системи МО.

Дослідження пуассонівських систем доцільно провадити в такій послідовності: 1) зазначити усі стани, в яких може перебувати система; 2) скласти граф станів, тобто зазначити шляхи можливих безпосередніх переходів системи зі стану у стан; 3) для кожного можливого переходу зазначити відповідну інтенсивність $\lambda_{ij}(t)$ потоку подій, який переводить систему зі стану $x_i$ безпосередньо у стан $x_j$; 4) зазначити, в якому стані перебуває система в початковий момент часу (при $t=0$).

Наприклад, граф



$$x_0 \underset{\lambda_{10}(t)}{\overset{\lambda_{01}(t)}{\rightleftarrows}} x_1 \qquad (3.1)$$

зображає систему з двома станами $x_0$ і $x_1$, причому перехід системи зі стану $x_0$ у стан $x_1$ відбувається під дією пуассонівського потоку подій з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$, а зі стану $x_1$ у стан $x_0$ – унаслідок дії пуассонівського потоку з інтенсивністю $\lambda_{10}(t)$.

Надалі домовимося, що якщо перехід зі стану $x_k$ безпосередньо у стан $x_l$ неможливий, то відповідної стрілки на графі станів вказувати не будемо, а інтенсивність відповідного потоку подій вважатимемо нульовою: $\lambda_{kl}(t) \equiv 0$. Зручно також вважати, що для будь-якого $k$ інтенсивність $\lambda_{kk}(t) \equiv 0$.

## § 3. 2. Система рівнянь щодо ймовірностей станів для пуассонівської системи масового обслуговування

Головна перевага пуассонівських систем стосовно їхнього дослідження полягає у тому, що для цих систем імовірності станів описують за допомогою звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Щоб проілюструвати методику виведення цих рівнянь, розглянемо просту систему з двома станами $x_0$ і $x_1$, граф якої має вигляд (3.1). Складемо рівняння, які визначають імовірності $p_0(t)$ і $p_1(t)$ того, що система у будь-який момент часу $t$ перебуває у стані $x_0$ і $x_1$, відповідно. З цією метою розглянемо момент часу $t$ і надамо йому малий приріст $\Delta t$. Тоді $p_0(t+\Delta t)$ – ймовірність того, що в момент часу $t+\Delta t$ система перебуває у стані $x_0$. Ця подія можлива у двох випадках: $A$ – система в момент часу $t$ була у стані $x_0$ і за час $\Delta t$ з нього не вийшла; $B$ – система в момент часу $t$ була у стані $x_1$ і за час $\Delta t$ перейшла у стан $x_0$. Унаслідок ординарності пуассонівських потоків подій імовірність здійснення кількох переходів (понад один) за час $\Delta t$ є величиною вищого порядку мализни порівняно з $\Delta t$ ($o(\Delta t)$).

Визначимо ймовірність події $A$. Ця подія відбудеться, якщо в момент часу $t$ система перебуватиме у стані $x_0$ (імовірність цього дорівнює $p_0(t)$) і за час $\Delta t$ не відбудеться жодної події в потоці з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$. Імовірність останньої події (див. § 1.2) дорівнює:

$$v_0(\Delta t, t) = e^{-\Lambda(\Delta t, t)} = \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{01}(\tau)d\tau\right).$$

Отже, $P(A) = p_0(t)\exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{01}(\tau)d\tau\right)$. Вважаючи величину $\Delta t$ малою, а інтенсивність $\lambda_{01}(t)$ – неперервною функцією, одержимо:

$$P(A) = p_0(t)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t + o(\Delta t)\right).$$

У цьому випадку інтеграл записано згідно з теоремою про середнє у вигляді:

$$\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{01}(\tau)d\tau = \lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t,$$

де $\tilde{t} \in (t, t+\Delta t)$.

Подія $B$ відбудеться, якщо в момент часу $t$ система перебуватиме у стані $x_1$ і в потоці подій з інтенсивністю $\lambda_{10}(t)$ за час $\Delta t$ відбудеться хоча б одна подія, а в потоці з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$ за цей же час не відбудеться жодної події. Спираючись на ті самі формули для пуассонівського потоку подій і вважаючи функцію $\lambda_{10}(t)$ неперервною, одержимо:

$$P(B) = p_1(t)\left(1-\exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{10}(\tau)d\tau\right)\right)\exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{01}(\tau)d\tau\right) =$$

$$= p_1(t)\left(1-1+\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t + o(\Delta t)\right) =$$

$$= p_1(t)\left(\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t)\right),$$

де $\tilde{\tilde{t}} \in (t, t+\Delta t)$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей (події несумісні), запишемо:

$$p_0(t+\Delta t) = P(A) + P(B) = p_0(t)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t\right) + p_1(t)\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t).$$

Здійснивши елементарні перетворення, одержимо:



$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_{01}(\tilde{t})p_0(t) + \lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}(t)p_0(t) + \lambda_{10}(t)p_1(t). \qquad (3.2)$$

Зазначимо, що при виведенні цього диференціального рівняння використано обидві властивості пуассонівського потоку подій: ординарність і відсутність післядії.

Очевидно, користуючись аналогічними міркуваннями і враховуючи для кожного стану всі можливі переходи, які зв'язують цей стан з сусідніми, можна отримати стільки звичайних диференціальних рівнянь, скільки існує можливих станів системи. Щодо нашого випадку друге рівняння для $p_1(t)$ запишемо у вигляді:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{10}(t)p_1(t) + \lambda_{01}(t)p_0(t). \qquad (3.3)$$

Природно, для кожного $t$ виконуватиметься умова $p_0(t) + p_1(t) = 1$.

Отже, ймовірності станів $p_0(t)$ і $p_1(t)$ пуассонівської системи, граф якої має вигляд (3.1), визначають інтегруванням системи диференціальних рівнянь (3.2), (3.3) за певних початкових умов.

Розглянемо складнішу пуассонівську систему з графом:

$$x_2 \underset{\lambda_{02}(t)}{\overset{\lambda_{20}(t)}{\rightleftarrows}} x_0 \underset{\lambda_{10}(t)}{\overset{\lambda_{01}(t)}{\rightleftarrows}} x_1. \qquad (3.4)$$

Нехай подія $A$ означає: система в момент часу $t$ була у стані $x_0$ і за час $\Delta t$ з нього не вийшла; подія $B$ – система в момент часу $t$ була у стані $x_1$ або у стані $x_2$ і за час $\Delta t$ перейшла у стан $x_0$. Міркуючи аналогічно як в попередньому випадку, одержимо:

$$p_0(t+\Delta t) = P(A) + P(B),$$

$$P(A) = p_0(t)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_{02}(\tilde{t}')\Delta t + o(\Delta t)\right) =$$

$$= p_0(t)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t - \lambda_{02}(\tilde{t}')\Delta t + o(\Delta t)\right);$$

$$P(B) = p_1(t)\left(\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t)\right) + p_2(t)\left(\lambda_{20}(\tilde{\tilde{t}}')\Delta t + o(\Delta t)\right),$$

де $\tilde{t}, \tilde{t}', \tilde{\tilde{t}}, \tilde{t}'' \in (t, t+\Delta t)$. Отож рівняння, що відповідає станові $x_0$, матиме вигляд:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\left(\lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t)\right) p_0(t) + \lambda_{10}(t) p_1(t) + \lambda_{20}(t) p_2(t). \qquad (3.5)$$

Аналогічно отримаємо рівняння, що відповідають станам $x_1$ та $x_2$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\lambda_{10}(t) p_1(t) + \lambda_{01}(t) p_0(t); \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -\lambda_{20}(t) p_2(t) + \lambda_{02}(t) p_0(t). \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Отже, ймовірності станів $p_0(t)$, $p_1(t)$ і $p_2(t)$ пуассонівської системи з графом у вигляді (3.4) визначають інтегруванням системи трьох диференціальних рівнянь (3.5), (3.6) за певних початкових умов.

Задання початкових умов у випадку пуассонівської системи з $n+1$ станами $x_0$, $x_1 \ldots x_n$ здійснюють так: якщо система у початковий момент часу перебуває в одному певному стані $x_m$, то початкові умови записують у вигляді $p_m(0) = 1, \quad p_i(0) = 0, \quad i \neq m.$ Загалом можна задати ймовірності всіх станів у початковий момент, відмінні від 0 і 1, з обов'язковим виконанням умови $\sum_{i=0}^{n} p_i(0) = 1.$

Аналізуючи систему рівнянь (3.5), (3.6), можна одержати просте *мнемонічне правило* щодо складання системи диференціальних рівнянь для ймовірностей станів $p_i(t) \ (i = \overline{0,n})$ пуассонівської системи з $n+1$ станами $x_0$, $x_1 \ldots x_n$. Похідна $dp_i(t)/dt$ дорівнює алгебричній сумі кількох членів; кількість членів цієї суми дорівнює кількості стрілок на графі станів системи, які виходять зі стану $x_i$ і входять у нього (з'єднують стан $x_i$ з іншими станами). Якщо стрілка спрямована у стан $x_i$, то член беруть зі знаком плюс; якщо стрілка виходить зі стану $x_i$ – зі знаком мінус. Кожний член суми дорівнює добуткові ймовірності того стану, від якого спрямована стрілка, на інтенсивність потоку подій, який переводить систему по цій стрілці. Кількість від'ємних членів дорівнює кількості стрілок, спрямованих зі стану $x_i$; кількість додатних членів дорівнює кількості стрілок , спрямованих у стан $x_i$.



Отже, для загального випадку пуассонівської системи з $n+1$ станами $x_0$, $x_1 \ldots$ $x_n$ систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів записують у вигляді:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \lambda_{kj}(t) p_k(t) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ik}(t) p_i(t), \qquad k = \overline{0,n}. \qquad (3.7)$$

Щоб отримати за допомогою загальної системи рівнянь (3.7) відповідну систему рівнянь для конкретної пуассонівської системи, необхідно пам'ятати: якщо перехід зі стану $x_k$ безпосередньо у стан $x_l$ неможливий, то інтенсивність відповідного потоку подій вважають нульовою: $\lambda_{kl}(t) \equiv 0,$ а також для будь-якого $k$ інтенсивність $\lambda_{kk}(t) \equiv 0.$

Щоб проінтегрувати систему (3.7), необхідно задати початкові ймовірності $p_0(0)$, $p_1(0) \ldots$ $p_n(0)$, на які накладаються природні обмеження:

$$0 \le p_k(0) \le 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(0) = 1.$$

Окрім того, для кожного $t>0$ розв'язки системи (3.7) повинні задовольняти нормувальну умову $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1.$

## § 3. 3. Рівняння Чепмана-Колмогорова. Ергодичні марковські процеси

Вивчимо дискретний марковський процес з неперервним часом, який володіє *ергодичною властивістю*.

Нехай маємо систему зі станами $x_0$, $x_1 \ldots$ $x_n$. Припустимо, що в момент часу $t_0$ система перебувала у стані $x_i$. Нагадаємо (див. § 3.1), що через $p_{ik}(t_0,t)$ ми позначили умовну ймовірність того, що в момент часу $\tau = t_0 + t$ система перебуватиме у стані $x_k$, якщо в момент $t_0$ вона перебувала у стані $x_i$. Згідно з означенням марковського процесу, можна записати:

$$p_{ik}(t_0, t) = P\{X(t_0 + t) = x_k \,/\, X(t_0) = x_i\}.$$

Якщо ймовірність $p_{ik}(t_0,t)$ не залежить від $t_0$, а лише від $t$, тобто

$p_{ik}(t_0,t)=p_{ik}(t)$, то марковський процес протікає однорідно в часі і його називають *однорідним*. Для того, щоб марковський випадковий процес був однорідним, очевидно, досить вимагати, щоб усі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, були стаціонарними пуассонівськими, тобто найпростішими потоками. Системи, в яких протікає однорідний марковський процес, називають *найпростішими системами*.

„Перехідні" ймовірності $p_{ik}(t)$ відіграють головну роль у дослідженні процесів Маркова. Очевидно, завжди:

$$p_{ik}(t)\ge 0, \quad \sum_{k=0}^{n} p_{ik}(t)=1 \quad (i,k=\overline{0,n}).$$

Якщо $t_1>0$, $t_2>0$, то справедливе співвідношення:

$$p_{ik}(t_1+t_2)=\sum_{r=0}^{n} p_{ir}(t_1)\,p_{rk}(t_2), \quad (i,k=\overline{1,n}), \tag{3.8}$$

яке називають ***рівнянням Чепмана-Колмогорова,*** воно є базовим у дослідженні марковських процесів.

Справді, щоб за час $t_1+t_2$ перейти зі стану $x_i$ у стан $x_k$, система повинна спочатку перейти за час $t_1$ зі стану $x_i$ в деякий стан $x_r$, а потім за час $t_2$ перейти зі стану $x_r$ у стан $x_k$, отож (3.8) – результат простого застосування формули повної ймовірності. Зауважимо, що формула (3.8) справедлива лише для процесів Маркова. Справді, лише для процесів Маркова перехідну ймовірність $p_{rk}(t_2)$ можна вважати незалежною від $i$. Якщо б наш процес не був марковським, то на місці $p_{rk}(t_2)$ повинна була б стояти ймовірність переходу за час $t_2$ зі стану $x_r$ у стан $x_k$ за додаткової умови, що система попередньо за час $t_1$ перейшла у стан $x_r$ зі стану $x_i$. Для марковських процесів імовірність $p_{rk}(t_2)$ не залежить від того, що відбувалось до цього переходу, тому і справедлива формула (3.8).

Якщо в початковий момент $t=0$ система перебуває у стані $x_i$, то ймовірність застати її в момент $t>0$ у стані $x_k$ дорівнює $p_{ik}(t)$. Однак, ми зробимо узагальнююче припущення щодо початкового моменту: у момент $t=0$ ми вважатимемо відомим не стан системи, а лише початкові ймовірності $p_i(0)$ $(i=\overline{0,n})$ різних станів. Цей загальний випадок зводиться до згаданого часткового випадку, коли з чисел $p_i(0)$ якесь одне дорівнює одиниці, а решта – нулю.



Імовірність $p_k(t)$ застати систему в момент $t$ у стані $x_k$ за формулою повної ймовірності дорівнює:

$$p_k(t)=\sum_{i=0}^{n} p_i(0)\,p_{ik}(t) \quad (k=\overline{0,n}); \tag{3.9}$$

ця ймовірність залежить як від $t$, так і від початкових даних $p_i(0)$ $(i=\overline{0,n})$.

Отже, ми бачимо, що ймовірності $p_k(t)$ залежать як від $t$, так і від початкових даних $p_i(0)$ $(i=\overline{0,n})$. У прикладних задачах, однак, зазвичай вважають можливим розглядати ймовірність $p_k$ застати систему у стані $x_k$ незалежною від обраного моменту часу і від початкових даних. Щоб теоретично обґрунтувати таку практику, спробуємо встановити, що процес $X(t)$ при $t\to\infty$ безмежно наближається до деякого стаціонарного процесу (такий процес $X(t)$ називають ***ергодичним***). Тобто необхідно довести, що ймовірності $p_k(t)$ при $t\to\infty$ прямують до деяких сталих $p_k$ $(k=\overline{0,n})$, які не залежать від початкових даних.

Отже, наше завдання – довести, що:

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t)=p_k \quad (k=\overline{0,n}), \tag{3.10}$$

де $p_k$ не залежать від початкових даних.

Передусім зведемо поставлену задачу до зручнішої щодо застосування рівняння Чепмана-Колмогорова за допомогою такого допоміжного твердження.

***Лема.*** Для того щоб імовірності $p_k(t)$ при $t\to\infty$ прямували до незалежних від початкових даних чисел $p_k$ $(k=\overline{0,n})$, необхідно і достатньо, щоб до тих самих границь прямували відповідні перехідні ймовірності $p_{ik}(t)$ $(k=\overline{0,n})$ за будь-якого значення $i$, тобто $\forall i=\overline{0,n}$ $\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t)=p_k$ $(k=\overline{0,n})$.

***Доведення.*** *Необхідність.* Нехай виконуються рівності (3.10), де $p_k$ не залежать від початкових даних. Вибираючи $p_i(0)=1,\ p_l(0)=0$ $(l\ne i)$, з (3.9) одержуємо: $p_k(t)=p_{ik}(t)$, і, отже, $\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t)=p_k$ $(i,k=\overline{0,n})$.

*Достатність*. Нехай

$$\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k \quad (i,k=\overline{0,n}).$$

Тоді, використовуючи (3.9) при будь-якому виборі ймовірностей $p_i(0)$, отримаємо:

$$p_k(t) \underset{t\to\infty}{\to} \sum_{i=0}^{n} p_i(0)\, p_k = p_k \quad (k=\overline{0,n}),$$

оскільки $\sum_{i=0}^{n} p_i(0) = 1.$ □

Унаслідок доведеної леми наше найближче завдання зводиться до доведення того, що $\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k \ (i,k=\overline{0,n}),$ де числа $p_k$ не залежать від $i$.

## § 3. 4. Транзитивний марковський процес. Теорема Маркова

Домовимося називати марковський процес, для якого перехідні ймовірності дорівнюють $p_{ik}(t)$ $(i,k=\overline{0,n})$, ***транзитивним***, якщо існує такий момент часу $t>0$, що $p_{ik}(t)>0$ $(i,k=\overline{0,n})$. Отож для транзитивного процесу існує такий проміжок часу, протягом якого можливий перехід системи з будь-якого стану в будь-який інший. Це означає, що граф станів системи не повинен мати жодного окремого стану без виходу і без входу і жодної групи таких станів.

***Теорема Маркова.*** Для будь-якого транзитивного марковського процесу $p_{ik}(t)$ $(i,k=\overline{0,n})$ границя $\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k$ $(i,k=\overline{0,n})$ існує і не залежить від $i$.

***Доведення.*** В усьому доведенні $k$ означатиме довільне фіксоване число ряду 0, 1… $n$. Покладемо:

$$\max_{0\le i\le n} p_{ik}(t) = M_k(t), \quad \min_{0\le i\le n} p_{ik}(t) = m_k(t).$$

Унаслідок (3.8) для будь-якого $i$ ($0\le i\le n$) і будь-яких $t>0$, $\tau>0$:



$$p_{ik}(t+\tau) = \sum_{r=0}^{n} p_{ir}(\tau)\, p_{rk}(t) \le M_k(t) \sum_{r=0}^{n} p_{ir}(\tau) = M_k(t),$$

і, отже, $M_k(t+\tau) \le M_k(t),$ тобто $M_k(t)$ є незростаючою функцією $t$. Аналогічно легко переконатися, що $m_k(t+\tau) \ge m_k(t),$ тобто $m_k(t)$ – неспадна функція $t$. Звідси випливає, що $M_k(t)$ і $m_k(t)$ при $t\to\infty$ прямують до певних границь. Теорему, очевидно, буде доведено, якщо ми переконаємось, що ці границі збігаються між собою (однакові), а для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta_k(t) = M_k(t) - m_k(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Зазначимо, що $\Delta_k(t)$ – незростаюча функція $t$.

Далі всі суми по всіх індексах поширюватимуться на значення 0, 1… $n$ цих індексів і ми не зазначатимемо області сумування.

Нехай $p_{ir}(t_0)>0$ $(i,r=\overline{0,n})$ (таке $t_0$ знайдеться унаслідок транзитивності процесу). Покладемо:

$$d_{il}^{(r)} = p_{ir}(t_0) - p_{lr}(t_0) \quad (0\le i,l,r\le n),$$

і надалі позначатимемо через $\Sigma'$ (відповідно $\Sigma''$) суми, які поширюються лише на область додатних (відповідно, від'ємних) $d_{il}^{(r)}$. Оскільки

$$\sum_r p_{ir}(t_0) = \sum_r p_{lr}(t_0) = 1 \quad (0\le i,\ l\le n),$$

то ми отримаємо (сумуємо по $r$ обидві частини рівності $d_{il}^{(r)} = p_{ir}(t_0) - p_{lr}(t_0)$ ):

$$0 = \sum_r d_{il}^{(r)} = \Sigma'_r d_{il}^{(r)} - \Sigma''_r |d_{il}^{(r)}| \quad (0\le i,\ l\le n),$$

отже,

$$\Sigma'_r d_{il}^{(r)} = \Sigma''_r |d_{il}^{(r)}| \overset{df}{=} h_{il} \quad (0\le i,\ l\le n);$$

а оскільки $p_{lr}(t_0) > 0\,(0\le l,r\le n),$ то

$$h_{il} = \Sigma'_r d_{il}^{(r)} = \Sigma'_r \left(p_{ir}(t_0) - p_{lr}(t_0)\right) < \Sigma'_r p_{ir}(t_0) < \Sigma_r p_{ir}(t_0) = 1.$$

Ця нерівність справедлива для всіх $i$ та $l$, тому й $h = \max_{0\le i,\,l\le n} h_{il} < 1.$

Нехай тепер $q$ – будь-яке натуральне число. Тоді при

$i,l=\overline{0,n}$ внаслідок (3.8):

$$p_{ik}(qt_0+t_0)-p_{lk}(qt_0+t_0)=\sum_r p_{ir}(t_0)p_{rk}(qt_0)-\sum_r p_{lr}(t_0)p_{rk}(qt_0)=$$
$$=\sum_r\left(p_{ir}(t_0)-p_{lr}(t_0)\right)p_{rk}(qt_0)=\sum_r d_{il}^{(r)}p_{rk}(qt_0)=\sum_r{}' d_{il}^{(r)}p_{rk}(qt_0)-$$
$$-\sum_r{}'' |d_{il}^{(r)}|\,p_{rk}(qt_0)\le M_k(qt_0)h_{il}-m_k(qt_0)h_{il}=h_{il}\Delta_k(qt_0)\le h\Delta_k(qt_0).$$

Отримана нерівність справедлива для будь-яких $i$ та $l$, отож можна взяти $p_{ik}(qt_0+t_0)=M_k(qt_0+t_0)$, $p_{lk}(qt_0+t_0)=m_k(qt_0+t_0)$; тоді одержуємо $\Delta_k(qt_0+t_0)\le h\Delta_k(qt_0)$. Рекурентне застосування цієї нерівності дає змогу записати:

$$\Delta_k(qt_0)\le h\Delta_k((q-1)t_0)\le h^2\Delta_k((q-2)t_0)\le\cdots\le h^{q-1}\Delta_k(t_0)\le h^{q-1}\underset{q\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

оскільки $\Delta_k(qt_0)\le 1$ – як різниця ймовірностей, і $h$<1.

Унаслідок монотонності функції $\Delta_k(t)$ звідси, очевидно, випливає, що $\Delta_k(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0.$ Теорему доведено. □

Отже, за теоремою Маркова будь-який транзитивний однорідний марковський процес зі скінченною кількістю станів володіє ***ергодичною*** властивістю. Режим роботи системи, при якому ймовірності $p_k$ перебування системи у стані $x_k$ $(k=\overline{0,n})$ не залежать від часу, називають ***стаціонарним*** режимом. Отож будь-який процес, який володіє ергодичною властивістю, має граничний стаціонарний режим, реалізація якого практично розпочинається після достатньо тривалого часу функціонування системи.

Отже, для того щоб марковський процес, який протікає в системі зі скінченною кількістю станів, володів ергодичною властивістю, досить вимагати, щоб: а) граф станів системи не мав жодного стану без виходу і без входу і жодної групи станів без виходу і без входу; б) усі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, були найпростішими (ця умова, нагадаємо, забезпечує однорідність марковського процесу). Такі системи називають *найпростішими ергодичними* системами.

Для будь-якої найпростішої системи (у тім числі й ергодичної) інтенсивності пуассонівських потоків подій не залежать від часу, і система диференціальних рівнянь для



ймовірностей станів перетворюється в систему $n+1$-го звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{kj}p_k(t)+\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ik}p_i(t)\qquad(k=\overline{0,n}).\qquad(3.11)$$

Розглянемо найпростішу ергодичну систему, роботу якої описують рівняннями (3.11). Через достатньо тривалий проміжок часу, коли система увійде в стаціонарний режим роботи, відповідно до рівностей $\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j$ $(i,j=\overline{0,n})$, ймовірності станів практично не залежатимуть від часу. Тоді маємо: $\lim_{t\to\infty}\frac{dp_k(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\lim_{t\to\infty}p_k(t)=\frac{dp_k}{dt}=0.$ Тому система диференціальних рівнянь (3.11) перетворюється в систему $n+1$-го однорідних алгебричних рівнянь:

$$-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{kj}p_k+\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ik}p_i=0\qquad(k=\overline{0,n}).$$

З цієї системи визначають значення $p_k$ $(k=\overline{0,n})$ з точністю до сталого множника, проте ця невизначеність усувається, якщо використати нормувальну умову $\sum_{k=0}^{n}p_k=1.$

## § 3. 5. Імовірність стану в стаціонарному режимі як середній відносний час перебування у цьому стані

Ми розглядали ергодичну властивість як властивість незалежності ймовірностей станів від часу і початкових умов при $t\to\infty$. Розглянемо інше трактування цієї властивості, яке використовують для розв'язування прикладних задач.

Нехай система, в якій протікає ергодичний процес, перебуває у стаціонарному режимі, за якого вона час від часу потрапляє у стан $x_j$ і через деякий випадковий час виходить з нього. Нехай випадкова величина $T_1^{(j)}$ – це час перебування системи у стані $x_j$ вперше; $\theta_1^{(j)}$ – час перебування системи поза станом $x_j$ вперше;

$H_1^{(j)} = T_1^{(j)} + \theta_1^{(j)}$ – час першого циклу обігу системи; … $H_i^{(j)} = T_i^{(j)} + \theta_i^{(j)}$ – час $i$-го циклу.

Унаслідок того, що система володіє ергодичною властивістю, вона рано чи пізно потрапить у стан $x_j$, згодом вийде з нього, знову потрапить у стан $x_j$, знову вийде з нього і т. д. Тобто система „блукатиме” своїми станами, іноді потрапляючи у стан $x_j$.

Розглянемо достатньо велику кількість циклів $N$ і візьмемо відношення сумарного часу перебування системи у стані $x_j$ до загального часу тривалості всіх $N$ циклів: $\left(\sum_{i=1}^{N} T_i^{(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} H_i^{(j)}\right)^{-1}$. При необмеженому зростанні кількості циклів $N$ це відношення прямуватиме до ймовірності $p_j$:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i^{(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} H_i^{(j)}\right)^{-1} = p_j.$$

З другого боку, внаслідок однорідності процесу випадкові величини $T_i^{(j)}$ $(i=\overline{1,n})$ розподілені однаково, а оскільки процес марковський, то вони незалежні. Те саме можна сказати й про випадкові величини $H_i^{(j)}$ $(i=\overline{1,n})$. Тому при достатньо великій кількості циклів $N$ можна записати таку наближену рівність:

$$\sum_{i=1}^{N} T_i^{(j)} \Big/ \sum_{i=1}^{N} H_i^{(j)} \approx \frac{NET^{(j)}}{NEH^{(j)}},$$

де $ET^{(j)}$ – середній час перебування системи у стані $x_j$, $EH^{(j)}$ – середній час циклу. Наближена рівність виконується тим точніше, чим більше було циклів, тому:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i^{(j)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} H_i^{(j)}\right)^{-1} = \frac{ET^{(j)}}{EH^{(j)}}.$$

Отож:

$$p_j = \frac{ET^{(j)}}{EH^{(j)}},$$

тобто ймовірність перебування системи у стані $x_j$ у стаціонарному режимі дорівнює відношенню середнього часу перебування



системи у стані $x_j$ до середнього часу циклу. Оскільки для всіх $i$ $H_i^{(j)} = T_i^{(j)} + \theta_i^{(j)}$, то $EH^{(j)} = ET^{(j)} + E\theta^{(j)}$, і формулу для $p_j$ можна записати так:

$$p_j = \frac{ET^{(j)}}{ET^{(j)} + E\theta^{(j)}},$$

де $E\theta^{(j)}$ – середній час перебування системи поза станом $x_j$.

Отже, ймовірність $p_j$ трактуватимемо як *середній відносний час* перебування системи у стані $x_j$.

### § 3. 6. Поняття про процеси загибелі та розмноження. Визначення ймовірностей станів для стаціонарного режиму

Для більшості систем МО, які ми розглядатимемо, граф станів матиме такий вигляд:

$$x_0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} x_1 \cdots x_{k-1} \underset{\mu_k}{\overset{\lambda_{k-1}}{\rightleftarrows}} x_k \underset{\mu_{k+1}}{\overset{\lambda_k}{\rightleftarrows}} x_{k+1} \cdots x_{n-1} \underset{\mu_n}{\overset{\lambda_{n-1}}{\rightleftarrows}} x_n.$$

Цей граф виглядає як ланцюжок станів, сполучених між собою стрілками переходів, причому з будь-якого стану $x_k$ (окрім крайніх) можливий перехід лише у два сусідніх з ним стани: $x_{k-1}$ (попередній) і $x_{k+1}$ (наступний). З крайнього лівого стану $x_0$ можливий перехід лише у стан $x_1$, а з крайнього правого стану $x_n$ – лише у стан $x_{n-1}$.

Процеси, які описують за допомогою такого графа станів, називають процесами ***загибелі і розмноження***, оскільки вперше їх застосовано в біології для аналізу чисельності популяцій, поширення епідемій та ін.

Наприклад, якщо вважати, що стан $x_k$ відповідає чисельності популяції, яка дорівнює $k$, то перехід $x_k \to x_{k+1}$ відбувається при народженні одного члена популяції, а перехід $x_k \to x_{k-1}$ – при загибелі одного члена популяції. Число $n$ може бути як скінченним, так і нескінченним. Кількість членів популяції буває скінченною у тому випадку, коли існують фізичні обмеження на максимальну чисельність популяції (наприклад, коли здійснюють аналіз розвитку мікроорганізмів у запаяній скляній посудині). Досліджуючи чисельність популяцій у природних умовах, вважають, що немає обмежень на цю чисельність (хоча земна куля обмежена, проте на практиці обмеження не досягаються).

Систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів процесу загибелі та розмноження можна записати за допомогою мнемонічного правила:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t); \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}); \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= -\mu_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Система (3.12) справедлива як для сталих інтенсивностей потоків, так і для випадку, коли $\lambda_k = \lambda_k(t)\ (k = \overline{0, n-1}),\ \mu_i = \mu_i(t)\ (i = \overline{1, n})$. Для інтегрування системи (3.12) необхідно задати початкові ймовірності:

$$p_0(0), p_1(0), \ldots, p_n(0); \quad \sum_{k=0}^{n} p_k(0) = 1.$$

Якщо кількість станів $n$ скінченна, то для будь-якого моменту часу $t$ виконуватиметься нормувальна умова $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1$.

Процеси, які описують за допомогою графів станів

$$x_0 \xrightarrow{\lambda_0} x_1 \cdots x_{k-1} \xrightarrow{\lambda_{k-1}} x_k \xrightarrow{\lambda_k} x_{k+1} \cdots x_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} x_n,$$

$$x_0 \xleftarrow[\mu_1]{} x_1 \cdots x_{k-1} \xleftarrow[\mu_k]{} x_k \xleftarrow[\mu_{k+1}]{} x_{k+1} \cdots x_{n-1} \xleftarrow[\mu_n]{} x_n,$$

відповідно, називають процесами (***чистого***) ***розмноження*** та (***чистої***) ***загибелі***. Щоб отримати систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів процесу розмноження, достатньо у системі (3.12) покласти $\mu_i \equiv 0\ (i = \overline{1, n})$, а для процесу загибелі, відповідно, покласти $\lambda_k \equiv 0\ (k = \overline{0, n-1})$.



Процес загибелі та розмноження, для якого всі інтенсивності $\lambda_k, \mu_i$ – сталі, володіє ергодичною властивістю, оскільки виконуються обидві необхідні для цього умови: а) граф станів не має жодного стану без виходу і без входу і жодної групи таких станів; б) усі потоки, які переводять систему зі стану в стан, – найпростіші. Такий процес називають *найпростішим процесом загибелі та розмноження*.

Отже, для найпростішого процесу загибелі та розмноження зі скінченною кількістю станів $n$ завжди існує стаціонарний режим. Для визначення граничних імовірностей стаціонарного режиму процесу загибелі та розмноження слугує система $n$+1-го однорідних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} &-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0; \\ &-(\lambda_k + \mu_k) p_k + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}); \\ &-\mu_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Після введення позначень $u_k = -\lambda_k p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}\ \ (k = \overline{0, n-1})$ система (3.13) набуде вигляду:

$$u_0 = 0;\ u_k - u_{k-1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1});\ u_{n-1} = 0,$$

звідки легко отримаємо, що $u_k = 0\ \ (k = \overline{0, n-1})$, тобто:

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p_k \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Отже,

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p_k = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}\mu_k} p_{k-1} = \cdots = p_0 \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Одержаний вираз для всіх імовірностей станів залежить від імовірності $p_0$ і параметрів потоків. Імовірність $p_0$ можна знайти з нормувальної умови:

$$p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} = p_0 + p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1, \qquad p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Сукупність формул для $p_{k+1}$ і $p_0$ дає змогу визначити всі ймовірності станів процесу загибелі і розмноження у випадку скінченної кількості станів.

Коли кількість станів необмежена ($n=\infty$) і немає жодних обмежень на ріст популяції, то стаціонарний режим може не існувати навіть при сталих параметрах  У цьому випадку процес безперервно „рухатиметься праворуч”.

## § 3. 7. Теорема Феллера для процесу чистого розмноження з необмеженою кількістю станів

Розглянемо процес чистого розмноження з необмеженою кількістю станів, описаний системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda_0 p_0(t);\\
&\frac{dp_1(t)}{dt}=-\lambda_1 p_1(t)+\lambda_0 p_0(t);\\
&\frac{dp_2(t)}{dt}=-\lambda_2 p_2(t)+\lambda_1 p_1(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt}=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1} p_{n-1}(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Справедлива така теорема.

***Теорема Феллера.*** Необхідною і достатньою умовою того, щоб при всіх значеннях $t$ розв’язки $p_k(t)$ системи чистого розмноження (3.14) задовольняли нормувальну умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)=1, \tag{3.15}$$

є розбіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{-1}$.

***Доведення.*** Розглянемо часткову суму ряду (3.15):

$$S_n(t)=p_0(t)+p_1(t)+\cdots+p_n(t).$$



Додавши перші $n+1$ рівнянь системи (3.14), одержимо:

$$S_n'(t)=-\lambda_n p_n(t). \tag{3.16}$$

У початковий момент часу $t=0$ система перебуває в одному зі станів $x_i$, тому $p_i(0)=1$. За умови, що $n\geq i$, одержимо $S_n(0)=1$, отож (інтегруємо рівняння (3.16)):

$$1-S_n(t)=\lambda_n\int_0^t p_n(\tau)d\tau. \tag{3.17}$$

Оскільки всі члени суми $S_n(t)$ – невід’ємні, то при кожному фіксованому значенні $t$ сума $S_n(t)$ зі зростанням $n$ не спадає (1–$S_n(t)$ – не зростає), тому існує границя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-S_n(t)\right)=\mu(t). \tag{3.18}$$

З (3.17) (враховуючи ще раз, що функція 1–$S_n(t)$ не зростає зі зростанням $n$) одержимо ланцюжок нерівностей:

$$\lambda_n\int_0^t p_n(\tau)d\tau\geq\mu(t)\Rightarrow\int_0^t p_n(\tau)d\tau\geq\frac{\mu(t)}{\lambda_n}\Rightarrow\int_0^t p_k(\tau)d\tau\geq\frac{\mu(t)}{\lambda_k},\ k=\overline{0,n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^t S_n(\tau)d\tau\geq\mu(t)\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Оскільки для всіх $t$ і $n$ виконується нерівність $S_n(t)\leq 1$ (як сума ймовірностей), то:

$$t=\int_0^t 1\cdot d\tau\geq\int_0^t S_n(\tau)d\tau\ \Rightarrow\ t\geq\mu(t)\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Якщо ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{-1}$ розбігається, то остання нерівність може виконуватись для будь-яких $t$ лише при $\mu(t)=0$, отже:

$$\forall t\ \ \mu(t)=0\ \overset{(3.18)}{\Rightarrow}\ \forall t\ \ S_n(t)\underset{n\to\infty}{\to}1,$$

тобто виконується (3.15). Необхідність доведено.

Для доведення достатності, враховуючи, що $1-S_n(t)\leq 1$, на основі (3.17) запишемо:

$$\lambda_n\int_0^t p_n(\tau)d\tau\leq 1\ \Rightarrow\ \frac{1}{\lambda_n}\geq\int_0^t p_n(\tau)d\tau\ \Rightarrow\ \int_0^t S_n(\tau)d\tau\leq\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}.$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$ в останній нерівності, отримаємо:

$$\int_0^t \left(1-\mu(\tau)\right) d\tau \le \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1}.$$

Якщо виконується (3.15), то згідно з (3.18):

$$\mu(t)=0 \ \forall\, t \ \Rightarrow \ t \le \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1} \ \forall\, t,$$

тому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1}$ розбігається. Теорему доведено. □

Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1}$ збігається, то, очевидно, що $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) < 1$, звідки випливає, що $1-\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = p(t) > 0$. Це означає, що існує скінченна ймовірність $p(t)$ того, що в процесі чистого розмноження за час $t$ відбудеться як завгодно велика (нескінченна) кількість змін станів системи. Зазначимо, що на суму $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)$ ми дивимось як на ймовірність того, що за час $t$ відбудеться лише скінченна кількість переходів. Такі процеси притаманні явищам типу ланцюгової реакції. У процесах чистого розмноження за відсутності обмежень на кількість станів ($n=\infty$) стаціонарний режим не існує: в системі відбувається постійний рух у напрямі станів, які перебувають „праворуч”.

Для процесу загибелі і розмноження з необмеженою кількістю станів нормувальна умова (3.15) виконується, якщо розбігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\lambda_i}$. Якщо, крім цього, збігається ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \tag{3.19}$$

то існує стаціонарний режим $p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t)$. Умова збіжності ряду (3.19) виконується, якщо, починаючи з деякого $k$, справедлива нерівність $\lambda_k / \mu_{k+1} \le \alpha < 1$.



## § 3. 8. Визначення закону розподілу часу перебування в групі станів

У задачах теорії масового обслуговування часто необхідно знайти закон розподілу часу перебування системи в групі станів. Наприклад, для $n$-канальної системи МО необхідно визначити закон розподілу часу неповного завантаження системи, відлік якого розпочинається з моменту звільнення одного з каналів (водночас решта $n$–1 каналів зайняті) і завершується в той момент, коли знову будуть зайняті усі $n$ каналів.

Розглянемо систему, граф станів якої має вигляд:

$$x_0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_i}{\overset{\lambda_{i-1}}{\rightleftarrows}} x_i \underset{\mu_{i+1}}{\overset{\lambda_i}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_j}{\overset{\lambda_{j-1}}{\rightleftarrows}} x_j \underset{\mu_{j+1}}{\overset{\lambda_j}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_{n-1}}{\overset{\lambda_{n-2}}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{\mu_n}{\overset{\lambda_{n-1}}{\rightleftarrows}} x_n.$$

Така система має $n+1$ стан, перехід можливий безпосередньо в сусідні стани (процес загибелі і розмноження). Визначимо закон розподілу часу $T$ неперервного перебування системи в групі станів $x_i$, $x_{i+1}\ldots$ $x_{j-1}$, $x_j$ $\left(i=\overline{0,n};\ j=\overline{0,n};\ i\le j\right)$ за умови, що в початковий момент часу $t=0$ система перебувала в якомусь одному з цих станів $x_s$ ($i\le s\le j$). Очевидно, що $T$ – це час блукання системи по станах $x_i\ldots$ $x_j$ до *першого* виходу за межі цих станів. Застосуємо такий прийом: розглянемо деяку підсистему $\tilde{X}$, стани якої зображено на графі:

$$\tilde{x}_{i-1} \underset{\mu_i}{\longleftarrow} \tilde{x}_i \underset{\mu_{i+1}}{\overset{\lambda_i}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_j}{\overset{\lambda_{j-1}}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_j \overset{\lambda_j}{\longrightarrow} \tilde{x}_{j+1}.$$

Ця підсистема має, окрім станів $\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}\ldots\tilde{x}_j$, ще два сусідні стани „ліворуч” і „праворуч”, в які вона може входити, проте не може з них повернутися. Такій підсистемі відповідає система диференціальних рівнянь:

$$\tilde{p}'_{i-1}(t) = \mu_i \tilde{p}_i(t);$$
$$\tilde{p}'_i(t) = -(\lambda_i + \mu_i)\,\tilde{p}_i(t) + \mu_{i+1}\tilde{p}_{i+1}(t);$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$$\tilde{p}'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k)\,\tilde{p}_k(t) + \lambda_{k-1}\tilde{p}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\tilde{p}_{k+1}(t) \quad (i < k < j); \qquad (3.20)$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$$\tilde{p}'_j(t) = -(\lambda_j + \mu_j)\,\tilde{p}_j(t) + \lambda_{j-1}\tilde{p}_{j-1}(t);$$
$$\tilde{p}'_{j+1}(t) = \lambda_j \tilde{p}_j(t)$$

з початковими умовами:

$$\tilde{p}_s(0) = 1; \quad \tilde{p}_k(0) = 0 \quad (i \le s \le j,\ k \ne s). \qquad (3.21)$$

Функція розподілу $F(t)$ часу $T$ перебування системи $\tilde{X}$ у групі станів $\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1} \dots \tilde{x}_j$ дорівнює $F(t)=P\{T<t\}$, тобто ймовірності того, що в момент часу $t$ система не перебуватиме у цій групі станів:

$$F(t) = \tilde{p}_{i-1}(t) + \tilde{p}_{j+1}(t) \quad (t > 0).$$

Випадкова величина $T$ – неперервна (бо розглядається марковський процес з неперервним часом і скінченною кількістю станів), тому її щільність розподілу:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d\tilde{p}_{i-1}(t)}{dt} + \frac{d\tilde{p}_{j+1}(t)}{dt} = \mu_i \tilde{p}_i(t) + \lambda_j \tilde{p}_j(t). \qquad (3.22)$$

Оскільки припускають, що при $t$=0 система $X$ перебуває в одному зі станів групи $x_i, x_{i+1} \dots x_j$ і розглядається лише час $T$ до *першого* виходу з цієї групи, то немає значення як система $X$ поводить себе за межами цієї групи і як до неї повертається, тому закон розподілу часу перебування у групі станів $\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1} \dots \tilde{x}_j$ системи $\tilde{X}$ той самий, що й системи $X$ в групі станів $x_i, x_{i+1} \dots x_j$.

Отже, для визначення щільності розподілу часу $T$ перебування системи в групі станів $x_i, x_{i+1} \dots x_j$ достатньо проінтегрувати систему (3.20) *без першого і останнього рівнянь* з початковими умовами (3.21) і знайти ймовірності $\tilde{p}_i(t), \tilde{p}_j(t)$. Після цього за формулою (3.22) визначають щільність розподілу $f(t)$.

За щільністю розподілу випадкової величини $T$ можна знайти її числові характеристики: математичне сподівання $ET = \int_0^\infty t f(t)dt$, другий початковий момент $ET^2 = \int_0^\infty t^2 f(t)dt$ і дисперсію $DT = ET^2 - (ET)^2$.

При $j=n$ у системі (3.20) не буде останнього рівняння, тому:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\tilde{p}_{i-1}(t) = \mu_i \tilde{p}_i(t).$$

При $i$=0 у системі (3.20) не буде першого рівняння, отже:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\tilde{p}_{j+1}(t) = \lambda_j \tilde{p}_j(t).$$

Іноді нема необхідності визначати закон розподілу часу $T$ перебування системи в групі станів $x_i, x_{i+1} \dots x_j$, а необхідно знайти лише математичне сподівання цього часу.

Визначимо середній час перебування системи $X$ у станах $x_i, x_{i+1} \dots x_n$ ($i \ge 1$). З цією метою розглянемо граф станів підсистеми $\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i \dots \tilde{x}_n$, для якої існує стаціонарний режим (порівняно з попереднім випадком тут у стані $\tilde{x}_{i-1}$ є вхід і вихід):

$$\tilde{x}_{i-1} \underset{\mu_i}{\overset{\lambda_{i-1}}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_i \underset{\mu_{i+1}}{\overset{\lambda_i}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_n}{\overset{\lambda_{n-1}}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_n. \qquad (3.23)$$

Позначимо через $\pi_{i,\dots,n}$ ймовірність перебування системи $X$ у станах $x_i, x_{i+1} \dots x_n$ в стаціонарному режимі. Розв'язавши систему алгебричних рівнянь для ймовірностей станів системи (3.23) в стаціонарному режимі:

$$-\lambda_{i-1}\tilde{p}_{i-1} + \mu_i \tilde{p}_i = 0;$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$$-(\lambda_k + \mu_k)\,\tilde{p}_k + \lambda_{k-1}\tilde{p}_{k-1} + \mu_{k+1}\tilde{p}_{k+1} = 0 \quad (i \le k \le n-1);$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$$-\mu_n \tilde{p}_n + \lambda_{n-1}\tilde{p}_{n-1} = 0$$

разом з нормувальною умовою $\sum_{k=i-1}^{n} \tilde{p}_k = 1,$ аналогічно як для системи (3.13) визначимо

$$\tilde{p}_{i-1} = \frac{1}{1 + \sum_{k=i-1}^{n-1} \prod_{s=i-1}^{k} \frac{\lambda_s}{\mu_{s+1}}}.$$

За $\tilde{p}_{i-1}$, можна визначити $\pi_{i,\ldots,n}$ як імовірність протилежної події: $\pi_{i,\ldots,n} = 1 - \tilde{p}_{i-1}$. З другого боку, на основі ергодичної властивості (див. § 3.5) $\pi_{i,\ldots,n} = \dfrac{\bar{t}_{i,\ldots,n}}{\bar{t}_{i-1} + \bar{t}_{i,\ldots,n}}$, звідки:

$$\bar{t}_{i,\ldots,n} = \bar{t}_{i-1} \frac{\pi_{i,\ldots,n}}{1 - \pi_{i,\ldots,n}} = \frac{1 - \tilde{p}_{i-1}}{\lambda_{i-1} \tilde{p}_{i-1}}.$$

Тут $\bar{t}_{i-1} = \dfrac{1}{\lambda_{i-1}}$ – середній час перебування системи у стані $x_{i-1}$; $\bar{t}_{i,\ldots,n}$ – шуканий середній час перебування системи в групі станів $x_i, x_{i+1} \ldots x_n$.

## § 3. 9. Інтегрування системи диференціальних рівнянь для ймовірностей станів

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (3.12) для ймовірностей станів процесу загибелі і розмноження у випадку сталих інтенсивностей потоків $\left(\lambda_k = \text{const} \quad (k = \overline{0, n-1}),\ \mu_i = \text{const} \quad (i = \overline{1, n})\right)$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t);$$
$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad (3.24)$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\mu_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t)$$



з початковими умовами:

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \qquad (3.25)$$

Найефективнішим методом інтегрування систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є метод, що ґрунтується на застосуванні ***перетворення Лапласа***.

При перетворенні Лапласа *зображенням* функції-оригіналу $f(t)$ називають функцію $F(s)$ комплексної змінної $s = \sigma + i\omega$, яка визначається інтегралом Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Співвідношення між зображенням і оригіналом позначають знаком $\doteq$ і записують: $F(s) \doteq f(t)$ або $f(t) \doteq F(s)$. Зображення похідної від функції-оригіналу визначається формулою $f'(t) \doteq sF(s) - f(0)$.

Якщо $F(s) = R(s)/Q(s)$ – раціональний правильний нескоротний дріб, знаменник якого має лише прості корені $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, то перехід до оригіналу здійснюється за допомогою співвідношення:

$$F(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} \doteq \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k t}, \qquad (3.26)$$

де

$$A_k = \frac{R(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}, \qquad Q'(s) = \frac{dQ(s)}{ds}.$$

Якщо ввести позначення $p_k(t) \doteq F_k(s) \quad (k = \overline{0, n})$, то застосування перетворення Лапласа до системи диференціальних рівнянь (3.24) з початковими умовами (3.25) приводить до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення функцій-зображень $F_k(s) \quad (k = \overline{0, n})$:

$$sF_0(s) - 1 = -\lambda_0 F_0(s) + \mu_1 F_1(s);$$
$$sF_k(s) = -(\lambda_k + \mu_k) F_k(s) + \lambda_{k-1} F_{k-1}(s) + \mu_{k+1} F_{k+1}(s) \quad (k = \overline{1, n-1});$$
$$sF_n(s) = -\mu_n F_n(s) + \lambda_{n-1} F_{n-1}(s). \qquad (3.27)$$

Розв'язки системи (3.27) записують так:

$$F_k(s) = \frac{R_k(s)}{Q(s)} \quad (k = \overline{0,n}),$$

де $R_k(s), Q(s)$ – многочлени, відповідно, не вище $n$-го і $n$+1-го степенів, причому $Q(s)$ – визначник системи (3.27). Згідно з (3.26) розв'язки системи (3.24) з початковими умовами (3.25) визначають за формулою:

$$p_k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R_k(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t} \quad (k = \overline{0,n}), \tag{3.28}$$

де $\alpha_i$ $(i = \overline{1, n+1})$ – прості корені рівняння $n+1$-го степеня $Q(s) = 0$.

Розглянемо випадок, коли $n$=2, і процес загибелі та розмноження описується графом станів:

$$x_0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} x_2,$$

а система звичайних диференціальних рівнянь для ймовірностей станів складається з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} &p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t); \\ &p_1'(t) = -(\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) + \lambda_0 p_0(t) + \mu_2 p_2(t); \\ &p_2'(t) = -\mu_2 p_2(t) + \lambda_1 p_1(t). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Задамо початкові умови у вигляді:

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = 0. \tag{3.30}$$

Тоді розв'язки системи для зображень:

$$\begin{aligned} &sF_0(s) - 1 = -\lambda_0 F_0(s) + \mu_1 F_1(s); \\ &sF_1(s) = -(\lambda_1 + \mu_1) F_1(s) + \lambda_0 F_0(s) + \mu_2 F_2(s); \\ &sF_2(s) = -\mu_2 F_2(s) + \lambda_1 F_1(s) \end{aligned} \tag{3.31}$$

визначаються у вигляді:

$$F_0(s) = \frac{s^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)s + \mu_1\mu_2}{Q(s)}; \quad F_1(s) = \frac{\lambda_0(s + \mu_2)}{Q(s)}; \quad F_2(s) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{Q(s)},$$

де $Q(s) = s(s+a)(s+b)$ – визначник системи (3.31);



$$a = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2 - \sqrt{D}\right); \qquad b = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{D}\right);$$

$$D = (\lambda_0 - \lambda_1 + \mu_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_1\mu_1.$$

Отже, тут $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -a, \alpha_3 = -b$ – корені рівняння $Q(s) = 0$. Оскільки

$$Q'(s) = (s+a)(s+b) + s(s+a) + s(s+b);$$

$$Q'(\alpha_1) = ab; \quad Q'(\alpha_2) = -a(b-a); \quad Q'(\alpha_3) = b(b-a);$$

$$R_0(s) = s^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)s + \mu_1\mu_2; \quad R_1(s) = \lambda_0(s + \mu_2); \quad R_2(s) = \lambda_0\lambda_1,$$

то користуючись формулами (3.28), одержимо розв'язки системи (3.29), (3.30) у вигляді:

$$p_0(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{ab} - \frac{\lambda_0(a - \lambda_1 - \mu_2)}{a(b-a)} e^{-at} + \frac{\lambda_0(b - \lambda_1 - \mu_2)}{b(b-a)} e^{-bt};$$

$$p_1(t) = \lambda_0 \left( \frac{\mu_2}{ab} - \frac{\mu_2 - a}{a(b-a)} e^{-at} + \frac{\mu_2 - b}{b(b-a)} e^{-bt} \right);$$

$$p_2(t) = \lambda_0\lambda_1 \left( \frac{1}{ab} - \frac{1}{a(b-a)} e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)} e^{-bt} \right).$$

Оскільки $b>a>0$, то перейшовши в одержаних співвідношеннях до границі при $t \to \infty$, відразу визначимо ймовірності станів стаціонарного режиму:

$$p_0 = \frac{\mu_1\mu_2}{ab}; \quad p_1 = \frac{\lambda_0\mu_2}{ab}; \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{ab},$$

які збігаються з розв'язками системи однорідних алгебричних рівнянь, що відповідає системі диференціальних рівнянь (3.29).

У найпростішому випадку, коли $n$=1, і процес загибелі та розмноження описується графом станів:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1,$$

а система звичайних диференціальних рівнянь для ймовірностей станів складається з двох рівнянь:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$p_1'(t) = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t),$$

для її інтегрування можна застосувати метод підстановки. Справді, враховуючи, що для всіх $t \ge 0$ виконується нормувальна умова:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1,$$

тобто $p_1(t) = 1 - p_0(t),$ одержимо лінійне неоднорідне рівняння для визначення $p_0(t)$:

$$p_0'(t) + (\lambda + \mu) p_0(t) + \mu = 0,$$

загальний розв'язок якого матиме вигляд:

$$p_0(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

де $C$ – довільна стала. Якщо початкові умови задати у вигляді:

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0,$$

то остаточно отримаємо:

$$p_0(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right);$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right).$$



# Розділ 4
# Розімкнені і замкнені системи масового обслуговування

## § 4.1. Основні параметри системи масового обслуговування. Розімкнені системи масового обслуговування

Основним параметром будь-якої системи МО є *кількість каналів обслуговування*, яку ми будемо позначати літерою $n$. ***Каналом обслуговування***, нагадаємо, називають сукупність усіх технічних пристроїв, що забезпечують обслуговування одного замовлення. Наприклад, телефон-автомат є каналом обслуговування. Якщо поруч є $n$ телефонів-автоматів, то їх можна вважати $n$-канальною системою МО. В їдальні самообслуговування канали обслуговування – це місця роздачі їжі. Якщо в їдальні $n$ місць роздачі, то її можна також вважати $n$-канальною системою МО.

Роботу кожного каналу обслуговування характеризують тим часом, який витрачається на обслуговування одного замовлення. Загалом цей час є випадковим. Якщо розглядати найпростішу пуассонівську систему, то час обслуговування $T_\mu$ одного замовлення повинен бути розподілений за показниковим законом з параметром $\mu$. Тоді на виході *неперервно зайнятого* каналу матимемо найпростіший потік обслужених замовлень з параметром $\mu$. Справді, припустимо, що на вході такого каналу завжди є черга з необслужених замовлень. Наприклад, є багато бажаючих зателефонувати біля телефону-автомата. Кожне замовлення незалежно від інших обслуговується випадковий час $T_\mu$, розподілений за показниковим законом з параметром $\mu$, і замовлення не покидає систему до завершення обслуговування (якщо бажаючий зателефонувати дочекається своєї черги, то він закінчить розмову обов'язково). Отже, на виході такої системи з'явиться потік обслужених замовлень, причому інтервали часу між подіями у цьому потоці будуть незалежними і розподіленими однаково за показниковим законом з параметром $\mu$, тобто потік обслужених замовлень буде найпростішим з інтенсивністю $\mu$. Надалі канал обслуговування характеризуватимемо

***інтенсивністю потоку обслуговувань μ***. Зауважимо, що ми розглядаємо лише такий випадок, коли на вході каналу *завжди* є черга. Якщо ж ця умова не виконується (черга то з'являється, то зникає), то інтенсивність потоку на виході каналу буде меншою від $\mu$.

Загалом параметр потоку обслуговувань може залежати від часу ($\mu(t)$). Тоді на виході неперервно зайнятого каналу буде пуассонівський потік обслужених замовлень з інтенсивністю $\mu(t)$.

Отже, можна уявити собі, що обслуговування відбувається так, ніби на замовлення, яке надійшло в канал, спрямовується потік обслуговувань з інтенсивністю $\mu$. Обслуговування розпочинається, як тільки в цьому потоці обслуговувань з'являється перша подія. Така постановка задачі дуже зручна в методичному плані, передусім тоді, коли потік пуассонівський.

Надалі припускатимемо, що потік обслуговувань кожного каналу – найпростіший з інтенсивністю $\mu$. Інтенсивність зазвичай визначають через середній час обслуговування одним каналом одного замовлення $\overline{t_s}$: $\mu = 1/\overline{t_s}$. Вважатимемо, що всі канали мають однакову інтенсивність потоку обслуговувань $\mu$ (іноді величину $\mu$ називають інтенсивністю обслуговування). Крім того, вважатимемо, що замовлення може обслуговуватися будь-яким з каналів, тобто будь-який з $n$ каналів „доступний" для замовника.

Важливим параметром системи МО є також ***інтенсивність потоку замовлень λ*** (сам потік замовлень вважаємо найпростішим). Інтенсивність потоку замовлень визначають через середній інтервал часу між надходженням двох замовлень $\overline{t_\lambda}$: $\lambda = 1/\overline{t_\lambda}$.

Крім параметрів $n$, $\mu$, $\lambda$, ефективність роботи системи МО залежить від ***дисципліни (алгоритму) обслуговування***, тобто порядку розподілу замовлень між вільними каналами: поведінки замовлень; закону утворення черги тощо. Наприклад, покупець у великому універмазі може довго шукати потрібний відділ, водночас в іншому магазині за умови добре зорганізованої інформаційної служби покупець витрачатиме на це менше часу. Або ж за наявності двох однакових відділів покупець може стояти в черзі в одному з них, водночас інший відділ буде вільним.



Покупці можуть покидати магазин, не дочекавшись своєї черги. Деякі покупці намагатимуться купити товар без черги і т.п. Тому при розв'язуванні задач методами теорії масового обслуговування необхідно чітко уявити собі весь порядок обслуговування.

Треба розрізняти ***розімкнені і замкнені*** системи МО. На вхід *розімкненої* системи МО надходить деякий потік замовлень, причому джерела цих замовлень до складу системи не належать і їхні стани аналізу не піддаються. Прикладами розімкненої системи є лічильник Гейгера, який реєструє космічні частинки, або (з деяким наближенням) АТС, на яку надходять виклики. У *замкненій* системі МО кількість джерел замовлень обмежена, а інтенсивність надходження замовлень залежить від станів джерел, зумовлених роботою системи загалом. Класичним прикладом такої системи є робота гаража, в якому є $m$ автомобілів і $n$ місць ремонту. У випадку поломки машини її скеровують на ремонт, отже, інтенсивність потоку замовлень залежить від того, скільки машин у певний проміжок часу експлуатують.

Розглянемо $n$-канальну розімкнену систему МО з відмовами, на вхід якої надходить найпростіший потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$. На виході такої системи *в стаціонарному режимі* (якщо він існує) є два потоки: потік обслужених замовлень з інтенсивністю $\lambda_0$ і потік необслужених замовлень з інтенсивністю $\lambda_H$. Тут виконуватиметься очевидна рівність, яку називають *рівнянням балансу* для розімкненої системи: $\lambda=\lambda_0+\lambda_H$, тобто $\frac{\lambda_0}{\lambda}+\frac{\lambda_H}{\lambda}=1$. Тому, очевидно, $P_{обс}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$ – це ***ймовірність обслуговування замовлення*** (імовірність того, що замовлення, яке надійшло на вхід системи, буде обслуженим), $P_H=\frac{\lambda_H}{\lambda}$ – ймовірність того, що замовлення не буде обслуженим. Іноді $\lambda_0$ називають *абсолютною*, а $P_{обс}$ *– відносною пропускною здатністю* системи.

Зазначимо, що навіть у випадку найпростішого потоку замовлень потоки обслужених і необслужених замовлень загалом не будуть найпростішими.

Однією з важливих характеристик розімкненої системи в стаціонарному режимі є ***середня кількість зайнятих каналів*** $\bar{k}$. Для системи без „взаємодопомоги” між каналами, коли замовлення може обслуговуватися лише одним каналом, інтенсивність потоку обслужених замовлень визначають за формулою $\lambda_0 = \mu\bar{k}$, де $\mu$ – інтенсивність потоку обслуговувань.

Для доведення цієї формули міркуємо так. Нехай у момент часу $t$ зайнята випадкова кількість каналів $Y$. Тоді миттєва інтенсивність потоку обслужених замовлень дорівнює $Y\mu$, а середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу – $\lambda_0 = E(Y\mu) = \mu EY = \mu\bar{k}$.

Розглянемо довільно вибраний канал і визначимо ймовірність $\pi_{з.к.}$ того, що в довільно вибраний момент часу цей канал буде зайнятим. Оскільки всі канали працюють в однакових умовах, то $\bar{k} = \pi_{з.к.} n$, звідки $\pi_{з.к.} = \bar{k}/n$.

З другого боку, на основі ергодичної властивості величину $\pi_{з.к.}$ можна отримати з виразу $\pi_{з.к.} = \bar{t}_{з.к.}/(\bar{t}_{з.к.} + \bar{t}_{п.к.})$, де $\bar{t}_{з.к.}$ – середній час зайнятості каналу (від моменту, коли замовлення надходить на обслуговування, аж до звільнення каналу); $\bar{t}_{п.к.}$ – середній час простою каналу (від моменту звільнення до прибуття нового замовлення). З останньої формули маємо:

$$\bar{t}_{з.к.} = \bar{t}_{п.к.} \frac{\pi_{з.к.}}{1-\pi_{з.к.}}; \qquad \bar{t}_{п.к.} = \bar{t}_{з.к.} \frac{1-\pi_{з.к.}}{\pi_{з.к.}}.$$

Нагадаємо, що отримані формули (починаючи від формули $\bar{k} = \pi_{з.к.} n$) справедливі лише для стаціонарного режиму роботи системи.

Розглянемо питання про середню кількість замовлень, які перебувають у системі за умови, що всі замовлення обслуговуються. Замовлення, що надійшло до системи, перебуває або в черзі, або на обслуговуванні. Переконаємось, що має місце формула $\bar{l} = \bar{s} + \bar{r}$, де $\bar{l}$ – середня кількість замовлень, які надійшли до системи; $\bar{s}$ – середня кількість замовлень, що обслуговуються (у стаціонарному режимі роботи системи); $\bar{r}$ – середня кількість замовлень, що перебувають у черзі. Справді, очевидно, що $\bar{t} = \bar{t}_r + \bar{t}_s$, де $\bar{t}$ – середній час перебування замовлення в системі; $\bar{t}_r$ – середній час перебування замовлення в черзі; $\bar{t}_s$ – середній час перебування замовлення на обслуговуванні. Оскільки інтенсивність потоку замовлень $\lambda$ – це середня кількість замовлень, що надходять на вхід системи за одиницю часу, то середню кількість замовлень, які перебувають у системі, можна обчислити як $\bar{l} = \lambda_0 \bar{t}$. Отже, $\bar{l} = \lambda_0 \bar{t} = \lambda_0 \bar{t}_r + \lambda_0 \bar{t}_s = \bar{r} + \bar{s}$.



## § 4. 2. Класична система масового обслуговування з відмовами

Систему МО називають ***системою з відмовами,*** якщо замовлення, яке надійшло в момент часу, коли всі канали зайняті, миттєво отримує відмову і покидає систему (втрачається).

Розглянемо $n$-канальну розімкнену систему МО, на вхід якої подається найпростіший потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$. Припустимо, що потік обслуговувань кожного каналу – також найпростіший з інтенсивністю $\mu$. Якщо замовлення застає всі канали зайнятими, то покидає систему необслуженим. Якщо ж замовлення застає вільним хоча б один канал, то воно приймається на обслуговування будь-яким з вільних каналів і обслуговується до завершення. Описану систему МО називають ***класичною***; розгляд такої системи Ерлангом зумовив розвиток теорії масового обслуговування (на прикладі дослідження роботи АТС).

Аналіз роботи цієї системи почнемо з розгляду можливих станів і побудови графа станів.

Розглянемо множину станів системи: $x_0$ – усі канали вільні, жодне замовлення не обслуговується; $x_1$ – зайнятий лише один канал (який – не важливо), обслуговується одне замовлення; …; $x_k$ – зайнято $k$ каналів (які саме – неважливо), обслуговується $k$ замовлень; …; $x_n$ – зайнято $n$ каналів, обслуговується $n$ замовлень. Граф станів цієї системи матиме вигляд:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{k\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_k \underset{(k+1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_n .$$

Як і раніше, неможливо перескочити „через стани”, оскільки всі потоки ординарні.

Пояснимо порядок визначення інтенсивностей потоків подій на графі станів системи. Коли система перебуває у стані $x_0$, на неї діє потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$, який переводить систему в стан $x_1$. Якщо система перебуває у стані $x_1$, то на неї діють вже два потоки подій: потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$, який переводить систему в стан $x_2$, та потік звільнень каналу (потік обслуговувань) з інтенсивністю $\mu$, який намагається перевести систему у стан $x_0$. У стані $x_k$ $(k=\overline{1,n-1})$ на систему також діють два потоки: потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$, який переводить систему в стан $x_{k+1}$, та потік звільнень всіх $k$ зайнятих каналів з інтенсивністю $k\mu$, який намагається перевести систему в стан $x_{k-1}$. У стані $x_n$ на систему діє лише потік звільнень усіх $n$ зайнятих каналів з інтенсивністю $n\mu$, який намагається перевести систему в стан $x_{n-1}$.

Запишемо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів згідно з мнемонічним правилом:

$$\begin{aligned} &p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_k'(t) = -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad k=\overline{1,n-1}; \qquad (4.1)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_n'(t) = -n\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Розв’язок системи з початковими умовами:

$$p_0(0)=1; \qquad p_k(0)=0, \quad k=\overline{1,n}$$

повинен задовольняти нормувальну умову $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1, \ t \ge 0.$

Рівняння (4.1) називають ***рівняннями Ерланга.*** Вони справедливі й для випадку, коли потоки подій є пуассонівськими (нестаціонарними) з інтенсивностями $\lambda(t)$, $\mu(t)$.

Стаціонарний режим роботи $(t \to \infty)$ для такої системи існує,



оскільки в ній немає станів без виходу і без входу і всі потоки найпростіші. Для ймовірностей станів стаціонарного режиму отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} &-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-(\lambda + k\mu) p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad k=\overline{1,n-1}; \qquad (4.2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-n\mu p_n + \lambda p_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

яку треба розв’язувати разом з нормувальною умовою $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$

Після введення позначень $u_i = -\lambda p_{i-1} + i\mu p_i \ \ (i=\overline{1,n})$ система (4.2) набуде вигляду:

$$u_1 = 0; \ u_{k+1} - u_k = 0 \ \ (k=\overline{1,n-1}); \ u_n = 0,$$

звідки випливає, що $u_i = 0 \ \ (i=\overline{1,n})$, тобто:

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} \quad (k=\overline{1,n}).$$

Звідси послідовно визначаємо:

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{\lambda^2}{k(k-1)\mu^2} p_{k-2} = \cdots = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \quad (k=\overline{0,n}).$$

Використовуючи нормувальну умову

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1,$$

отримаємо: $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$. Отже, маємо такі формули для ймовірностей станів стаціонарного режиму:

$$p_k = \frac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \quad k = \overline{0,n},$$

які називають ***формулами Ерланга***. Введемо позначення $\alpha = \lambda/\mu$ – середня кількість замовлень, які надходять у систему за середній час обслуговування одного замовлення в одному каналі. Перетворимо формули Ерланга, домноживши чисельник і знаменник на $e^{-\alpha}$:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}} = \frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha)}, \quad k = \overline{0,n},$$

де $P(k,\alpha)$, $R(n,\alpha)$ – табличні функції пуассонівського розподілу (див. § 2.10).

Зауважимо [1], що формули Ерланга залишаються вірними і тоді, коли потік замовлень – найпростіший, а час обслуговування має довільний розподіл з математичним сподіванням $\overline{t_s} = 1/\mu$.

Визначимо характеристики роботи класичної системи МО з відмовами. *Імовірність обслуговування замовлення* $P_{обс}$, очевидно, дорівнює ймовірності того, що замовлення, яке надійшло в систему, застане вільним хоча б один канал. Оскільки $p_n$ – це ймовірність того, що зайняті всі $n$ каналів, то:

$$P_{обс} = 1 - p_n = 1 - \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{R(n,\alpha) - P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$

З другого боку, ймовірність обслуговування замовлення дорівнює відносній пропускній здатності системи:

$$P_{обс} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\mu\overline{k}}{\lambda} = \frac{\overline{k}}{\alpha},$$

де $\lambda_0$ – щільність потоку обслужених замовлень (абсолютна пропускна здатність системи), $\overline{k}$ – середня кількість зайнятих каналів. Отже,



$$\overline{k} = \alpha P_{обс} = \alpha\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$

Вираз для $\overline{k}$ можна отримати й безпосередньо через імовірності $p_k$ (як математичне сподівання дискретної випадкової величини):

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \sum_{k=0}^{n} k\frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{1}{R(n,\alpha)}\sum_{k=0}^{n} kP(k,\alpha).$$

Порівнюючи обидва вирази для $\overline{k}$, одержимо рівність, яку часто використовуватимемо згодом:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(k,\alpha) = \alpha R(n-1,\alpha).$$

Введемо позначення:

$$p_n = B(n,\alpha) = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)} -$$

ймовірність того, що зайняті всі $n$ каналів, тобто ймовірність втрати замовлення для цієї системи. У додатку 1 наведено таблиці функцій $B(n,\alpha)$ для різних значень $n$ і $\alpha$.

*Імовірність того, що канал зайнятий*, дорівнює відношенню середньої кількості зайнятих каналів $\overline{k}$ до загальної кількості каналів $n$:

$$\pi_{з.к.} = \frac{\overline{k}}{n} = \frac{\alpha}{n}\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}.$$

Розглянемо випадкову величину $T_{з.к.}$ – *час зайнятості каналу*, що дорівнює тривалості проміжку часу, розпочинаючи з моменту надходження замовлення у канал до наступного безпосереднього моменту звільнення каналу. Оскільки потік обслуговувань – найпростіший, то час $T_{з.к.}$ розподілений за показниковим законом з параметром $\mu$. Тому середній час зайнятості каналу $\overline{t_{з.к.}} = ET_{з.к.} = \frac{1}{\mu}$.

*Часом простою каналу* $T_{п.к.}$ називають довжину проміжку часу від моменту звільнення каналу до часу прибуття в канал нового замовлення. Середній час простою каналу визначимо за ймовірністю зайнятості каналу (формула § 4.1):

$$\overline{t}_{п.к.} = \overline{t}_{з.к.}\frac{1-\pi_{з.к.}}{\pi_{з.к.}} = \frac{1}{\mu}\frac{1-\dfrac{\lambda}{n\mu}\dfrac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}}{\dfrac{\lambda}{n\mu}\dfrac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}} = \frac{n\mu R(n,\alpha)-\lambda R(n-1,\alpha)}{\mu\lambda R(n-1,\alpha)} =$$

$$= \frac{nR(n,\alpha)-\alpha R(n-1,\alpha)}{\lambda R(n-1,\alpha)}.$$

*Імовірність повного завантаження системи*, тобто того, що всі канали будуть задіяні, дорівнює:

$$\pi_{п.з.} = p_n = \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)} = 1-P_{обс}.$$

Розглянемо *час повного завантаження системи* $T_{п.з.}$ – час з моменту, коли зайнято замовленнями усі *n* каналів, до моменту звільнення хоча б одного каналу, тобто час одноразового перебування у стані $x_n$. Час $T_{п.з.}$ розподілений за показниковим законом з параметром $n\mu$, оскільки граф станів підсистеми для визначення закону розподілу часу перебування у стані $\tilde{x}_n$ має вигляд:

$$\tilde{x}_{n-1} \xleftarrow[n\mu]{} \tilde{x}_n.$$

Отже, середній час повного завантаження системи можемо знайти:

$$\overline{t}_{п.з.} = ET_{п.з.} = \frac{1}{n\mu}.$$

*Час неповного завантаження системи* $T_{н.з.}$ дорівнює довжині проміжку часу від моменту переходу системи зі стану $x_n$ у стан $x_{n-1}$ до першого повернення системи у стан $x_n$. Граф станів підсистеми для визначення закону розподілу часу неповного завантаження системи матиме вигляд:



$$\tilde{x}_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_{n-1} \xrightarrow{\lambda} \tilde{x}_n. \qquad (4.3)$$

Початкові умови для відповідної системи диференціальних рівнянь для ймовірностей станів записують у вигляді:

$$\tilde{p}_{n-1}(0) = 1,\ \ \tilde{p}_i(0) = 0\ \ (i \neq n-1).$$

Функцію розподілу часу $T_{н.з.}$ визначають з рівності:

$$F_{н.з.}(t) = P\{T_{н.з.} < t\} = \tilde{p}_n(t),$$

де $\tilde{p}_n(t)$ можна знайти за системою диференціальних рівнянь, яка відповідає графові (4.3). Щільність розподілу часу неповного завантаження системи дорівнює:

$$f_{н.з.}(t) = \frac{d}{dt}F_{н.з.}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{p}_n(t) = \lambda\tilde{p}_{n-1}(t).$$

Середній час неповного завантаження системи $\overline{t}_{н.з.}$ визначимо на основі ергодичної властивості: ймовірність $\pi_{п.з.}$ повного завантаження системи дорівнює відношенню середнього часу повного завантаження системи до суми середніх часів повного і неповного завантаження системи:

$$\pi_{п.з.} = \frac{\overline{t}_{п.з.}}{\overline{t}_{п.з.}+\overline{t}_{н.з.}}.$$

Оскільки $\pi_{п.з.} = p_n$, то

$$\overline{t}_{н.з.} = \overline{t}_{п.з.}\frac{1-\pi_{п.з.}}{\pi_{п.з.}} = \frac{1}{n\mu}\frac{1-\dfrac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)}}{\dfrac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)}} = \frac{1}{n\mu}\frac{R(n-1,\alpha)}{P(n,\alpha)}.$$

Під *простоєм системи* розуміють такий її стан, коли всі канали вільні (простоюють). Імовірність простою системи $\pi_{п.с.}$, очевидно, дорівнює ймовірності того, що всі канали вільні, тобто ймовірності перебування системи у стані $x_0$: $\pi_{п.с.} = p_0$. Час простою системи $T_{п.с.}$ розподілений за показниковим законом з параметром $\lambda$, оскільки граф відповідної підсистеми має такий вигляд:

$$\tilde{x}_0 \xrightarrow{\lambda} \tilde{x}_1.$$

Отже, середній час простою системи становить $\bar{t}_{п.с.} = 1/\lambda$.

Оскільки середня кількість замовлень, які перебувають у системі, дорівнює середній кількості зайнятих каналів ($\bar{l} = \bar{k}$), а для системи з втратами замовлень $\bar{l} = \lambda \bar{t} P_{обс}$, то середній час перебування замовлення в системі дорівнює $\bar{t} = \bar{k} / \lambda P_{обс}$.

<u>Приклад 4.1.</u> Автоматична телефонна станція (АТС) має 150 ліній зв'язку. Середня тривалість однієї розмови – 1 хв. Виклики на АТС надходять в середньому через 0,4 с. Знайти характеристики ефективності АТС: $\bar{k}$, $P_{обс}$, $\pi_{з.к.}$, $\bar{t}_{з.к.}$, $\bar{t}_{п.к.}$, $\bar{t}_{п.з.}$, $\bar{t}_{н.з.}$, $\bar{t}$.

<u>Розв'язання.</u> АТС – 150-канальна система МО з відмовами. Параметри системи: $n$=150; $\mu$=1/60 $с^{-1}$; $\lambda$=2,5 $с^{-1}$; $\alpha=\lambda/\mu$=150. Середня кількість зайнятих ліній зв'язку:

$$\bar{k} = \alpha \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)} = 150 \cdot \frac{R(149,150)}{R(150,150)}.$$

Для $\alpha$>20 справедлива наближена формула:

$$R(n,\alpha) = 0,5 + \Phi\left(\frac{n+0,5-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$ функція Лапласа. Тоді визначаємо:

$$R(149,150) = 0,5 + \Phi\left(\frac{149+0,5-150}{\sqrt{150}}\right) =$$

$$= 0,5 - \Phi(0,04) = 0,5 - 0,016 = 0,484;$$

$$R(150,150) = 0,5 + \Phi(0,04) = 0,5 + 0,016 = 0,516;$$



$$\bar{k} = 150 \cdot \frac{0,484}{0,516} = 150 \cdot 0,938 \approx 140,7; \; P_{обс} = \frac{\bar{k}}{\alpha} = 0,938; \; \pi_{з.к.} = \frac{\bar{k}}{n} = 0,938;$$

$$\bar{t}_{з.к.} = \frac{1}{\mu} = 60\,с; \quad \bar{t}_{п.к.} = \bar{t}_{з.к.} \frac{1-\pi_{з.к.}}{\pi_{з.к.}} = 60 \cdot \frac{1-0,938}{0,938} \approx 3,97\,с;$$

$$\bar{t}_{п.з.} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{150 \cdot 1/60} = 0,4\,с; \quad \pi_{п.з.} = p_n = 1 - P_{обс} = 0,062;$$

$$\bar{t}_{н.з.} = \bar{t}_{п.з.} \frac{1-\pi_{п.з.}}{\pi_{п.з.}} = 0,4 \cdot \frac{0,938}{0,062} = 6,05\,с; \quad \bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda P_{обс}} = \frac{140,7}{2,5 \cdot 0,938} = 60\,с.$$

<u>Приклад 4.2.</u> Розглянемо класичну 10-канальну систему МО з відмовами, під час роботи якої втрачається в середньому 1% замовлень. Відомо, що наступного року інтенсивність потоку замовлень зросте вдвічі. Визначити мінімальну кількість каналів, які потрібно додати, щоб середній відсоток втрачених замовлень не збільшився.

<u>Розв'язання.</u> Рівняння для визначення $\alpha$ одержимо з формули для ймовірності втрати замовлення (ймовірності того, що зайняті всі $n$ каналів):

$$p_n = p_{10} = B(10,\alpha) = \frac{P(10,\alpha)}{R(10,\alpha)} = 0,01.$$

За допомогою таблиці функції $B(n,\alpha)$ (див. додаток 1) знаходимо:

$$B(10;4,5) = 0,0105; \; B(10;4) = 0,0053; \quad \alpha = 4,5;$$

$$2\alpha = 9; \quad B(16;9) = 0,0110; \; B(17;9) = 0,0058.$$

Робимо висновок: якщо додати 7 каналів, то ймовірність втрати замовлення не збільшиться.

<u>Приклад 4.3.</u> Підприємець надає послуги, і його роботу можна змоделювати як $n$-канальну систему МО з відмовами з параметрами $\lambda$=4 $год^{-1}$; $\mu$=1 $год^{-1}$. За виконання кожного замовлення підприємець отримує 2,50 грн, а накладні витрати становлять $c$=1 грн за 1 год за кожен канал незалежно від того, зайнятий він, чи ні. Визначити, якою повинна бути кількість каналів такої системи МО, щоб підприємець отримував максимально можливий прибуток за 1 год, і яким буде цей

прибуток.

Розв'язання. Прибуток за годину у випадку наявності $n$ каналів обчислимо за формулою:

$$H(n,c)=\lambda P_{обс}\cdot 2{,}5-nc=\lambda[1-B(n,\alpha)]\cdot 2{,}5-nc=10[1-B(n,4)]-nc,$$

де $\alpha=\lambda/\mu=4$, $c=1$. Дані обчислень для різних значень $n$ запишемо у таблицю:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(n,4)$ | 0,80 | 0,62 | 0,45 | 0,31 | 0,20 | 0,12 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |
| $H(n,1)$ | 1,00 | 1,85 | 2,49 | 2,89 | 3,01 | 2,83 | 2,37 | 1,70 | 0,87 |

Отже, оптимальна кількість каналів – 5, а відповідний прибуток становить 3,01 грн за 1 год.

## § 4. 3. Система масового обслуговування з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами

*Формулювання задачі*. Нехай на вхід $n$-канальної системи МО надходить найпростіший потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$, а інтенсивність найпростішого потоку обслуговувань кожного каналу дорівнює $\mu$. Якщо замовлення застає всі канали вільними, то воно приймається на обслуговування і, на відміну від класичної системи з відмовами, обслуговується *всіма каналами одночасно*. Припустимо, що таке обслуговування можливе і продуктивність обслуговування при цьому збільшується в $n$ разів, тобто інтенсивність сумарного потоку обслуговувань становить $n\mu$. Після завершення обслуговування всі $n$ каналів звільняються одночасно. Якщо новоприбуле замовлення застає в системі $k$ замовлень ($k=\overline{1,n-1}$), то воно приймається на обслуговування і всі $n$ каналів перерозподіляються довільно між $k+1$ замовленнями, проте так, щоб усі канали брали участь в обслуговуванні. Якщо новоприбуле замовлення застає в системі $n$ замовлень, то воно отримує відмову і не обслуговується. Замовлення, яке потрапило на обслуговування, обслуговується до завершення. Якщо обслуговування якого-небудь замовлення завершено, то група каналів, що звільнилася, приєднується до обслуговування тих замовлень, які залишились на обслуговуванні. Отже, за наявності в системі хоча б одного замовлення всі $n$ каналів увесь час будуть зайнятими.

Як і раніше, пронумеруємо стани системи за кількістю замовлень у системі: $x_0$ – усі канали вільні, жодне замовлення не обслуговується; $x_k$ ($k=\overline{1,n}$) – в системі є $k$ замовлень, їх обслуговує $n$ каналів, загальна продуктивність обслуговування дорівнює $n\mu$, канали розподілено довільно між замовленнями. В кожному зі станів $x_k$ $(k=\overline{1,n})$, крім потоку замовлень з інтенсивністю $\lambda$, на систему діє потік звільнень усіх $n$ зайнятих каналів з інтенсивністю $n\mu$, який намагається перевести систему в стан $x_{k-1}$. Отже, граф станів такої системи набуде вигляду:

$$x_0 \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_k \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_n .$$

Розглянемо стаціонарний режим роботи такої системи $(\lambda=\text{const},\ \mu=\text{const},\ t\to\infty)$, який існує, оскільки вона володіє ергодичною властивістю (немає станів без виходу і без входу і всі потоки найпростіші). Для ймовірностей станів стаціонарного режиму отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&-\lambda p_0+n\mu p_1=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-(\lambda+n\mu)p_k+\lambda p_{k-1}+n\mu p_{k+1}=0,\quad k=\overline{1,n-1};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-n\mu p_n+\lambda p_{n-1}=0,
\end{aligned}\tag{4.4}$$

яку необхідно розв'язувати разом з нормувальною умовою $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k=1$.

Після введення позначень $u_i=-\lambda p_{i-1}+n\mu p_i$ $(i=\overline{1,n})$ система (4.4) набуде вигляду:

$$u_1=0;\ u_{k+1}-u_k=0\ \ (k=\overline{1,n-1});\ u_n=0,$$

звідки випливає, що $u_i = 0 \quad (i = \overline{1,n})$, тобто:

$$p_k = \frac{\lambda}{n\mu} p_{k-1} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Звідси послідовно визначаємо

$$p_k = \frac{\lambda}{n\mu} p_{k-1} = \frac{\lambda^2}{(n\mu)^2} p_{k-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k p_0 \quad (k = \overline{0,n}).$$

Введемо позначення $\frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n} = \kappa -$ середня кількість замовлень, які надходять у систему за середній час обслуговування одного замовлення всіма $n$ каналами. Тепер $p_k = \kappa^k p_0 \quad (k = \overline{0,n})$ і використовуючи нормувальну умову:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \kappa^k = p_0 \frac{1-\kappa^{n+1}}{1-\kappa} = 1,$$

отримаємо: $p_0 = \frac{1-\kappa}{1-\kappa^{n+1}}$. Отже, у випадку $\kappa \neq 1$ маємо такі формули для ймовірностей станів стаціонарного режиму:

$$p_k = \kappa^k \frac{1-\kappa}{1-\kappa^{n+1}}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Якщо $\kappa = 1$, тобто $\lambda = n\mu$, то, переходячи до границі з використанням правила Лопіталя, одержимо співвідношення:

$$p_k = \frac{1}{n+1}, \quad k = \overline{0,n},$$

які означають, що в цьому випадку всі стани рівноймовірні.

Імовірність обслуговування замовлення $P_{обс}$ для такої системи, очевидно, дорівнює ймовірності того, що замовлення, яке надійде до системи, не застане на обслуговуванні в ній $n$ замовлень. Оскільки $p_n$ – це ймовірність того, що в системі перебуває $n$ замовлень, то, як і для класичної системи з відмовами, $P_{обс} = 1 - p_n$. Середню кількість замовлень, які перебувають в системі, визначають як математичне сподівання дискретної



випадкової величини за формулою $\overline{l} = \sum_{k=0}^{n} k p_k$ (досі так визначали середню кількість зайнятих каналів, тепер інший зміст мають імовірності $p_k$). Імовірність зайнятості каналу для цієї системи, очевидно, дорівнює ймовірності зайнятості хоча б одного каналу (коли в системі є хоча б одне замовлення), тобто $1 - p_0$. З другого боку ця ймовірність дорівнює відношенню середньої кількості зайнятих каналів $\overline{k}$ до загальної кількості каналів $n$. Отже, маємо рівність $\overline{k}/n = 1 - p_0$. Звідси визначимо середню кількість зайнятих каналів $\overline{k} = n(1 - p_0)$.

<u>Приклад 4.4.</u> Порівняти відносну пропускну здатність ($P_{обс}$) класичної системи з відмовами та системи з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами, якщо параметри обох систем однакові: $n$=150; $\mu$=1/60; $\lambda$=2,5; $\alpha$=$\lambda$/$\mu$=150.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $\alpha$=$n$, то $\kappa = \alpha/n = 1$. Для класичної системи знаходимо:

$$P_{обс}^{(1)} = \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)} = \frac{R(149,150)}{R(150,150)} = 0,938.$$

Для системи з взаємодопомогою:

$$P_{обс}^{(2)} = 1 - p_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{150}{151} = 0,993.$$

Отже, система з взаємодопомогою має більшу пропускну здатність, ніж класична система з відмовами.

## § 4. 4. Система масового обслуговування з відмовами і випадковим розподілом замовлень по всіх каналах

*Формулювання задачі*. В класичній системі МО з відмовами нові замовлення розподілялись лише по вільних каналах. Тепер розглянемо випадок, коли таке замовлення скеровується з однаковою ймовірністю 1/$n$ у будь-який з $n$ каналів незалежно від того, зайнятий він чи ні. Якщо замовлення потрапляє у вільний канал, то воно приймається на обслуговування і обслуговується (інтенсивність потоку обслуговувань – $\mu$). Якщо замовлення потрапляє в зайнятий канал, то воно покидає систему необслуженим. Як і в попередніх задачах, якщо новоприбуле замовлення застане всі канали зайнятими, то воно отримає відмову і також покине систему. Проте замовлення може отримати відмову і за наявності вільних каналів (якщо потрапить у зайнятий канал). Вхідний потік замовлень, як завжди, найпростіший з інтенсивністю $\lambda$, замовлення не покидають систему до завершення обслуговування.

Прикладом такої системи МО може бути система протиповітряної оборони з порушеним керуванням розподілу цілей між каналами обстрілу.

Позначимо стани системи: $x_0$ – система вільна, новоприбуле замовлення обов'язково приймається на обслуговування; $x_k$ ($k=\overline{1,n-1}$) – в системі зайнято $k$ каналів, які обслуговують $k$ замовлень, нове замовлення потрапляє в один з вільних каналів з імовірністю $(n\text{-}k)/n$ і в цьому випадку обслуговуватиметься; $x_n$ – всі $n$ каналів зайняті, нове замовлення отримує відмову. Отже, можна вважати, що потік замовлень, який діє на систему у стані $x_k$ ($k=\overline{1,n-1}$), має інтенсивність, рівну $(n\text{-}k)\lambda/n$, тому граф станів системи набуває вигляду:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\mu}{\overset{\frac{n-1}{n}\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots x_{k-1} \underset{k\mu}{\overset{\frac{n-k+1}{n}\lambda}{\rightleftarrows}} x_k \underset{(k+1)\mu}{\overset{\frac{n-k}{n}\lambda}{\rightleftarrows}} x_{k+1} \cdots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\frac{2}{n}\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{n\mu}{\overset{\frac{1}{n}\lambda}{\rightleftarrows}} x_n .$$

Як і раніше, стаціонарний режим існує ($\lambda=\text{const},\ \mu=\text{const},\ t\to\infty$), випишемо систему для визначення ймовірностей станів:



$$-\lambda p_0+\mu p_1=0;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-\left(\frac{n-k}{n}\lambda+k\mu\right)p_k+\frac{n-k+1}{n}\lambda p_{k-1}+(k+1)\mu p_{k+1}=0,\quad k=\overline{1,n-1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-n\mu p_n+\frac{\lambda}{n}p_{n-1}=0.$$

Вводячи позначення:

$$u_i=-\frac{n-i+1}{n}\lambda p_{i-1}+i\mu p_i\quad (i=\overline{1,n}),$$

з системи отримаємо, що $u_i=0\quad (i=\overline{1,n})$, тобто:

$$p_k=\frac{\lambda}{k\mu}\frac{n-k+1}{n}p_{k-1}\quad (k=\overline{1,n}).$$

Звідси послідовно визначаємо:

$$p_k=\frac{\lambda}{k\mu}\frac{n-k+1}{n}p_{k-1}=\frac{\lambda^2}{k(k-1)\mu^2}\frac{(n-k+1)(n-k)}{n^2}p_{k-2}=\cdots=$$

$$=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n-i}{n}\right)p_0=\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k p_0=C_n^k\kappa^k p_0\quad (k=\overline{0,n}),$$

де, як і раніше, $\kappa=\dfrac{\lambda}{n\mu}$. Імовірність $p_0$ визначимо за допомогою нормувальної умови:

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=p_0\sum_{k=0}^{n}C_n^k\kappa^k=p_0(1+\kappa)^n=1\ \Rightarrow\ p_0=\frac{1}{(1+\kappa)^n}.$$

Отже, остаточно маємо:

$$p_k=\frac{C_n^k\kappa^k}{(1+\kappa)^n},\quad k=\overline{0,n}.$$

Обчислимо середню кількість зайнятих каналів, яка для цієї системи збігається з середньою кількістю замовлень, що перебувають в системі:

$$\bar{k}=\sum_{k=0}^{n}kp_k=p_0\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\kappa^k=p_0\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\kappa^k=p_0\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}(1+\kappa)^n=$$
$$=\frac{n\kappa(1+\kappa)^{n-1}}{(1+\kappa)^n}=\frac{n\kappa}{1+\kappa}.$$

Імовірність обслуговування замовлення (тут вона не дорівнює, як раніше, $1-p_n$, бо наявність хоча б одного вільного каналу ще не означає, що замовлення буде обслуженим) визначимо як відношення інтенсивності потоку обслужених замовлень $\lambda_0$ до інтенсивності потоку замовлень $\lambda$:

$$P_{обс}=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\mu\bar{k}}{\lambda}=\frac{\mu n\kappa}{\lambda(1+\kappa)}=\frac{\mu n}{\lambda}\frac{\lambda}{n\mu}\frac{1}{1+\kappa}=\frac{1}{1+\kappa}.$$

Доведемо, що у випадку $n$>1 ймовірність обслуговування для цієї системи менша, ніж для класичної системи МО з відмовами, якщо параметри $n$, $\lambda$, $\mu$ для обох систем однакові. Справді, оскільки для класичної системи з відмовами:

$$P_{обс}=\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)},$$

то нам досить довести, що:

$$\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}>\frac{1}{1+\kappa},$$

тобто:

$$R(n-1,\alpha)+\frac{\alpha}{n}R(n-1,\alpha)>R(n,\alpha)\ \Rightarrow\ R(n-1,\alpha)>$$
$$>\frac{n}{\alpha}\big(R(n,\alpha)-R(n-1,\alpha)\big)=\frac{n}{\alpha}P(n,\alpha)=\frac{n}{\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}=P(n-1,\alpha).$$

Отримана нерівність

$$R(n-1,\alpha)>P(n-1,\alpha),$$

очевидно, вірна, тому доведення завершено.

З доведеного безпосередньо випливає, що середній час перебування замовлення в системі для класичної системи з відмовами такий самий, як і для системи з відмовами і випадковим



розподілом замовлень, і дорівнює середньому часу зайнятості каналу. Справді, для першої системи:

$$\bar{t}^{(1)}=\frac{\bar{k}^{(1)}}{\lambda P_{обс}}=\frac{\alpha}{\lambda P_{обс}}\frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}=\frac{1}{\mu},$$

а для другої:

$$\bar{t}^{(2)}=\frac{\bar{k}^{(2)}}{\lambda P_{обс}}=\frac{n\kappa}{\lambda P_{обс}(1+\kappa)}=\frac{1}{\mu}.$$

## § 4. 5. Класична система масового обслуговування з очікуванням

Ми розглядали системи МО з відмовами, коли замовлення, заставши всі канали зайнятими, миттєво отримувало відмову і покидало систему. Особливістю системи МО з очікуванням є те, що замовлення може стати в чергу і очікувати звільнення каналу, який може його обслужити.

*Формулювання задачі.* На вхід $n$-канальної системи МО надходить найпростіший потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$. Інтенсивність найпростішого потоку обслуговувань кожного каналу дорівнює $\mu$. Потрапивши на обслуговування, замовлення обслуговується до завершення. Якщо замовлення застає всі канали зайнятими, то воно стає в чергу і чекає свого обслуговування, не покидаючи чергу. Дисципліна черги природна: спочатку обслуговують того, хто раніше прийшов (для пуассонівських систем дисципліна черги впливає лише на закон розподілу часу перебування замовлення в черзі). Максимальна кількість місць у черзі – $m$. Кожне замовлення може обслуговуватися лише одним каналом (взаємодопомоги немає). Отже, параметрами системи МО з очікуванням є величини $n$, $\lambda$, $\mu$ і $m$.

Стани такої системи зв’язуємо з кількістю замовлень, які перебувають у системі (на обслуговуванні і в черзі): $x_k$ ($k=\overline{0,n}$) – в системі є $k$ замовлень, вони обслуговуються $k$ каналами, черги немає; $x_{n+r}$ – в системі є $n+r$ замовлень ($r=\overline{1,m}$), $n$ з них обслуговуються в $n$ каналах і $r$ замовлень перебуває в черзі. Отже, система має $n+m+1$ стан:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_n \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+m-1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+m}.$$

Від стану $x_0$ до стану $x_n$ граф станів системи такий самий, як граф станів класичної системи Ерланга з відмовами. Для станів $x_{n+1}, x_{n+2} \ldots x_{n+m-1}$ на систему діє потік звільнень зайнятих $n$ каналів інтенсивності $n\mu$, намагаючись перевести її в сусідній стан ліворуч, і потік замовлень інтенсивності $\lambda$.

Для аналізу стаціонарного режиму роботи системи $(\lambda = \text{const},\ \mu = \text{const},\ t \to \infty)$ можна використати результати, одержані при розв’язуванні відповідних систем алгебричних рівнянь для класичної системи з відмовами (граф збігається від стану $x_0$ до стану $x_n$) і системи з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами (граф збігається від стану $x_n$ до стану $x_{n+m}$):

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad (k = \overline{0,n}); \qquad p_{n+r} = \kappa^r p_n \quad (r = \overline{1,m}); \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \kappa = \frac{\alpha}{n}.$$

Використаємо нормувальну умову:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k + \sum_{r=1}^{m} p_{n+r} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} p_0 + \sum_{r=1}^{m} \kappa^r \frac{\alpha^n}{n!} p_0 =$$

$$= p_0 \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\kappa(1-\kappa^m)}{1-\kappa} \right) = 1.$$

Звідси:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\kappa(1-\kappa^m)}{1-\kappa}}.$$

Домноживши чисельник і знаменник на $e^{-\alpha}$ і згадавши, що

$$P(k,\alpha) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}; \qquad R(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},$$

отримаємо шукані ймовірності станів:



$$p_k = \frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha) + \frac{\kappa(1-\kappa^m)}{1-\kappa} P(n,\alpha)} \quad (k = \overline{0,n}); \quad p_{n+r} = \kappa^r p_n \quad (r = \overline{1,m}). \qquad (4.5)$$

У цих формулах $\kappa \neq 1$. Якщо $\kappa = 1$, то $\alpha = n$ і оскільки

$$\lim_{\kappa \to 1} \frac{1-\kappa^m}{1-\kappa} = m,$$

то співвідношення (4.5) набувають вигляду:

$$p_k = \frac{P(k,n)}{R(n,n) + mP(n,n)} \quad (k = \overline{0,n}); \qquad p_{n+r} = p_n \quad (r = \overline{1,m}). \qquad (4.6)$$

Імовірність обслуговування замовлення дорівнює ймовірності того, що замовлення, яке надійшло в систему, застане вільним хоча б один з каналів або хоча б одне місце в черзі: $P_{обс} = 1 - p_{n+m} = 1 - \kappa^m p_n$. Водночас:

$$P_{обс} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\mu \bar{k}}{\lambda},$$

де $\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k + n \sum_{r=1}^{m} p_{n+r}$ – середня кількість зайнятих каналів (математичне сподівання дискретної випадкової величини з урахуванням того, що ймовірностям $p_{n+r}$ відповідає $n$ зайнятих каналів). Отже, оскільки $\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} P_{обс} = \alpha P_{обс}$, то $\bar{k} = \alpha(1 - \kappa^m p_n)$, а ймовірність зайнятості каналу:

$$\pi_{з.к.} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{\alpha}{n}(1 - \kappa^m p_n).$$

Середня кількість замовлень, які перебувають у черзі, також обчислимо як математичне сподівання:

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{m} r p_{n+r} = p_n \sum_{r=1}^{m} r \kappa^r.$$

Оскільки:

$$\sum_{r=1}^{m} r\kappa^r = \sum_{r=0}^{m} \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}\kappa^r = \kappa\frac{\partial}{\partial \kappa}\sum_{r=0}^{m}\kappa^r =$$

$$= \kappa\frac{\partial}{\partial \kappa}\frac{1-\kappa^{m+1}}{1-\kappa} = \kappa\frac{1-\kappa^m\left(m(1-\kappa)+1\right)}{(1-\kappa)^2},$$

то остаточно:

$$\overline{r} = \kappa p_n \frac{1-\kappa^m\left(m(1-\kappa)+1\right)}{(1-\kappa)^2} \qquad (\kappa \neq 1).$$

У випадку, коли $\kappa = 1$, враховуючи (4.6), маємо:

$$\overline{r} = \sum_{r=1}^{m} r\frac{P(n,n)}{R(n,n)+mP(n,n)} = \frac{m(m+1)}{2}\frac{P(n,n)}{R(n,n)+mP(n,n)}.$$

Розглянемо частковий випадок, який трапляється на практиці, коли *в системі є лише один канал обслуговування* ($n$=1) і $m$ місць у черзі. У цьому випадку $\kappa = \alpha$ і формули (4.5) спрощуються:

$$p_k = \frac{\alpha^k(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}}, \qquad k = \overline{0, m+1},$$

і виражають імовірність того, що в системі буде $k$ замовлень (одне замовлення обслуговується, а решта чекає в черзі). Імовірність обслуговування визначають з виразу:

$$P_{обс} = 1 - p_{m+1} = \frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+2}},$$

а середня кількість зайнятих каналів (або ймовірність того, що єдиний канал – зайнятий) становить:

$$\overline{k} = \pi_{з.к.} = \alpha P_{обс} = \alpha\frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+2}}.$$

Середню кількість замовлень, які перебувають у черзі, обчислимо, використовуючи раніше виведену формулу для $\overline{r}$ при $n$=1, $\kappa = \alpha$:

$$\overline{r} = \alpha p_1 \frac{1-\alpha^m\left(m(1-\alpha)+1\right)}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^{m+2}}\frac{1-\alpha^m\left(m(1-\alpha)+1\right)}{1-\alpha}.$$

<u>Приклад 4.5.</u> На автозаправці (АЗС) є $n$ бензоколонок. Майданчик поблизу АЗС допускає одночасне очікування не більше 3-х автомобілів. Потік автомобілів, які прибувають на заправку,



найпростіший з інтенсивністю $\lambda$=2 хв$^{-1}$. Час обслуговування автомобіля розподілений за показниковим законом з середнім значенням 1 хв ($\mu$=1). Визначити мінімальну кількість бензоколонок $n$, які забезпечать обслуговування не менше 95% автомобілів, що потребують заправки. Для знайденого $n$ обчислити основні характеристики ефективності системи.

<u>Розв’язання.</u> АЗС – $n$-канальна система МО з очікуванням і обмеженою довжиною черги ($m$=3). Для такої системи:

$$\alpha = \lambda/\mu = 2, \qquad P_{обс} = 1 - p_{n+m} = 1 - \kappa^m p_n = 1 - \kappa^m\frac{\alpha^n}{n!}p_0,$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\kappa(1-\kappa^m)}{1-\kappa}\right)^{-1}, \quad \kappa = \frac{\alpha}{n} \neq 1;$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}m\right)^{-1}, \quad \kappa = 1;$$

причому, згідно з умовою задачі, має бути: $P_{обс} \geq 0,95$. При $n$=1 маємо:

$$p_0 = \frac{1}{31}, \qquad P_{обс} = 1 - \frac{2^4}{31} = \frac{15}{31} \approx 0,484 < 0,95,$$

отже, однієї бензоколонки недостатньо. Аналогічні обчислення для $n$=2 і $n$=3 дають:

$$n = 2 \;\Rightarrow\; \kappa = 1, \quad p_0 = 0,091, \; P_{обс} = 0,818 < 0,95;$$

$$n = 3 \;\Rightarrow\; \kappa = 2/3, \; p_0 = 0,122, \; P_{обс} = 0,952 > 0,95.$$

Отож необхідна кількість бензоколонок – 3. Визначимо характеристики системи при $n$=3. Середня кількість зайнятих каналів (бензоколонок) дорівнює середній кількості автомобілів, які перебувають на обслуговуванні:

$$\overline{k} = \overline{s} = \alpha P_{обс} = 2 \cdot 0,952 = 1,904 \approx 2.$$

Отже, в середньому одна бензоколонка буде простоювати. Середня кількість автомобілів, які перебувають у черзі, і середній час очікування в черзі, відповідно, становлять:

$$\overline{r} = \kappa\frac{\alpha^n}{n!}p_0\frac{1-\kappa^m\left(m(1-\kappa)+1\right)}{(1-\kappa)^2} = 0,397, \qquad \overline{t_r} = \frac{\overline{r}}{\lambda P_{обс}} = 0,209 \text{ хв.}$$

Середня кількість автомобілів, які перебувають на АЗС, $\overline{l} = \overline{s} + \overline{r} = 2,301$. Середній час, який витрачається на перебування на АЗС, $\overline{t} = \overline{t}_r + \mu^{-1} = 1,209$ хв.

<u>Приклад 4.6.</u> Знайти закон розподілу часу неповного завантаження двоканальної системи МО з очікуванням і порівняти його з законом розподілу часу неповного завантаження двоканальної системи МО з відмовами.

<u>Розв'язання.</u> Параметри системи $n$=2, $\lambda$, $\mu$, $m$. Граф станів двоканальної системи з очікуванням має вигляд:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_2 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{2+1} \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{2+m}.$$

Час неповного завантаження системи дорівнює довжині проміжку часу від моменту переходу системи зі стану $x_2$ у стан $x_1$ до подальшого повернення системи у стан $x_2$. Граф станів підсистеми для визначення закону розподілу випадкової величини $T_{н.з.}$ будуємо з урахуванням того, що перехід зі стану $x_2$ у стан $x_1$ на час перебування в групі станів ($x_0$, $x_1$) не впливає, оскільки в початковий момент система перебуває у стані $x_1$:

$$\tilde{x}_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \tilde{x}_1 \overset{\lambda}{\longrightarrow} \tilde{x}_2.$$

Імовірності станів підсистеми задовольняють систему диференціальних рівнянь:

$$\tilde{p}_0'(t) = -\lambda \tilde{p}_0(t) + \mu \tilde{p}_1(t);$$
$$\tilde{p}_1'(t) = -(\lambda+\mu)\tilde{p}_1(t) + \lambda \tilde{p}_0(t);$$
$$\tilde{p}_2'(t) = \lambda \tilde{p}_1(t)$$

з початковими умовами:

$$\tilde{p}_1(0) = 1; \quad \tilde{p}_0(0) = \tilde{p}_2(0) = 0.$$

Функцію розподілу часу $T_{н.з.}$ визначають з рівності:

$$F_{н.з.}(t) = P\{T_{н.з.} < t\} = \tilde{p}_2(t),$$

а щільність розподілу часу неповного завантаження системи становить:



$$f_{н.з.}(t) = \frac{d}{dt} F_{н.з.}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{p}_2(t) = \lambda \tilde{p}_1(t).$$

Отже, досить розв'язати систему, яка складається лише з перших двох диференціальних рівнянь для $\tilde{p}_0(t)$ і $\tilde{p}_1(t)$. Застосуємо перетворення Лапласа, зберігаючи позначення § 3.9. Тоді з системи для зображень:

$$sF_0(s) = -\lambda F_0(s) + \mu F_1(s);$$
$$F_1(s) - 1 = -(\lambda+\mu)F_1(s) + \lambda F_0(s)$$

знаходимо:

$$F_1(s) = \frac{s+\lambda}{(s+a)(s+b)},$$

де

$$a = \frac{1}{2}\left(2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}\right); \quad b = \frac{1}{2}\left(2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}\right).$$

Згідно з (3.28):

$$\tilde{p}_1(t) = \frac{\lambda - a}{b-a} e^{-at} - \frac{\lambda - b}{b-a} e^{-bt}; \quad f_{н.з.}(t) = \lambda \tilde{p}_1(t).$$

Зазначимо, що визначений нами закон розподілу часу неповного завантаження двоканальної системи з очікуванням збігається з законом розподілу часу неповного завантаження двоканальної системи МО з відмовами з параметрами $\lambda$, $\mu$, оскільки для останньої це – також закон розподілу часу перебування в групі станів ($x_0$, $x_1$) з тим самим графом станів підсистеми.

## § 4. 6. Система масового обслуговування з очікуванням та необмеженою кількістю місць у черзі

Ми вивчали систему МО з очікуванням у припущенні, що кількість місць у черзі – обмежена ($m < \infty$). Тепер розглянемо *систему без обмежень на довжину черги* ($m = \infty$). Для такої системи стаціонарний режим існує лише за умови, що $\kappa = \dfrac{\lambda}{n\mu} < 1$. Справді, ряд (3.19), збіжність якого забезпечує існування стаціонарного режиму для процесу загибелі і розмноження з необмеженою кількістю станів (див. § 3.7), у цьому випадку набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{i=0}^{k}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}+\sum_{k=n}^{\infty}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}\prod_{i=n}^{k}\frac{\lambda}{n\mu}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}}+\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k+1}$$

і, отже, він збігається, якщо $\frac{\lambda}{n\mu}<1.$ Ця умова засвідчує, що середня кількість замовлень, що обслуговуються за одиницю часу всіма $n$ каналами, має бути більша, ніж середня кількість замовлень, які надходять в систему за той самий час. При $m\to\infty$ формули (4.5) для ймовірностей станів стаціонарного режиму набувають вигляду:

$$p_k=\frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha)+\frac{\kappa}{1-\kappa}P(n,\alpha)},\quad k=\overline{0,n};\quad p_{n+r}=\kappa^r p_n,\quad r=1,2,\ldots.$$

Введемо позначення $C(n,\alpha)=\sum_{k=n}^{\infty}p_k$ – імовірність того, що зайняті усі $n$ каналів. Тоді:

$$C(n,\alpha)=\left(\frac{\alpha^n}{n!}+\sum_{s=1}^{\infty}\kappa^s\frac{\alpha^n}{n!}\right)p_0=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{1}{1-\kappa}p_0=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\frac{1}{1-\kappa}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\kappa}{1-\kappa}}=$$

$$=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{(1-\kappa)\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}}=\frac{P(n,\alpha)}{(1-\kappa)R(n,\alpha)+P(n,\alpha)}=$$

$$=\left(1+(1-\kappa)\left(B(n,\alpha)\right)^{-1}\right)^{-1}.$$



У додатку 2 наведено таблиці значень функції $C(n,\alpha)$ для різних $n$ і $\alpha.$ Інші характеристики ефективності такої системи визначимо, перейшовши до границі при $m\to\infty$ у відповідних співвідношеннях, отриманих для випадку $m<\infty$:

$$\overline{k}=\alpha,\quad \pi_{з.к.}=\frac{\alpha}{n},\quad P_{обс}=1,\quad \overline{r}=\frac{\kappa p_n}{(1-\kappa)^2}.$$

Для *одноканальної системи без обмежень на довжину черги* стаціонарний режим існує за умови, що $\alpha<1.$ У цьому випадку отримаємо такий вираз для ймовірності наявності $k$ замовлень у системі:

$$p_k=\alpha^k(1-\alpha),\qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Відповідні характеристики ефективності системи визначають так:

$$\overline{k}=\pi_{з.к.}=\alpha,\quad P_{обс}=1,\quad \overline{r}=\frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Розглянемо закон розподілу часу перебування в черзі для $n$-канальної системи без обмежень на довжину черги у припущенні, що дисципліна черги природна: раніше обслуговують того, хто раніше прибув.

Якщо $W$ – час очікування у черзі, то для довільного моменту часу $t>0,$ очевидно, виконується рівність

$$P\{W>t\}=P\{W>0\}P\{W>t|W>0\},$$

де $P\{W>0\}=C(n,\alpha)$ – імовірність того, що зайняті всі $n$ каналів. Нехай $Q$ – кількість замовлень у черзі в момент надходження довільного замовлення. Тоді, за формулою повної ймовірності:

$$P\{W>t|W>0\}=\sum_{j=0}^{\infty}P\{W>t|W>0,Q=j\}P\{Q=j|W>0\}.$$

За наявності черги, коли всі $n$ каналів зайняті, потік обслужених замовлень – найпростіший з параметром $n\mu,$ тому:

$$P\{W>t|W>0,Q=j\}=\sum_{i=0}^{j}\frac{(n\mu t)^i}{i!}e^{-n\mu t}.$$

Тепер, використовуючи означення умовної ймовірності, можемо записати:

$$P\{Q=j|W>0\}=\frac{P\{Q=j,W>0\}}{P\{W>0\}}.$$

Оскільки $P\{Q=j,W>0\}=p_{n+j}=\kappa^j p_n=\frac{\alpha^n}{n!}\kappa^j p_0$, то:

$$P\{Q=j|W>0\}=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\kappa^j p_0}{\frac{\alpha^n}{n!}\frac{1}{1-\kappa}p_0}=(1-\kappa)\kappa^j \quad (j=0,1,\ldots).$$

Тоді:

$$P\{W>t|W>0\}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{(n\mu t)^i}{i!}e^{-n\mu t}(1-\kappa)\kappa^j=$$

$$=e^{-n\mu t}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{(n\mu t)^i}{i!}(1-\kappa)\kappa^j=$$

$$=e^{-n\mu t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n\mu t)^i}{i!}(1-\kappa)\frac{\kappa^j}{1-\kappa}=e^{-n\mu t}\cdot e^{\kappa n\mu t}=e^{-(1-\kappa)n\mu t},$$

і остаточно:

$$P\{W>t\}=C(n,\alpha)e^{-(1-\kappa)n\mu t}.$$

За допомогою двох останніх рівностей одержимо формули для відповідних математичних сподівань випадкової величини *W*:

$$E(W|W>0)=\frac{1}{(1-\kappa)n\mu}; \qquad E(W)=\frac{C(n,\alpha)}{(1-\kappa)n\mu}.$$

Приклад 4.7. В умовах прикладу 4.5 розглянути випадок, коли кількість автомобілів, які можуть чекати на заправку, не обмежується.

Розв'язання. У випадку, коли довжину черги поблизу АЗС не обмежено, стаціонарний режим роботи системи існує лише при $\kappa<1$, тобто для $n\geq 3$ (бензоколонок не менше трьох). Обчислення основних характеристик такої системи при $n=3$ за формулами, отриманими для випадку $m=\infty$, дає такі результати:



$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^{-1}=\frac{1}{9}; \quad P_{обс}=1; \quad \bar{k}=\bar{s}=\alpha=2;$$

$$\bar{r}=\kappa\frac{\alpha^n}{n!}p_0=\frac{8}{9}; \quad \bar{t}_r=\frac{\bar{r}}{\lambda}=\frac{4}{9}\text{хв}; \quad \bar{l}=\bar{s}+\bar{r}=2,889; \quad \bar{t}=\frac{\bar{l}}{\lambda}=1,444\,\text{хв}.$$

Отже, порівняно з АЗС з обмеженою довжиною черги ($m=3$) у цьому випадку більше, ніж у 2 рази, зростає середня кількість автомобілів, які перебувають у черзі $\bar{r}$, і середній час очікування в черзі $\bar{t}_r$.

Приклад 4.8. Продаж квитків на автостанції здійснюється в касі з одним віконцем. До каси підходять в середньому 20 пасажирів за годину. Касир в середньому обслуговує чотирьох пасажирів за 10 хв. Час обслуговування – показниковий. Встановити, чи існує стаціонарний режим роботи такої системи МО і якщо так – визначити характеристики ефективності системи.

Розв'язання. Маємо справу з одноканальною системою МО ($n=1$) без обмежень на довжину черги, для якої:

$$\lambda=20/60=1/3\text{ хв}^{-1}; \quad \mu=0,4\text{ хв}^{-1}; \quad \alpha=\lambda/\mu=5/6.$$

Оскільки $\alpha<1$, то стаціонарний режим існує. Отже,

$$p_0=1-\alpha=\frac{1}{6}; \quad P_{обс}=1; \quad \bar{k}=\bar{s}=\pi_{з.к.}=\alpha=\frac{5}{6}; \quad \bar{r}=\frac{\alpha^2}{1-\alpha}=4,17;$$

$$\bar{t}_r=\frac{\bar{r}}{\lambda}=12,5\,\text{хв}; \quad \bar{l}=\bar{s}+\bar{r}=5; \quad \bar{t}=\frac{\bar{l}}{\lambda}=15\,\text{хв}.$$

Приклад 4.9. Розглянути приклад 4.3, замінивши систему МО з відмовами на систему МО з очікуванням з необмеженою кількістю місць у черзі, додатково припускаючи, що підприємець зобов'язаний виплатити 10 грн кожному замовнику, який чекає на обслуговування довше, ніж півгодини.

Розв'язання. Ми розглядаємо систему МО з очікуванням з $m=\infty$, $\lambda=4$, $\mu=1$, $\alpha=\lambda/\mu=4$. Прибуток за годину у випадку наявності *n* каналів обчислимо за формулою:

$$H(n,c)=2,5\lambda-\lambda P\{W>0,5\}\cdot 10-nc=10-40P\{W>0,5\}-nc.$$

Оскільки $P\{W>t\}=C(n,\alpha)e^{-(n\mu-\lambda)t}$, то $P\{W>0,5\}=C(n,4)e^{-(n-4)\cdot 0,5}$.

Результати обчислень для різних значень $n$ і $c=1$ запишемо у таблицю:

| $n$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C(n,4)$ | 0,5541 | 0,2848 | 0,1351 | 0,0590 | 0,0238 | 0,0088 |
| $e^{-(n-4)\cdot 0,5}$ | 0,6065 | 0,3679 | 0,2231 | 0,1353 | 0,0821 | 0,0498 |
| $P\{W>0,5\}$ | 0,3361 | 0,1048 | 0,0301 | 0,0080 | 0,0020 | 0,0004 |
| $H(n,1)$ | –8,44 | –0,19 | 1,80 | 1,68 | 0,92 | –0,02 |

Отже, оптимальна кількість каналів – 7, а відповідний прибуток становить 1,80 грн за 1 год.

Приклад 4.10. Для системи МО з очікуванням $(m=\infty)$ знайти ймовірність того, що час очікування в черзі більший від середнього часу очікування в черзі.

Розв'язання. Підставивши у формулу:

$$P\{W>t|W>0\}=e^{-(1-\kappa)n\mu t}$$

$$t=E(W|W>0)=\frac{1}{(1-\kappa)n\mu},$$

одержимо:

$$P\{W>E(W|W>0)\}=e^{-(1-\kappa)n\mu\cdot\frac{1}{(1-\kappa)n\mu}}=e^{-1}=0,3679.$$

Приклад 4.11. Знайти дисперсію часу очікування в черзі для системи МО з очікуванням $(m=\infty)$.

Розв'язання. Можемо записати:

$$E(W^2)=\left(1-C(n,\alpha)\right)E(W^2|W=0)+C(n,\alpha)E(W^2|W>0)=$$

$$=C(n,\alpha)E(W^2|W>0).$$

Оскільки $P\{W>t|W>0\}=e^{-(1-\kappa)n\mu t}$, то час очікування в черзі $W$ розподілений згідно з показниковим законом з параметром $(1-\kappa)n\mu$, тому:



$$E(W^2|W>0)=\int_0^\infty t^2(1-\kappa)n\mu e^{-(1-\kappa)n\mu t}dt=\frac{2}{\left((1-\kappa)n\mu\right)^2};$$

$$E(W^2)=\frac{2C(n,\alpha)}{(n\mu)^2(1-\kappa)^2}.$$

Оскільки $E^2(W)=\frac{C^2(n,\alpha)}{(n\mu)^2(1-\kappa)^2}$, то остаточно отримаємо:

$$D(W)=E(W^2)-E^2(W)=\frac{1-\left(1-C(n,\alpha)\right)^2}{(n\mu)^2(1-\kappa)^2}.$$

## § 4. 7. Класичні системи масового обслуговування з впорядкованим відбором замовлень

Розглянемо класичну $n$-канальну систему МО з відмовами з додатковим припущенням впорядкованого відбору замовлень. Припустимо, що канали в системі пронумеровані, і кожне новоприбуле замовлення приймається на обслуговування вільним каналом з найменшим номером. Потік замовлень – найпростіший з інтенсивністю $\lambda$, час обслуговування – довільно розподілений з математичним сподіванням $1/\mu$.

Нехай $N_k$ – кількість зайнятих каналів серед перших $k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ у довільний момент часу в стаціонарному режимі. Завжди, коли кількість замовлень, які обслуговуються в $n$-канальній системі, перевищує $k$, перші $k$ каналів залишаються зайнятими, тому їх можна розглядати як окрему $k$-канальну систему МО з відмовами. Звідси знаходимо, що:

$$P\{N_k=j\}=\frac{\frac{\alpha^j}{j!}e^{-\alpha}}{\sum_{s=0}^{k}\frac{\alpha^s}{s!}e^{-\alpha}}=\frac{P(j,\alpha)}{R(k,\alpha)},\quad j=\overline{0,k};\quad k=\overline{1,n}.$$

Оскільки середню кількість зайнятих каналів у класичній системі

МО з відмовами обчислюють за формулою:

$$\overline{k} = \alpha P_{обс} = \alpha\left(1 - B(n,\alpha)\right),$$

то:

$$EN_k = \alpha\left(1 - B(k,\alpha)\right), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Введемо випадкову величину $X_j$: $X_j = 0$, коли $j$-ий канал вільний і $X_j = 1$, коли він зайнятий. Тоді $N_j = X_1 + \cdots + X_j$, і $X_j = N_j - N_{j-1}$. Звідси $EX_j = EN_j - EN_{j-1}$, і оскільки:

$$EX_j = P\{X_j = 1\} \overset{df}{=} \tilde{p}_j,$$

то, використовуючи вираз для $EN_k$, отримаємо формулу для визначення $\tilde{p}_j$ – імовірності того, що $j$-ий канал зайнятий:

$$\tilde{p}_j = \alpha\left(B(j-1,\alpha) - B(j,\alpha)\right), \qquad j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо тепер класичну систему МО з очікуванням без обмежень на довжину черги $(m = \infty)$ у випадку впорядкованого відбору замовлень. Припустимо знову, що канали в системі пронумеровані, і кожне новоприбуле замовлення приймається на обслуговування вільним каналом з найменшим номером. На вхід $n$-канальної системи МО надходить найпростіший потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$. Інтенсивність найпростішого потоку обслуговувань кожного каналу – $\mu$. Потрапивши на обслуговування, замовлення обслуговується до завершення.

Нехай $N$ – загальна кількість замовлень, що перебувають у системі в довільний момент часу в стаціонарному режимі (стаціонарний режим для такої системи існує, якщо $\alpha < n$). Знову розглянемо випадкову величину $X_j$: $X_j = 0$, коли $j$-ий канал вільний, і $X_j = 1$, коли він зайнятий. Позначимо через $q_j$ імовірність того, що $j$-ий канал зайнятий. Тоді:

$$q_j = P\{X_j = 1 | N \le n\}P\{N \le n\} + P\{X_j = 1 | N > n\}P\{N > n\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Якщо $N > n$, то всі канали зайняті, тому $P\{X_j = 1 | N > n\} = 1$. Умовну ймовірність $P\{X_j = 1 | N \le n\}$ можна визначити як імовірність зайнятості $j$-го каналу для системи МО з відмовами:



$$P\{X_j = 1 | N \le n\} = \tilde{p}_j = \alpha\left(B(j-1,\alpha) - B(j,\alpha)\right), \qquad j = \overline{1,n}.$$

Імовірність $P\{N > n\}$ обчислимо, використовуючи введену в § 4.6 функцію $C(n,\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$:

$$P\{N > n\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = C(n,\alpha) - p_n = C(n,\alpha) - \frac{\alpha^n}{n!}p_0 =$$

$$= C(n,\alpha) - (1-\kappa)C(n,\alpha) = \kappa C(n,\alpha).$$

Оскільки $P\{N \le n\} = 1 - P\{N > n\}$, то остаточно формули для ймовірностей $q_j$ запишемо у вигляді:

$$q_j = \alpha\left(B(j-1,\alpha) - B(j,\alpha)\right)\left(1 - \kappa C(n,\alpha)\right) + \kappa C(n,\alpha), \qquad j = \overline{1,n}.$$

<u>Приклад 4.12.</u> Приватна телефонна компанія орендує на АТС для обслуговування абонентів лінії зв'язку двох типів. За користування кожною лінією першого типу вона сплачує орендну платню 14 грн за 1 год, а за кожну лінію другого типу – відповідно до кількості використаного часу на телефонні розмови з розрахунку 50 коп за 1 хв. Розглядаючи телефонну компанію як систему МО з відмовами та впорядкованим відбором замовлень з параметром $\alpha$=2, визначити оптимальне співвідношення (з погляду мінімізації орендної платні) між кількостями ліній обох типів і відповідну мінімальну орендну платню за умови, що втрати замовлень не перевищуватимуть 2%.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $n_1$, $n_2$ – кількості ліній (каналів), відповідно, І і ІІ типів, які використовує телефонна компанія для обслуговування абонентів. Тоді орендну платню обчислимо за формулою:

$$H(n_1,n_2) = 14n_1 + 60 \cdot 0,5 \cdot \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \tilde{p}_j = 14n_1 +$$

$$+30\alpha \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(B(j-1,\alpha) - B(j,\alpha)\right) = 14n_1 + 60\left(B(n_1,2) - B(n_1+n_2,2)\right).$$

Необхідно, щоб $B(n_1+n_2,2) \le 0,02$. Маємо $B$(5,2)=0,0367 і $B$(6,2)=0,0121, тому $n = n_1 + n_2 = 6$ – мінімальна кількість ліній зв’язку, для якої втрати замовлень не перевищують 2%. Результати обчислень орендної платні за формулою:

$$H(n_1, 6-n_1) = 14n_1 + 60\left(B(n_1, 2) - B(6,2)\right)$$

для $n_1 = \overline{0,6}$ запишемо у таблицю:

| $n_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H(n_1,6–n_1)$ | 59,27 | 53,28 | 51,27 | 54,40 | 60,99 | 71,48 | 84,00 |

Отож оптимальне співвідношення між кількостями ліній обох типів таке: $n_1$=2, $n_2$=4, а відповідна мінімальна орендна платня $H$(2,4)=51,27 грн.

Приклад 4.13. Розв’язати задачу 4.12, вважаючи, що жоден телефонний дзвінок не втрачається (є можливість почекати у випадку зайнятості лінії зв’язку), і телефонна компанія використовує 4 лінії зв’язку.

Розв’язання. Маємо систему МО з очікуванням і впорядкованим відбором замовлень з параметрами $n$=4, $\alpha$=2. Якщо $n_1$ – кількість ліній I типу, то $n_2$=4–$n_1$ – кількість ліній II типу. Орендну платню обчислимо за формулою:

$$H(n_1) = 14n_1 + 30 \cdot \sum_{j=n_1+1}^{4} q_j,$$

де

$$q_j = \tilde{p}_j\left(1 - \kappa C(n,\alpha)\right) + \kappa C(n,\alpha), \quad \tilde{p}_j = \alpha\left(B(j-1,\alpha) - B(j,\alpha)\right).$$

Тут $\kappa = \alpha/n = 0,5$ і $C(n,\alpha) = C(4,2) = 0,1739$. Результати обчислень запишемо у таблиці:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{p}_j$ | 0,6667 | 0,5334 | 0,3790 | 0,2306 |
| $q_j$ | 0,6957 | 0,5740 | 0,4330 | 0,2975 |

| $n_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $H(n_1)$ | 60,01 | 53,14 | 49,92 | 50,93 | 56,00 |



Бачимо, що оптимальне співвідношення між кількостями ліній обох типів таке: $n_1$=2, $n_2$=2, а відповідна мінімальна орендна платня $H$(2)=49,92 грн.

## § 4. 8. Система масового обслуговування з відмовами та обмеженим часом перебування замовлення на обслуговуванні

Розглянуто такі системи МО, в яких замовлення, потрапивши в систему, „терпляче” чекали завершення обслуговування. Однак на практиці трапляються випадки, коли замовлення з тих чи інших причин, не дочекавшись завершення обслуговування, покидають систему. Назвемо такі замовлення „нетерплячими”. Їхня „нетерплячість” може проявлятися або під час перебування замовлення в черзі, або на обслуговуванні, або і в черзі, і на обслуговуванні.

Наведемо приклади систем МО з обмеженим часом перебування замовлення в системі. Радіолокаційний комплекс, що визначає параметри польоту літаків, має певну зону, в межах якої він може „обслужити” літак. Якщо за час перебування літака в зоні дії комплексу його параметри не встигнуть виміряти, то літак покине зону „необслуженим”. Аналогічно, система протиповітряної оборони має цілком визначену зону обстрілу, в межах якої літак можна вразити. Отже, літак, потрапивши в зону обстрілу, перебуває там обмежений час (виявляє „нетерплячість”).

Щоб залишитись у межах марковських випадкових процесів з неперервним часом, припустимо, що на замовлення, яке перебуває в системі, діє пуассонівський потік виходів з системи, інтенсивність якого може бути різною для виходів з черги і для виходів з каналів обслуговування.

*Формулювання задачі*. Розглянемо роботу $n$-канальної системи МО з обмеженим часом перебування замовлення у системі. Алгоритм роботи системи такий: якщо в момент надходження замовлення в систему вільний хоча б один з $n$

каналів, то замовлення приймається на обслуговування лише одним (будь-яким) вільним каналом. Якщо в момент надходження замовлення всі канали зайняті, то таке замовлення залишається необслуженим. На зайнятий канал діє пуассонівський потік звільнень з інтенсивністю $\tilde{\mu}$, яка складається з інтенсивності потоку обслуговувань одного каналу $\mu$ та інтенсивності потоку виходів замовлення з-під обслуговування $\eta$: $\tilde{\mu} = \mu + \eta$. Інтенсивність потоку замовлень, як і раніше, дорівнює $\lambda$.

У довільний момент часу система може перебувати в одному з таких станів: $x_0$ – вільні всі канали, в системі немає жодного замовлення; $x_1$ – одне замовлення перебуває в системі і його обслуговує один (будь-який) з $n$ каналів; $x_k$ – в системі перебуває $k$ замовлень ($1<k<n$), їх обслуговують (кожне замовлення – окремий канал); $x_n$ – $n$ замовлень обслуговує $n$ каналів. Граф станів цієї системи має такий самий вигляд, як граф класичної системи з відмовами із заміною $\mu$ на $\tilde{\mu}$:

$$x_0 \underset{\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{k\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_k \underset{(k+1)\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{(n-1)\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n-1} \underset{n\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_n.$$

Тому й формули для ймовірностей станів у стаціонарному режимі аналогічні:

$$p_k = \frac{P(k,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})}, \quad k = \overline{0,n},$$

де $\tilde{\alpha} = \lambda/(\mu+\eta) = \lambda/\tilde{\mu}$.

Для такої системи ймовірність обслуговування замовлення вже не можна визначити як імовірність того, що замовлення, яке надійшло в систему, застане вільним хоча б один з каналів. Це лише необхідна умова обслуговування, оскільки треба вимагати також, щоб замовлення не покинуло систему за час обслуговування. Тому для визначення $P_{обс}$ використаємо формулу $P_{обс} = \dfrac{\mu\bar{k}}{\lambda}$. Середню кількість зайнятих каналів $\bar{k}$ обчислимо за формулою, аналогічною до виведеної для системи Ерланга:



$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \sum_{k=0}^{n} k\frac{P(k,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})} = \frac{1}{R(n,\tilde{\alpha})}\sum_{k=0}^{n} kP(k,\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}\frac{R(n-1,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})}.$$

Отже:

$$P_{обс} = \frac{\mu}{\lambda}\tilde{\alpha}\frac{R(n-1,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\lambda}{\tilde{\mu}}\frac{R(n-1,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})} = \frac{\mu}{\mu+\eta}\frac{R(n-1,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})}.$$

При $\eta=0$ така система МО перетворюється на класичну систему Ерланга. Тому формули для $\pi_{з.к.}, \bar{t}_{з.к.}, \bar{t}_{п.з.}, \pi_{п.з.}$ та інших характеристик системи можна отримати з аналогічних формул для системи Ерланга, замінивши в них $\alpha$ на $\tilde{\alpha}$ і $\mu$ на $\tilde{\mu}$.

<u>Приклад 4.14.</u> До складу радіолокаційного комплексу входять три радіолокаційні станції (РЛС), завдання яких – вимірювання параметрів руху літаків під час польоту. Кожна зі станцій може „обслуговувати” літаки в межах зони довжиною $a$=60 км. Швидкість літаків у межах зони – $v$=900 км/год. Параметри руху літака вимірюють в середньому протягом 1 хв. Якщо літак, влетівши в зону вимірювання параметрів, застає усі 3 РЛС зайнятими, то його параметри не вимірюються. В середньому за 1 год. в зону вимірювання параметрів влітає 45 літаків. Визначити характеристики роботи системи.

<u>Розв’язання.</u> Маємо 3-канальну систему ($n$=3), на вхід якої надходить потік замовлень з інтенсивністю $\lambda$=45 год$^{-1}$=0,75 хв$^{-1}$; інтенсивність потоку виходів з-під обслуговування:

$$\eta = v/a = 900/60 = 15\,\text{год}^{-1} = 0,25\,\text{хв}^{-1};$$

інтенсивність потоку обслуговувань кожного каналу $\mu$=1 хв$^{-1}$. Отже:

$$\alpha = \lambda/\mu = 0,75; \quad \tilde{\mu} = \mu+\eta = 1,25\,\text{хв}^{-1}; \quad \tilde{\alpha} = \lambda/\tilde{\mu} = 0,6.$$

Імовірність того, що параметри літака буде виміряно:

$$P_{обс} = \frac{\mu}{\tilde{\mu}}\frac{R(n-1,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})} = \frac{1}{1,25}\cdot\frac{R(2;0,6)}{R(3;0,6)} = 0,8\cdot\frac{0,97688}{0,99664} = 0,784.$$

Середня кількість зайнятих каналів (РЛС) $\bar{k} = \alpha P_{обс} = 0,588$. Імовірність зайнятості каналу $\pi_{з.к.} = \bar{k}/n = 0{,}196$. На зайнятий канал діє найпростіший потік звільнень з інтенсивністю $\tilde{\mu}$, тому середній час зайнятості каналу $\overline{t}_{з.к.} = 1/\tilde{\mu} = 0,8$ хв. Середній час простою РЛС $\overline{t}_{п.к.} = \overline{t}_{з.к.} \dfrac{1-\pi_{з.к.}}{\pi_{з.к.}} = 3,28$ хв.

### § 4. 9. Система масового обслуговування з очікуванням і обмеженим часом перебування замовлення в системі

*Формулювання задачі*. Розглянемо $n$-канальну систему МО, яка відрізняється від розглянутої в попередньому параграфі тим, що замовлення, заставши всі канали зайнятими, може бути обслуженим, якщо за час його перебування в черзі звільниться хоча б один з каналів. Максимальну кількість місць у черзі позначимо через $m$. Якщо в системі є $k$ замовлень ($k \le n$), то всі вони обслуговуються (кожне замовлення одним каналом). Якщо в системі перебувають $n+r$ замовлень ($r \le m$), то $n$ з них обслуговуються, а $r$ перебувають у черзі на обслуговування. Якщо новоприбуле замовлення застає в системі $n+m$ замовлень, то воно отримує відмову й обслуговуванню не підлягає за будь-яких умов. Перебуваючи в черзі, замовлення може проявляти „нетерплячість”. Позначимо інтенсивність потоку виходів замовлень з черги через $\nu$; вона в загальному випадку може відрізнятися від інтенсивності $\eta$ потоку виходів замовлення з-під обслуговування.

Стани такої системи зв’язуємо з кількістю замовлень, які перебувають у системі (на обслуговуванні і в черзі): $x_k$ ($k=\overline{0,n}$) – в системі є $k$ замовлень, їх обслуговує $k$ каналів (кожне замовлення – окремий канал), черги немає; $x_{n+r}$ – в системі є $n+r$ замовлень ($r=\overline{1,m}$), $n$ з них обслуговує $n$ каналів і $r$ замовлень перебуває у черзі. Отже, як і звичайна система з очікуванням, ця система має $n+m+1$ станів:

$$x_0 \underset{\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{2\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots x_{n-1} \underset{n\tilde{\mu}}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_n \underset{n\tilde{\mu}+\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+1} \underset{n\tilde{\mu}+2\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+2} \cdots x_{n+m-1} \underset{n\tilde{\mu}+m\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_{n+m}.$$

Бачимо, що до стану $x_n$ поданий граф станів збігається з графом розглянутої в попередньому параграфі системи з відмовами та обмеженим часом перебування замовлення в системі.

Запишемо систему рівнянь для ймовірностей станів стаціонарного режиму:

$$-\lambda p_0 + \tilde{\mu} p_1 = 0;$$
$$-\left(\lambda + k\tilde{\mu}\right) p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\tilde{\mu} p_{k+1} = 0, \quad k=\overline{1,n-1};$$
$$-\left(\lambda + n\tilde{\mu}\right) p_n + \lambda p_{n-1} + (n\tilde{\mu}+\nu) p_{n+1} = 0;$$
$$-\left(\lambda + n\tilde{\mu} + r\nu\right) p_{n+r} + \lambda p_{n+r-1} + (n\tilde{\mu}+(r+1)\nu) p_{n+r+1} = 0, \quad r=\overline{1,m-1};$$
$$-\left(n\tilde{\mu} + m\nu\right) p_{n+m} + \lambda p_{n+m-1} = 0.$$

Перші $n$ рівнянь цієї системи мають такий самий вигляд, як рівняння для класичної системи Ерланга, тому:

$$p_k = \frac{\tilde{\alpha}^k}{k!} p_0 \quad (k=\overline{0,n}), \tag{4.7}$$

де $\tilde{\alpha} = \lambda/(\mu+\eta) = \lambda/\tilde{\mu}$. Ввівши позначення:

$$\delta = \frac{n\tilde{\mu}}{\nu}, \qquad \gamma = \frac{\lambda}{\nu},$$

і використовуючи формули (4.7), визначимо $p_{n+1}$ з $n+1$-го рівняння:

$$p_{n+1} = \frac{1}{n\tilde{\mu}+\nu}\left( (\lambda+n\tilde{\mu})\frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} - \lambda\frac{\tilde{\alpha}^{n-1}}{(n-1)!}\right) p_0 =$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} \frac{1}{\nu\left(\dfrac{n\tilde{\mu}}{\nu}+1\right)} \left( \lambda + n\tilde{\mu} - \frac{n\lambda}{\dfrac{\lambda}{\tilde{\mu}}} \right) p_0 = \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\frac{\lambda}{\nu(\delta+1)} p_0 = \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\frac{\gamma}{\delta+1} p_0.$$

Аналогічно з $n+2$-го рівняння маємо:

$$p_{n+2} = \frac{1}{n\tilde{\mu}+2\nu}\left( (\lambda+n\tilde{\mu}+\nu)\frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\frac{\lambda}{\nu(\delta+1)} - \lambda\frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\right) p_0 =$$
$$= \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\frac{\gamma^2}{(\delta+1)(\delta+2)} p_0.$$

Отже:

$$p_{n+r} = \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\frac{\gamma^r}{\prod\limits_{j=1}^{r}(\delta+j)} p_0, \quad (r=\overline{1,m}). \tag{4.8}$$

Імовірність $p_0$ визначимо за допомогою нормувальної умови:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k + \sum_{r=1}^{m} p_{n+r} = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\tilde{\alpha}^k}{k!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} \frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta + j)} \right) p_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\tilde{\alpha}^k}{k!} + \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} \sum_{r=1}^{m} \frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta + j)}} = \frac{e^{-\tilde{\alpha}}}{R(n,\tilde{\alpha}) + P(n,\tilde{\alpha}) \sum_{r=1}^{m} \frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta + j)}}.$$

Повертаючись тепер до співвідношень (4.7) і (4.8), можемо записати остаточні формули для ймовірностей станів:

$$p_k = \frac{P(k,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha}) + P(n,\tilde{\alpha}) \sum_{r=1}^{m} \frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta + j)}}, \qquad (k = \overline{0,n});$$

$$p_{n+r} = \gamma^r p_n \Big/ \prod_{j=1}^{r}(\delta + j), \qquad (r = \overline{1,m}).$$

Використовуючи отримані співвідношення, середню кількість зайнятих каналів для такої системи можна обчислити як математичне сподівання:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k + n \sum_{r=1}^{m} p_{n+r},$$

а ймовірність обслуговування замовлення – лише за формулою $P_{обс} = \dfrac{\mu \bar{k}}{\lambda}$. Середня кількість замовлень, які чекають на обслуговування, перебуваючи в черзі, очевидно, становить:

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{m} r p_{n+r},$$

імовірність зайнятості каналу обчислюється за формулою $\pi_{з.к.} = \bar{k}/n$, а ймовірність повного завантаження системи дорівнює сумі ймовірностей тих станів, для яких усі канали зайняті:



$$\pi_{п.з.} = \sum_{r=0}^{m} p_{n+r}.$$

Частковим випадком розглянутої системи є *система МО з обмеженим часом перебування замовлення в черзі і необмежуваним часом перебування на обслуговуванні*, яку отримуємо з попередньої при $\eta$=0. У цьому випадку замовлення проявляють „нетерплячість", лише перебуваючи в черзі, а потрапивши на обслуговування, замовлення „терпляче" чекають завершення обслуговування. Прикладом такої системи є система дозаправки літаків у повітрі: літак може чекати заправника обмежений час (закінчується пальне). Проте коли заправку розпочато, то її здійснюють до завершення. Щоб записати характеристики такої системи, досить в усіх формулах, отриманих у цьому параграфі, замінити $\tilde{\alpha}$ на $\alpha$ і $\tilde{\mu}$ на $\mu$.

Розглянемо *систему МО з обмеженим часом перебування замовлення на обслуговуванні і необмежуваним часом перебування замовлення в черзі*, яка є другим частковим випадком загальної системи з очікуванням і обмеженим часом перебування замовлення в системі (при $\nu$=0): замовлення проявляють „нетерплячість", перебуваючи лише на обслуговуванні. Прикладом такої системи є конвеєр з накопичувачем. У накопичувачі (в черзі) деталі можуть перебувати необмежений час, звідси вони потрапляють на конвеєр. Час обробки окремої деталі на конвеєрі обмежений часом перебування конвеєра на окремому робочому місці. Щоб отримати формули для ймовірностей $p_k$ $(k = \overline{0, n+m})$, покладемо $\nu$=0 у виразі:

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta + j)},$$

який містить $\nu$ у відповідних формулах для загальної системи:

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^r}{\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{n\tilde{\mu}}{\nu}+j\right)}=\sum_{r=1}^{m}\frac{\lambda^r}{\prod_{j=1}^{r}\left(n\tilde{\mu}+\nu j\right)}\underset{\nu\to 0}{\to}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\tilde{\mu}}\right)^r=\sum_{r=1}^{m}\tilde{\kappa}^r=\tilde{\kappa}\frac{1-\tilde{\kappa}^m}{1-\tilde{\kappa}},$$

де $\tilde{\kappa}=\dfrac{\lambda}{n\tilde{\mu}}\neq 1$. Отже, у цьому випадку:

$$p_k=\frac{P(k,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})+\dfrac{\tilde{\kappa}(1-\tilde{\kappa}^m)}{1-\tilde{\kappa}}P(n,\tilde{\alpha})},\qquad k=\overline{0,n};$$

$$p_{n+r}=\frac{\tilde{\kappa}^r P(n,\tilde{\alpha})}{R(n,\tilde{\alpha})+\dfrac{\tilde{\kappa}(1-\tilde{\kappa}^m)}{1-\tilde{\kappa}}P(n,\tilde{\alpha})},\qquad r=\overline{1,m}. \tag{4.9}$$

Якщо $\tilde{\kappa}=1$, то $\tilde{\alpha}=n$ і оскільки

$$\lim_{\tilde{\kappa}\to 1}\frac{1-\tilde{\kappa}^m}{1-\tilde{\kappa}}=m,$$

то співвідношення (4.9) набувають вигляду (4.6), тобто збігаються з формулами для ймовірностей станів класичної системи з очікуванням (випадок $\kappa=1$). Зазначимо, що співвідношення (4.9) після заміни в них $\tilde{\alpha}$ на $\alpha$ і $\tilde{\kappa}$ на $\kappa$ також переходять у формули (4.5) для ймовірностей станів класичної системи з очікуванням.

Приклад 4.15. Після виконання завдання літаки проводять дозаправку в повітрі. В районі дозаправки постійно чергують 2 літаки-дозаправники. Середній час дозаправки одного літака – 10 хв. На дозаправку прибувають в середньому 2 літаки за 10 хв. Якщо літак, що потребує дозаправки, застає всі заправники зайнятими, він може деякий час очікувати звільнення дозаправників в районі дозаправки. Середній час очікування дозаправки – 10 хв. Літак, який не дочекався дозаправки, сідає на запасний аеродром, а дозаправлений літак сідає на основний аеродром. Визначити ймовірність того, що окремо взятий літак дозаправиться, і середню кількість дозаправлених літаків.

Розв'язання. Маємо систему з очікуванням, обмеженим часом перебування замовлення в черзі і без обмежень на довжину



черги $(m=\infty)$ з параметрами:

$$n=2;\quad \lambda=0{,}2\,хв^{-1};\quad \mu=0{,}1\,хв^{-1};\quad \nu=0{,}1\,хв^{-1};$$
$$\alpha=\lambda/\mu=2;\quad \delta=n\mu/\nu=2;\quad \gamma=\lambda/\nu=2.$$

Ця система – частковий випадок системи МО з очікуванням і обмеженим часом перебування замовлення в системі при $\eta=0$ і $m=\infty$. Враховуючи, що $\delta$ – ціле, визначимо формули для ймовірностей станів у стаціонарному режимі. Спочатку визначимо суму ряду:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta+j)}.$$

Для цілого $\delta$ маємо:

$$\prod_{j=1}^{r}(\delta+j)=(\delta+1)(\delta+2)\ldots(\delta+r)=\frac{(\delta+r)!}{\delta!};$$

$$\frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta+j)}=\frac{\gamma^r\delta!}{(\delta+r)!}=\frac{\gamma^{\delta+r}e^{-\gamma}\delta!}{\gamma^{\delta}e^{-\gamma}(\delta+r)!}=\frac{\gamma^{\delta+r}}{(\delta+r)!}e^{-\gamma}\frac{1}{\dfrac{\gamma^{\delta}}{\delta!}e^{-\gamma}}=\frac{P(\delta+r,\gamma)}{P(\delta,\gamma)};$$

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\gamma^r}{\prod_{j=1}^{r}(\delta+j)}=\sum_{r=1}^{m}\frac{P(\delta+r,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}=\frac{\sum_{i=0}^{m+\delta}P(i,\gamma)-\sum_{i=0}^{\delta}P(i,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}=$$

$$=\frac{R(m+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}\underset{m\to\infty}{\to}\frac{1-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}.$$

Отже:

$$p_k=\frac{P(k,\alpha)}{R(n,\alpha)+P(n,\alpha)\dfrac{1-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}},\qquad (k=\overline{0,n});$$

$$p_{n+r}=\frac{P(\delta+r,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}p_n,\qquad (r=1,2,\ldots).$$

Середню кількість зайнятих каналів (дозаправлених літаків) обчислимо за формулою:

$$\bar{k}=\sum_{k=0}^{n}kp_k+n\sum_{r=1}^{\infty}p_{n+r}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}kP(k,\alpha)+n\sum\limits_{r=1}^{\infty}P(n,\alpha)\dfrac{P(\delta+r,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}}{R(n,\alpha)+P(n,\alpha)\dfrac{1-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}}=$$

$$=\frac{\alpha R(n-1,\alpha)+nP(n,\alpha)\dfrac{1-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}}{R(n,\alpha)+P(n,\alpha)\dfrac{1-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}}.$$

За допомогою таблиць знаходимо:

$$R(n-1,\alpha)=R(1;2)=0,406006;\quad R(n,\alpha)=R(\delta,\gamma)=R(2;2)=0,676676;$$

$$P(n,\alpha)=P(\delta,\gamma)=P(2;2)=0,270671;\quad \bar{k}=1,459.$$

Імовірність того, що окремо взятий літак дозаправиться:

$$P_{обс}=\frac{\bar{k}}{\alpha}=0,729.$$

## § 4. 10. Замкнена система масового обслуговування без взаємодопомоги між каналами

Досі ми розглядали розімкнені системи МО, на які надходив потік замовлень інтенсивності $\lambda$, причому ця інтенсивність не залежала від стану системи МО, а самі джерела замовлень перебували поза системою і їхні стани аналізу не підлягали. Тепер розглянемо ***замкнені системи МО***, в яких інтенсивність потоку замовлень залежить від стану системи, а самі *джерела замовлень є внутрішніми елементами системи*. Такий випадок трапляється тоді, коли система МО обслуговує *обмежену* кількість „клієнтів” (джерел замовлень), яка незначно відрізняється від кількості каналів обслуговування. Перебуваючи на обслуговуванні, „клієнт” перестає подавати замовлення, а після завершення обслуговування знову стає джерелом замовлень.

Класичний приклад такої системи: робота групи робітників, які налагоджують станки у ткацькому цеху. Станки є джерелами замовлень, а робітники – каналами обслуговування. Інтенсивність надходження замовлень на обслуговування залежить від того, скільки станків у певний момент працює і скільки станків обслуговується та очікує обслуговування. Ще один приклад: аеродром, на якому базується $m$ літаків і є $n$ місць проведення ремонтних робіт, причому $n<m$.

*Формулювання задачі*. Маємо $m$ однакових технічних пристроїв (ТП), кожен з яких може в деякі випадкові моменти часу потребувати обслуговування (відмовити, вийти з ладу і т. п.). *Потік відмов* кожного ТП – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda$. Кожен ТП може обслуговувати один з $n$ каналів ($n<m$). Інтенсивність пуассонівського *потоку обслуговувань* кожного каналу – $\mu$. Якщо в момент відмови ТП усі $n$ каналів зайняті, то цей ТП стає в чергу на обслуговування.

Стани системи зв’язуємо з кількістю ТП, які вийшли з ладу: $x_k$ – вийшли з ладу $k$ ТП ($k=\overline{0,n}$) і всі вони перебувають на обслуговуванні; $x_{n+r}$ – вийшли з ладу $n+r$ ТП ($r=\overline{1,m-n}$), з них $n$ перебувають на обслуговуванні і $r$ очікують на обслуговування. Отже, така система має $m+1$ стан:

$$x_0\underset{\mu}{\overset{m\lambda}{\rightleftarrows}}x_1\underset{2\mu}{\overset{(m-1)\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots\underset{k\mu}{\overset{(m-k+1)\lambda}{\rightleftarrows}}x_k\underset{(k+1)\mu}{\overset{(m-k)\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots\underset{n\mu}{\overset{(m-n+1)\lambda}{\rightleftarrows}}x_n\underset{n\mu}{\overset{(m-n)\lambda}{\rightleftarrows}}x_{n+1}\cdots$$

$$\cdots\underset{n\mu}{\overset{(m-n-r+1)\lambda}{\rightleftarrows}}x_{n+r}\underset{n\mu}{\overset{(m-n-r)\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots x_{m-1}\underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}x_m.$$

Стаціонарний режим існує, ситема рівнянь для ймовірностей станів записують у вигляді:

$$-m\lambda p_0+\mu p_1=0;$$

$$-\left(k\mu+(m-k)\lambda\right)p_k+(m-k+1)\lambda p_{k-1}+$$
$$+(k+1)\mu p_{k+1}=0,\quad k=\overline{1,n-1};$$

$$-\left(n\mu+(m-n)\lambda\right)p_n+(m-n+1)\lambda p_{n-1}+n\mu p_{n+1}=0;$$

$$-\left(n\mu+(m-n-r)\lambda\right)p_{n+r}+(m-n-r+1)\lambda p_{n+r-1}+$$
$$+n\mu p_{n+r+1}=0,\ r=\overline{1,m-n-1};$$

$$-n\mu p_m+\lambda p_{m-1}=0.$$

Далі використовуватимемо такі позначення:

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu},\quad \chi=\frac{n\mu}{\lambda}=\frac{n}{\alpha},\quad p=\frac{\alpha}{1+\alpha},\quad q=1-p,$$

$$B(m,k,p)=C_m^k p^k q^{m-k},\quad R(m,n,p)=\sum_{k=0}^{n}B(m,k,p).$$

Виражаючи послідовно $p_i$ з $i$-го рівняння ($i=\overline{1,n}$) через $p_0$, отримаємо:

$$p_1=\frac{m\lambda}{\mu}p_0=m\alpha p_0;\quad p_2=\frac{((m-1)\lambda+\mu)p_1-m\lambda p_0}{2\mu}=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\frac{m\lambda}{\mu}((m-1)\lambda+\mu-\mu)p_0=\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\lambda^2}{\mu^2}p_0=\frac{m(m-1)}{2!}\alpha^2 p_0,\ldots,$$

$$p_k=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\alpha^k p_0=\frac{m!}{(m-k)!k!}\alpha^k p_0=C_m^k\alpha^k p_0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Оскільки

$$C_m^k\alpha^k=C_m^k\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{-k}=C_m^k p^k q^{-k}=\frac{C_m^k p^k q^{m-k}}{q^m}=\frac{B(m,k,p)}{q^m},$$

то остаточно:

$$p_k=\frac{B(m,k,p)}{q^m}p_0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Продовжимо процес послідовного визначення ймовірностей, починаючи з $n$+1-го рівняння:

$$p_{n+1}=\frac{1}{n\mu}\left(((m-n)\lambda+n\mu)p_n-(m-n+1)\lambda p_{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\mu}\left(\frac{m!\alpha^n}{(m-n)!n!}((m-n)\lambda+n\mu)-(m-n+1)\lambda\frac{m!\alpha^{n-1}}{(m-n+1)!(n-1)!}\right)p_0=$$

$$=\frac{m!\alpha^n}{(m-n)!n!n\mu}\left((m-n)\lambda+n\mu-\frac{n\lambda}{\alpha}\right)p_0=\frac{m!\alpha^{n+1}}{n\cdot n!(m-n-1)!}p_0;$$

$$p_{n+2}=\frac{1}{n\mu}\left(((m-n-1)\lambda+n\mu)p_{n-1}-(m-n)\lambda p_n\right)=$$

$$=\frac{1}{n\mu}\left(\frac{m!\alpha^{n+1}}{n\cdot n!(m-n-1)!}((m-n-1)\lambda+n\mu)-(m-n)\lambda\frac{m!\alpha^n}{(m-n)!n!}\right)p_0=$$



$$=\frac{m!\alpha^{n+1}}{n!(m-n-1)!n^2\mu}\left((m-n-1)\lambda+n\mu-\frac{n\lambda}{\alpha}\right)p_0=\frac{m!\alpha^{n+2}}{n^2\cdot n!(m-n-2)!}p_0;$$

$$p_{n+r}=\frac{m!\alpha^{n+r}}{n^r n!(m-n-r)!}p_0,\quad r=\overline{1,m-n}.$$

Для спрощення обчислень перетворимо отримані формули, використовуючи табличні функції пуассонівського розподілу:

$$P(k,\alpha)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{P(n,n)}{P(0,n)}=\frac{n^n}{n!};\qquad \frac{P(m-n-r,\chi)}{P(m,\chi)}=\frac{\chi^{-n-r}m!}{(m-n-r)!}=\frac{n^{-n-r}m!}{\alpha^{-n-r}(m-n-r)!},$$

отримаємо:

$$p_{n+r}=\frac{P(n,n)P(m-n-r,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}p_0,\quad r=\overline{1,m-n}.\tag{4.10}$$

Імовірність $p_0$ визначимо за допомогою нормувальної умови:

$$\sum_{k=0}^{n}p_k+\sum_{r=1}^{m-n}p_{n+r}=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B(m,k,p)}{q^m}+\sum_{r=1}^{m-n}\frac{P(n,n)P(m-n-r,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}\right)p_0=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0=\frac{1}{\dfrac{R(m,n,p)}{q^m}+\dfrac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}}.$$

Отже, ймовірності станів стаціонарного режиму знайдено:

$$p_k=\frac{q^{-m}B(m,k,p)}{\dfrac{R(m,n,p)}{q^m}+\dfrac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}},\quad k=\overline{0,n};$$

$$p_{n+r}=\frac{P(n,n)P(m-n-r,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)\left(\dfrac{R(m,n,p)}{q^m}+\dfrac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}\right)},\ r=\overline{1,m-n}.$$

Для цієї системи середня кількість технічних пристроїв, що перебувають на обслуговуванні ($\bar{s}$), дорівнює середній кількості зайнятих каналів ($\bar{k}$) і обчислюється за формулою:

$$\overline{s}=\overline{k}=\sum_{k=0}^{n}kp_k+n\sum_{r=1}^{m-n}p_{n+r}=$$
$$=\frac{p_0}{q^m}\sum_{k=0}^{n}kB(m,k,\,p)+\frac{nP(n,n)R(m-n-1,\chi)\,p_0}{P(0,n)P(m,\chi)}.$$

Оскільки:

$$\sum_{r=0}^{m-n}rP(m-n-r,\chi)=\sum_{r=0}^{m-n}\left(m-n-(m-n-r)\right)P(m-n-r,\chi)=$$
$$=(m-n)\sum_{r=0}^{m-n}P(m-n-r,\chi)-\sum_{r=0}^{m-n}(m-n-r)P(m-n-r,\chi)=$$
$$=(m-n)\sum_{r=0}^{m-n}P(r,\chi)-\sum_{r=0}^{m-n}rP(r,\chi)=(m-n)R(m-n,\chi)-\chi R(m-n-1,\chi),$$

то середня кількість технічних пристроїв, які очікують на обслуговування, очевидно, дорівнює:

$$\overline{r}=\sum_{r=1}^{m-n}rp_{n+r}=\frac{P(n,n)\,p_0}{P(0,n)P(m,\chi)}\left((m-n)R(m-n,\chi)-\chi R(m-n-1,\chi)\right).$$

За формулою:

$$\overline{l}=\sum_{i=1}^{m}ip_i=\overline{k}+\overline{r}$$

можна визначити середню кількість технічних пристроїв, які простоюють.

Приклад 4.16. У гаражі 20 автомобілів і 2 місця для проведення ремонту. В середньому кожен автомобіль протягом місяця *тричі* потребує ремонту. В середньому ремонт одного автомобіля триває 1 добу. Визначити середню кількість автомобілів, які перебувають на ремонті; середню кількість автомобілів, які чекають на ремонт; середню кількість автомобілів, які простоюють, і ймовірність простою окремого автомобіля.

Розв'язання. Маємо замкнену систему з параметрами:



$$n=2;\quad m=20;\quad \lambda=\frac{3}{30}=0{,}1\text{ доба}^{-1};\quad \mu=1\text{ доба}^{-1};\quad \chi=\frac{n\mu}{\lambda}=20;$$
$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=0{,}1;\quad p=\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{1}{11};\quad q=1-p=\frac{10}{11}.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{R(m,n,\,p)}{q^m}=\sum_{k=0}^{n}C_m^k\alpha^k=C_{20}^0+C_{20}^1\cdot 0{,}1+C_{20}^2\cdot 0{,}01=4{,}9;$$
$$\frac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}=\frac{P(2;2)R(17;20)}{P(0;2)P(20;20)}=\frac{0{,}270671\cdot 0{,}297028}{0{,}135335\cdot 0{,}088836}=6{,}687;$$
$$p_0=\frac{1}{\dfrac{R(m,n,\,p)}{q^m}+\dfrac{P(n,n)R(m-n-1,\chi)}{P(0,n)P(m,\chi)}}=\frac{1}{4{,}9+6{,}687}=0{,}086;$$

визначаємо середню кількість автомобілів, які перебувають на ремонті,

$$\overline{s}=\frac{p_0}{q^m}\sum_{k=0}^{n}kB(m,k,\,p)+\frac{nP(n,n)R(m-n-1,\chi)\,p_0}{P(0,n)P(m,\chi)}=$$
$$=\frac{p_0}{q^{20}}\left(B\left(20;1;\frac{1}{11}\right)+2B\left(20;2;\frac{1}{11}\right)\right)+2\cdot 6{,}687\cdot p_0\approx 1{,}65;$$

середню кількість автомобілів, які чекають на ремонт,

$$\overline{r}=\frac{P(n,n)\,p_0}{P(0,n)P(m,\chi)}\left((m-n)R(m-n,\chi)-\chi R(m-n-1,\chi)\right)=$$
$$=\frac{P(2;2)\,p_0}{P(0;2)P(20;20)}\left(18R(18;20)-20R(17;20)\right)\approx 1{,}80;$$

середню кількість автомобілів, які простоюють, $\overline{l}=\overline{s}+\overline{r}=3{,}45$, а також імовірність простою окремого автомобіля (коефіцієнт простою техніки):

$$\pi_{пр.}=\frac{\overline{l}}{m}=0{,}173.$$

## § 4. 11. Замкнена система масового обслуговування з одним каналом

Розглянемо частковий випадок системи МО, вивченої в попередньому параграфі, коли система має лише один канал обслуговування, тобто $n$=1. Граф такої системи також містить $m$+1 станів, однак його вигляд значно спрощується:

$$x_0 \underset{\mu}{\overset{m\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{\mu}{\overset{(m-1)\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu}{\overset{(m-k+1)\lambda}{\rightleftarrows}} x_k \underset{\mu}{\overset{(m-k)\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots x_{m-1} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_m.$$

Запишемо формули (4.10), які вірні й при $r$=0, для випадку, коли $n$=1. Оскільки $P(1,1)/P(0,1)=1$, то:

$$p_{1+r} = \frac{P(m-1-r,\chi)}{P(m,\chi)}\,p_0, \quad r=\overline{0,m-1},$$

де

$$\chi = \frac{1}{\alpha} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Імовірність $p_0$ визначимо за допомогою нормувальної умови:

$$p_0 + \sum_{r=0}^{m-1}\frac{P(m-1-r,\chi)}{P(m,\chi)}p_0 = \frac{p_0}{P(m,\chi)}\left(\sum_{r=0}^{m-1}P(m-1-r,\chi)+P(m,\chi)\right)=$$

$$=\frac{p_0}{P(m,\chi)}\sum_{k=0}^{m}P(m-k,\chi) = \frac{p_0}{P(m,\chi)}\sum_{k=0}^{m}P(k,\chi) = \frac{R(m,\chi)}{P(m,\chi)}\,p_0 = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_0 = \frac{P(m,\chi)}{R(m,\chi)}.$$

Отже, ймовірності станів стаціонарного режиму обчислюють за простими формулами:

$$p_k = \frac{P(m-k,\chi)}{R(m,\chi)}, \qquad k=\overline{0,m}. \tag{4.11}$$

Визначимо середню кількість технічних пристроїв, які простоюють:

$$\overline{l} = \sum_{k=0}^{m}kp_k = \sum_{k=0}^{m}k\frac{P(m-k,\chi)}{R(m,\chi)} = \frac{1}{R(m,\chi)}\sum_{k=0}^{m}\big(m-(m-k)\big)P(m-k,\chi) =$$



$$=\frac{1}{R(m,\chi)}\left(m\sum_{k=0}^{m}P(m-k,\chi)-\sum_{k=0}^{m}(m-k)P(m-k,\chi)\right)=$$

$$=\frac{1}{R(m,\chi)}\left(m\sum_{k=0}^{m}P(k,\chi)-\sum_{k=0}^{m}kP(k,\chi)\right)=$$

$$=m-\frac{\chi R(m-1,\chi)}{R(m,\chi)} = m-\chi(1-p_0).$$

Імовірність зайнятості каналу для цієї системи, очевидно, становить $\pi_{з.к.}=1-p_0$. З другого боку, відомо, що $\pi_{з.к.}=\overline{k}/n=\overline{k}$. Тому середня кількість технічних пристроїв, що перебувають на обслуговуванні ($\overline{s}$), дорівнює середній кількості зайнятих каналів ($\overline{k}$) і обчислюється за формулою:

$$\overline{s}=\overline{k}=1-p_0=1-\frac{P(m,\chi)}{R(m,\chi)}=\frac{R(m-1,\chi)}{R(m,\chi)}.$$

Середня кількість технічних пристроїв, які очікують на обслуговування (перебувають у черзі), очевидно, дорівнює:

$$\overline{r}=\overline{l}-\overline{k}=m-\chi(1-p_0)-(1-p_0)=m-(\chi+1)(1-p_0).$$

<u>Приклад 4.17.</u> Розв'язати задачу з попереднього параграфа у випадку наявності лише одного місця для ремонту ($n$=1).

<u>Розв'язання.</u> Маємо замкнену систему з параметрами:

$$n=1;\quad m=20;\quad \lambda=0{,}1;\quad \mu=1;\quad \chi=\frac{\mu}{\lambda}=10.$$

Обчисливши:

$$p_0=\frac{P(m,\chi)}{R(m,\chi)}=\frac{P(20;10)}{R(20;10)}=\frac{0{,}0011866}{0{,}9984117}=0{,}0019,$$

знаходимо:

$$\overline{s}=1-p_0=0{,}998;\qquad \overline{l}=m-\chi(1-p_0)=10{,}019;$$

$$\overline{r}=\overline{l}-\overline{s}=9{,}021;\qquad \pi_{пр.}=\frac{\overline{l}}{m}\approx 0{,}5.$$

## § 4. 12. Замкнена система масового обслуговування з повною взаємодопомогою між каналами

*Формулювання задачі.* На відміну від замкненої системи без взаємодопомоги за наявності хоча б одного ТП, який потребує обслуговування, до обслуговування залучають усі $n$ каналів, причому припускають, що інтенсивність потоку обслуговувань дорівнює $n\mu$. За наявності на обслуговуванні більше одного ТП канали розподіляються між ними довільно.

Граф станів такої системи відрізняється від графа системи без взаємодопомоги тим, що інтенсивність потоку обслуговувань (звільнень каналів) для всіх станів однакова і становить $n\mu$:

$$x_0 \underset{n\mu}{\overset{m\lambda}{\rightleftarrows}} x_1 \underset{n\mu}{\overset{(m-1)\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{(m-n+1)\lambda}{\rightleftarrows}} x_n \underset{n\mu}{\overset{(m-n)\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots x_{m-1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} x_m.$$

Бачимо, що цей граф можна отримати з графа для системи з одним каналом заміною $\mu$ на $n\mu$. Тому формули для ймовірностей станів стаціонарного режиму записують у вигляді (4.11) із заміною $\mu$ на $n\mu$:

$$p_k = \frac{P(m-k,\chi)}{R(m,\chi)}, \quad k=\overline{0,m},$$

де $\chi = \dfrac{n\mu}{\lambda}$.

Як і в попередньому параграфі, середня кількість технічних пристроїв, які простоюють, дорівнює:

$$\overline{l} = \sum_{k=0}^{m} kp_k = m - \chi(1-p_0) = m - \frac{\chi R(m-1,\chi)}{R(m,\chi)}.$$

Імовірність зайнятості каналу для цієї системи, як і раніше, дорівнює $\pi_{з.к.} = 1-p_0$. Оскільки $\pi_{з.к.} = \overline{k}/n$, то середня кількість зайнятих каналів обчислюється за формулою:

$$\overline{k} = n(1-p_0) = \frac{nR(m-1,\chi)}{R(m,\chi)}.$$

Унаслідок взаємодопомоги каналів середня кількість технічних



пристроїв, що перебувають на обслуговуванні, не дорівнює середній кількості зайнятих каналів, а потребує окремого визначення:

$$\overline{s} = \sum_{k=0}^{n} kp_k + n\sum_{r=1}^{m-n} p_{n+r} =$$
$$= \frac{1}{R(m,\chi)}\left(\sum_{k=0}^{n} kP(m-k,\chi) + n\sum_{r=1}^{m-n} P(m-(n+r),\chi)\right) =$$
$$= \frac{1}{R(m,\chi)}\left(\sum_{k=0}^{m} kP(m-k,\chi) - \sum_{k=n+1}^{m} kP(m-k,\chi) + nR(m-n-1,\chi)\right) =$$
$$= \frac{1}{R(m,\chi)}\left(mR(m,\chi) - \chi R(m-1,\chi) - \sum_{k=n+1}^{m} kP(m-k,\chi) + nR(m-n-1,\chi)\right).$$

Оскільки:

$$\sum_{k=n+1}^{m} kP(m-k,\chi) = \sum_{k=n+1}^{m} (m-(m-k))P(m-k,\chi) =$$
$$= mR(m-n-1,\chi) - \chi R(m-n-2,\chi),$$

то остаточно:

$$\overline{s} = \frac{m\left(R(m,\chi) - R(m-n-1,\chi)\right) - \chi\left(R(m-1,\chi) - R(m-n-2,\chi)\right) + nR(m-n-1,\chi)}{R(m,\chi)}.$$

Середня кількість ТП, які перебувають у черзі:

$$\overline{r} = \overline{l} - \overline{s} = \frac{1}{R(m,\chi)}\left((m-n)R(m-n-1,\chi) - \chi R(m-n-2,\chi)\right).$$

<u>Приклад 4.18.</u> Розглянути приклад 4.16, вважаючи, що існує взаємодопомога між каналами.

<u>Розв'язання.</u> Маємо замкнену систему з взаємодопомогою, для якої:

$$n=2;\quad m=20;\quad \lambda=0{,}1;\quad \mu=1;\quad \chi=\frac{n\mu}{\lambda}=20.$$

Обчисливши:

$$p_0 = \frac{P(m,\chi)}{R(m,\chi)} = \frac{P(20;20)}{R(20;20)} = \frac{0{,}088836}{0{,}559093} = 0{,}159,$$

знаходимо:

$$\overline{r} = \frac{(m-n)R(m-n-1,\chi) - \chi R(m-n-2,\chi)}{R(m,\chi)} =$$

$$= \frac{18 \cdot R(17;20) - 20 \cdot R(16;20)}{R(20;20)} = \frac{18 \cdot 0,297028 - 20 \cdot 0,221074}{0,559093} \approx 1,65;$$

$$\overline{l} = m - \chi(1-p_0) = 3,18; \quad \overline{s} = \overline{l} - \overline{r} = 1,53; \quad \pi_{пр.} = \frac{\overline{l}}{m} = 0,159.$$

Порівнюючи отримані результати з характеристиками системи без взаємодопомоги (приклад 4.16), переконуємось, що наявність взаємодопомоги підвищує ефективність системи МО (зменшуються: середня кількість автомобілів, які перебувають на ремонті; середня кількість автомобілів, які чекають на ремонт; середня кількість автомобілів, які простоюють; імовірність простою окремого автомобіля).



# ДОДАТКИ

*Додаток 1*

Значення ймовірностей $p_n = B(n,\alpha) = \dfrac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}$

| $n$ | $\alpha$=0,1 | $\alpha$=0,2 | $\alpha$=0,3 | $\alpha$=0,4 | $\alpha$=0,5 | $\alpha$=0,6 | $\alpha$=0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0909 | 0,1667 | 0,2308 | 0,2857 | 0,3333 | 0,3750 | 0,4118 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0335 | 0,0541 | 0,0769 | 0,1011 | 0,1260 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0127 | 0,0198 | 0,0286 |
| 4 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 |
| 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |

| $n$ | $\alpha$=0,8 | $\alpha$=0,9 | $\alpha$=1,0 | $\alpha$=1,5 | $\alpha$=2,0 | $\alpha$=2,5 | $\alpha$=3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,4444 | 0,4737 | 0,5000 | 0,6000 | 0,6667 | 0,7143 | 0,7500 |
| 2 | 0,1509 | 0,1757 | 0,2000 | 0,3103 | 0,4000 | 0,4717 | 0,5294 |
| 3 | 0,0387 | 0,0501 | 0,0625 | 0,1343 | 0,2105 | 0,2822 | 0,3462 |
| 4 | 0,0077 | 0,0111 | 0,0154 | 0,0480 | 0,0952 | 0,1499 | 0,2061 |
| 5 | 0,0012 | 0,0020 | 0,0031 | 0,0142 | 0,0367 | 0,0697 | 0,1101 |
| 6 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0035 | 0,0121 | 0,0282 | 0,0522 |
| 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0008 | 0,0034 | 0,0100 | 0,0219 |
| 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0009 | 0,0031 | 0,0081 |
| 9 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0027 |
| 10 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0008 |
| 11 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 |

| $n$ | $\alpha$=3,5 | $\alpha$=4,0 | $\alpha$=4,5 | $\alpha$=5,0 | $\alpha$=6,0 | $\alpha$=7,0 | $\alpha$=8,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7778 | 0,8000 | 0,8182 | 0,8333 | 0,8571 | 0,8750 | 0,8889 |
| 2 | 0,5765 | 0,6154 | 0,6480 | 0,6757 | 0,7200 | 0,7538 | 0,7805 |
| 3 | 0,4021 | 0,4507 | 0,4929 | 0,5297 | 0,5902 | 0,6375 | 0,6755 |
| 4 | 0,2603 | 0,3107 | 0,3567 | 0,3983 | 0,4696 | 0,5273 | 0,5746 |
| 5 | 0,1541 | 0,1991 | 0,2430 | 0,2849 | 0,3604 | 0,4247 | 0,4790 |
| 6 | 0,0825 | 0,1172 | 0,1542 | 0,1918 | 0,2649 | 0,3313 | 0,3898 |
| 7 | 0,0396 | 0,0627 | 0,0902 | 0,1205 | 0,1851 | 0,2489 | 0,3082 |
| 8 | 0,0170 | 0,0304 | 0,0483 | 0,0700 | 0,1219 | 0,1788 | 0,2356 |
| 9 | 0,0066 | 0,0133 | 0,0236 | 0,0375 | 0,0751 | 0,1221 | 0,1731 |
| 10 | 0,0023 | 0,0053 | 0,0105 | 0,0184 | 0,0431 | 0,0787 | 0,1217 |
| 11 | 0,0007 | 0,0019 | 0,0043 | 0,0083 | 0,0230 | 0,0477 | 0,0813 |
| 12 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0034 | 0,0114 | 0,0271 | 0,0514 |
| 13 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0144 | 0,0307 |
| 14 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0172 |
| 15 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0091 |
| 16 | | | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0014 | 0,0045 |
| 17 | | | | | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 |
| 18 | | | | | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 |
| 19 | | | | | | 0,0001 | 0,0004 |
| 20 | | | | | | 0,0000 | 0,0002 |





| $n$ | $\alpha$=9 | $\alpha$=10 | $\alpha$=11 | $\alpha$=12 | $\alpha$=13 | $\alpha$=14 | $\alpha$=15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9000 | 0,9091 | 0,9167 | 0,9231 | 0,9286 | 0,9333 | 0,9375 |
| 2 | 0,8020 | 0,8197 | 0,8345 | 0,8471 | 0,8579 | 0,8673 | 0,8755 |
| 3 | 0,7064 | 0,7321 | 0,7537 | 0,7721 | 0,7880 | 0,8019 | 0,8140 |
| 4 | 0,6138 | 0,6467 | 0,6745 | 0,6985 | 0,7192 | 0,7373 | 0,7532 |
| 5 | 0,5249 | 0,5640 | 0,5974 | 0,6264 | 0,6516 | 0,6737 | 0,6932 |
| 6 | 0,4405 | 0,4845 | 0,5227 | 0,5561 | 0,5854 | 0,6112 | 0,6341 |
| 7 | 0,3616 | 0,4090 | 0,4510 | 0,4880 | 0,5209 | 0,5500 | 0,5761 |
| 8 | 0,2892 | 0,3383 | 0,3828 | 0,4227 | 0,4584 | 0,4905 | 0,5193 |
| 9 | 0,2243 | 0,2732 | 0,3187 | 0,3604 | 0,3984 | 0,4328 | 0,4639 |
| 10 | 0,1680 | 0,2146 | 0,2596 | 0,3019 | 0,3412 | 0,3773 | 0,4103 |
| 11 | 0,1208 | 0,1632 | 0,2061 | 0,2478 | 0,2874 | 0,3244 | 0,3588 |
| 12 | 0,0831 | 0,1197 | 0,1589 | 0,1986 | 0,2374 | 0,2746 | 0,3096 |
| 13 | 0,0544 | 0,0843 | 0,1185 | 0,1549 | 0,1919 | 0,2282 | 0,2632 |
| 14 | 0,0338 | 0,0568 | 0,0852 | 0,1172 | 0,1512 | 0,1858 | 0,2200 |
| 15 | 0,0199 | 0,0365 | 0,0588 | 0,0857 | 0,1159 | 0,1478 | 0,1803 |
| 16 | 0,0111 | 0,0223 | 0,0389 | 0,0604 | 0,0860 | 0,1145 | 0,1446 |
| 17 | 0,0058 | 0,0129 | 0,0245 | 0,0409 | 0,0617 | 0,0862 | 0,1132 |
| 18 | 0,0029 | 0,0071 | 0,0148 | 0,0265 | 0,0427 | 0,0628 | 0,0862 |
| 19 | 0,0014 | 0,0037 | 0,0085 | 0,0165 | 0,0284 | 0,0442 | 0,0637 |
| 20 | 0,0006 | 0,0019 | 0,0046 | 0,0098 | 0,0181 | 0,0300 | 0,0456 |

| *n* | $\alpha$=11 | $\alpha$=12 | $\alpha$=13 | $\alpha$=14 | $\alpha$=15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0,0024 | 0,0056 | 0,0111 | 0,0196 | 0,0315 |
| 22 | 0,0012 | 0,0030 | 0,0065 | 0,0123 | 0,0211 |
| 23 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0037 | 0,0075 | 0,0135 |
| 24 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0020 | 0,0043 | 0,0084 |
| 25 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0050 |
| 26 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0029 |
| 27 | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0016 |
| 28 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 |
| 29 | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 30 | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |

| *n* | $\alpha$=16 | $\alpha$=17 | $\alpha$=18 | $\alpha$=19 | $\alpha$=20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9412 | 0,9444 | 0,9474 | 0,9500 | 0,9524 |
| 2 | 0,8828 | 0,8892 | 0,8950 | 0,9002 | 0,9050 |
| 3 | 0,8248 | 0,8344 | 0,8430 | 0,8508 | 0,8578 |
| 4 | 0,7674 | 0,7800 | 0,7914 | 0,8016 | 0,8109 |
| 5 | 0,7106 | 0,7262 | 0,7402 | 0,7529 | 0,7644 |
| 6 | 0,6546 | 0,6729 | 0,6895 | 0,7045 | 0,7181 |
| 7 | 0,5994 | 0,6204 | 0,6394 | 0,6566 | 0,6723 |
| 8 | 0,5452 | 0,5687 | 0,5899 | 0,6093 | 0,6270 |
| 9 | 0,4922 | 0,5179 | 0,5413 | 0,5626 | 0,5822 |
| 10 | 0,4406 | 0,4682 | 0,4935 | 0,5167 | 0,5380 |





| *n* | $\alpha$=16 | $\alpha$=17 | $\alpha$=18 | $\alpha$=19 | $\alpha$=20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,3905 | 0,4198 | 0,4468 | 0,4716 | 0,4945 |
| 12 | 0,3424 | 0,3729 | 0,4012 | 0,4275 | 0,4518 |
| 13 | 0,2965 | 0,3278 | 0,3571 | 0,3845 | 0,4101 |
| 14 | 0,2531 | 0,2847 | 0,3147 | 0,3429 | 0,3694 |
| 15 | 0,2126 | 0,2440 | 0,2741 | 0,3028 | 0,3300 |
| 16 | 0,1753 | 0,2059 | 0,2357 | 0,2645 | 0,2920 |
| 17 | 0,1416 | 0,1707 | 0,1997 | 0,2282 | 0,2557 |
| 18 | 0,1118 | 0,1388 | 0,1665 | 0,1941 | 0,2213 |
| 19 | 0,0861 | 0,1105 | 0,1362 | 0,1625 | 0,1889 |
| 20 | 0,0644 | 0,0859 | 0,1092 | 0,1338 | 0,1589 |
| 21 | 0,0468 | 0,0650 | 0,0856 | 0,1080 | 0,1314 |
| 22 | 0,0329 | 0,0478 | 0,0655 | 0,0853 | 0,1067 |
| 23 | 0,0224 | 0,0341 | 0,0487 | 0,0658 | 0,0849 |
| 24 | 0,0147 | 0,0236 | 0,0353 | 0,0495 | 0,0661 |
| 25 | 0,0093 | 0,0158 | 0,0248 | 0,0363 | 0,0502 |
| 26 | 0,0057 | 0,0102 | 0,0169 | 0,0258 | 0,0372 |
| 27 | 0,0034 | 0,0064 | 0,0111 | 0,0178 | 0,0268 |
| 28 | 0,0019 | 0,0039 | 0,0071 | 0,0120 | 0,0188 |
| 29 | 0,0011 | 0,0023 | 0,0044 | 0,0078 | 0,0128 |
| 30 | 0,0006 | 0,0013 | 0,0026 | 0,0049 | 0,0085 |
| 31 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0015 | 0,0030 | 0,0054 |
| 32 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0018 | 0,0034 |
| 33 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0010 | 0,0020 |
| 34 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0012 |
| 35 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 |
| 36 | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 37 | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 38 | | | | 0,0000 | 0,0001 |
| 39 | | | | | 0,0001 |
| 40 | | | | | 0,0000 |

Значення ймовірностей

$$C(n,\alpha)=\frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{(1-\kappa)\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\kappa\dfrac{\alpha^n}{n!}}=\left(1+(1-\kappa)\left(B(n,\alpha)\right)^{-1}\right)^{-1},\quad \kappa=\frac{\alpha}{n}<1$$

| $n$ | $\alpha$=0,1 | $\alpha$=0,2 | $\alpha$=0,3 | $\alpha$=0,4 | $\alpha$=0,5 | $\alpha$=0,6 | $\alpha$=0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1000 | 0,2000 | 0,3000 | 0,4000 | 0,5000 | 0,6000 | 0,7000 |
| 2 | 0,0048 | 0,0182 | 0,0391 | 0,0667 | 0,1000 | 0,1385 | 0,1815 |
| 3 | 0,0002 | 0,0012 | 0,0037 | 0,0082 | 0,0152 | 0,0247 | 0,0369 |
| 4 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0018 | 0,0035 | 0,0060 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0008 |
| 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |

| $n$ | $\alpha$=0,8 | $\alpha$=0,9 | $\alpha$=1,0 | $\alpha$=1,5 | $\alpha$=2,0 | $\alpha$=2,5 | $\alpha$=3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,8000 | 0,9000 | | | | | |
| 2 | 0,2286 | 0,2793 | 0,3333 | 0,6429 | | | |
| 3 | 0,0520 | 0,0700 | 0,0909 | 0,2368 | 0,4444 | 0,7022 | |
| 4 | 0,0096 | 0,0143 | 0,0204 | 0,0746 | 0,1739 | 0,3199 | 0,5094 |
| 5 | 0,0015 | 0,0024 | 0,0038 | 0,0201 | 0,0597 | 0,1304 | 0,2362 |
| 6 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0006 | 0,0047 | 0,0180 | 0,0474 | 0,0991 |
| 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0010 | 0,0048 | 0,0154 | 0,0376 |
| 8 | | | 0,0000 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0045 | 0,0129 |
| 9 | | | | 0,0000 | 0,0002 | 0,0012 | 0,0040 |
| 10 | | | | | 0,0000 | 0,0003 | 0,0012 |
| 11 | | | | | | 0,0001 | 0,0003 |





| $n$ | $\alpha$=3,5 | $\alpha$=4,0 | $\alpha$=4,5 | $\alpha$=5,0 | $\alpha$=6,0 | $\alpha$=7,0 | $\alpha$=8,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0,7379 | | | | | | |
| 5 | 0,3778 | 0,5541 | 0,7625 | | | | |
| 6 | 0,1775 | 0,2848 | 0,4217 | 0,5875 | | | |
| 7 | 0,0762 | 0,1351 | 0,2172 | 0,3241 | 0,6138 | | |
| 8 | 0,0299 | 0,0590 | 0,1039 | 0,1673 | 0,3570 | 0,6353 | |
| 9 | 0,0107 | 0,0238 | 0,0460 | 0,0805 | 0,1960 | 0,3849 | 0,6533 |
| 10 | 0,0035 | 0,0088 | 0,0189 | 0,0361 | 0,1013 | 0,2217 | 0,4092 |
| 11 | 0,0011 | 0,0030 | 0,0072 | 0,0151 | 0,0492 | 0,1211 | 0,2450 |
| 12 | 0,0003 | 0,0006 | 0,0026 | 0,0059 | 0,0225 | 0,0626 | 0,1398 |
| 13 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0008 | 0,0021 | 0,0096 | 0,0306 | 0,0760 |
| 14 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0039 | 0,0142 | 0,0393 |
| 15 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0015 | 0,0062 | 0,0193 |
| 16 | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0026 | 0,0090 |
| 17 | | | | 0,0000 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0040 |
| 18 | | | | | 0,0001 | 0,0004 | 0,0017 |
| 19 | | | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0007 |
| 20 | | | | | | 0,0000 | 0,0003 |

| *n* | *α*=9 | *α*=10 | *α*=11 | *α*=12 | *α*=13 | *α*=14 | *α*=15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,6687 | | | | | | |
| 11 | 0,4305 | 0,6821 | | | | | |
| 12 | 0,2660 | 0,4494 | 0,6939 | | | | |
| 13 | 0,1575 | 0,2853 | 0,4664 | 0,7044 | | | |
| 14 | 0,0892 | 0,1741 | 0,3029 | 0,4817 | 0,7138 | | |
| 15 | 0,0482 | 0,1020 | 0,1898 | 0,3192 | 0,4957 | 0,7223 | |
| 16 | 0,0249 | 0,0573 | 0,1145 | 0,2046 | 0,3343 | 0,5085 | 0,7301 |
| 17 | 0,0123 | 0,0309 | 0,0665 | 0,1266 | 0,2185 | 0,3483 | 0,5203 |
| 18 | 0,0058 | 0,0159 | 0,0371 | 0,0756 | 0,1383 | 0,2317 | 0,3613 |
| 19 | 0,0026 | 0,0042 | 0,0199 | 0,0435 | 0,0847 | 0,1496 | 0,2442 |
| 20 | 0,0011 | 0,0037 | 0,0103 | 0,0241 | 0,0501 | 0,0936 | 0,1604 |

| *n* | *α*=11 | *α*=12 | *α*=13 | *α*=14 | *α*=15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0,0051 | 0,0129 | 0,0286 | 0,0567 | 0,1023 |
| 22 | 0,0024 | 0,0066 | 0,0158 | 0,0332 | 0,0633 |
| 23 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0084 | 0,0188 | 0,0380 |
| 24 | 0,0005 | 0,0016 | 0,0043 | 0,0103 | 0,0221 |
| 25 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0021 | 0,0055 | 0,0124 |
| 26 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0028 | 0,0068 |
| 27 | | 0,0001 | 0,0005 | 0,0014 | 0,0036 |
| 28 | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0018 |
| 29 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 |
| 30 | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 |





| *n* | *α*=16 | *α*=17 | *α*=18 | *α*=19 | *α*=20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 0,7372 | | | | |
| 18 | 0,5312 | 0,7437 | | | |
| 19 | 0,3736 | 0,5413 | 0,7498 | | |
| 20 | 0,2561 | 0,3851 | 0,5508 | 0,7554 | |
| 21 | 0,1709 | 0,2673 | 0,3959 | 0,5596 | 0,7606 |
| 22 | 0,1109 | 0,1810 | 0,2781 | 0,4061 | 0,5679 |
| 23 | 0,0699 | 0,1193 | 0,1907 | 0,2883 | 0,4157 |
| 24 | 0,0428 | 0,0766 | 0,1275 | 0,2001 | 0,2981 |
| 25 | 0,0255 | 0,0478 | 0,0831 | 0,1356 | 0,2091 |
| 26 | 0,0147 | 0,0290 | 0,0528 | 0,0896 | 0,1434 |
| 27 | 0,0082 | 0,0171 | 0,0326 | 0,0578 | 0,0961 |
| 28 | 0,0045 | 0,0098 | 0,0196 | 0,0363 | 0,0628 |
| 29 | 0,0024 | 0,0055 | 0,0115 | 0,0222 | 0,0401 |
| 30 | 0,0012 | 0,0030 | 0,0065 | 0,0133 | 0,0250 |
| 31 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0036 | 0,0077 | 0,0151 |
| 32 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0020 | 0,0044 | 0,0090 |
| 33 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0052 |
| 34 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0029 |
| 35 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 |
| 36 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 |
| 37 | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 38 | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 39 | | | | 0,0000 | 0,0001 |
| 40 | | | | | 0,0001 |

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М., 1983.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М., 2001.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – М., 1988.
4. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
5. *Костевич Л. С., Лапко А. А.* Теория игр. Исследование операций. – Минск, 1982.
6. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
7. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М., 1965.
8. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. – М., 1963.
9. *Чинаев П. И., Черенков А. А., Минин Н. А., Перевозников А. Ю.* Высшая математика. Специальные главы. – К., 1977.
10. *Cooper R. B.* Introduction to queueing theory. – New York, 1981.



## Зміст

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Юрій Васильович Жерновий

# МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тексти лекцій

Редактор І. М. Лоїк
Технічний редактор С. З. Сеник

Підп. до друку . Формат 60х84/16. Папір друк. Друк на різогр.
Умовн. друк. арк. 9,1. Обл.-вид. арк. 9,4. Тираж 200 прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41

імені Івана Франка. 79000 Львів, вул.. Дорошенка, 41