Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г. П. Лопушанська, А. О. Лопушанський, О. М. М'яус

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Навчальний посібник

Львів
2023

Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О., М'яус О. М. Математичні моделі з дробовими похідними: навчальний посібник. - Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2023. – 129 с.

Викладено основи теорії диференціальних рівнянь зі звичайними і частинними похідними дробових порядків та методи розв'язування прямих і деяких обернених задач, які описані за допомогою таких рівнянь. Для студентів і аспірантів механіко-математичного факультету.

ЗМІСТ

ВСТУП

Під моделюванням певного процесу розуміємо відображення його на мові відповідної науки. Математичне моделювання відображає процес на мові певних функційних зв'язків і допомагає іноді відкрити нові його аспекти. За визначенням В.М. Глушкова, "математична модель - це множина символічних математичних об'єктів і співвідношень між ними". За М.М. Амосовим, "математична модель - це система, що відображає іншу систему"[1].

Математичні моделі можна досліджувати різними методами: *аналітичними*, якими отримують у загальному вигляді залежності між досліджуваними характеристиками чи їх властивості, *чисельними* тощо.

Існують різні класифікації математичних моделей. Зокрема, статичні моделі характеризують конкретний стан об'єкта у заданий момент часу, у стохастнчних моделях відображено вплив випадкових факторів.

Динамічне математичне моделювання – це опис змінних у часі процесів за допомогою диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема. Іноді самі такі функціональні співвідношення відображають закон, одержаний при дослідженні процесу засобами відповідної галузі у природознавстві чи в суспільних науках. Хоч частіше остататочні математичні моделі отримують у процесі застосувань самої математики, логічних міркувань, а тому є потреба в їх перевірці на практиці – тестуванні.

Як відзначено в [26], у моделюванні виділяють три основні частини: *емпіричну* (фактичні дані експерименту чи спостереження), *теоретичну* (зв'язки, концепції, які пояснюють емпіричну частину), *математичну*, що конструює математичні моделі для пояснення і перевірки теоретичної частини, обробки експериментальних даних і планування наступних досліджень.

На початковому етапі моделі є спрощеними, щоб підібрати відповідний математичний апарат для їх дослідження, дати простий алгоритм розв'язання і протестувати. Далі відбувається уточнення моделі, врахування додаткових факторів, які впливають на процес.

Виявляється, що якщо замінити деякі похідні цілих порядків певними інтегральними зв'язками, зокрема, нелокальними похідними дробових порядків, то буде враховано поступовість процесу. І це в багатьох випадках правильніше відображає сам процес. В останні роки активно вивчаються моделі, які описують за допомогою рівнянь із дробовими похідними. Конкретні приклади таких моделей у різних галузях природознавства наведені, зоерема, у [52,53].

Завданням курсу є вивчення задач для рівнянь із дробовими похідними і на їх прикладах розвинути вивчені в попередніх курсах методи дослідження початкових і крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, початково-крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Значна увага приділена методу рядів Фур'є, методу фундаментальної функції і функції Гріна, важливими у вивченні динамічних (зокрема, стохастичних) процесів із пам'яттю [28,29].

Спочатку студенти повторюють необхідний матеріал із теорії узагальнених функцій, вивчають звичайні рівняння із дробовими похідними, а потім моделі, які описуються рівняннями з частинними похідними дробових порядків. По першій частині курсу пропонується виконання контрольної роботи. Окремі теми, як викладені у посібнику, так і окремі журнальні статті, пропонуються на самостійне опрацювання з доповідями і аналізом на семінарських заняттях.

Розділ 1

ЗГОРТКА І ПОХІДНІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

1.1 Простори основних та узагальнених функцій

Математична теорія узагальнених функцій розпочата працями С.Л. Соболєва (1936-1938) та остаточно сформована у працях Л. Шварца (1950-1951), хоч вперше термін "узагальнена функція"ввів математик і фізик Дірак (1926-1930) у квантово-механічних дослідженнях. Ця теорія проникла в різні галузі математики, квантової фізики. Детально вона викладена у рекомендованій літературі ([3]-[6]). Тому даємо тільки необхідну інформацію, зокрема, із [7,15].

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, зокрема, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ($\gamma_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$) — мультиіндекс, $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$, $|\gamma| = \gamma_1 \cdots + \gamma_n$, $D^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}}$ — оператор диференціювання.

Функція $f(x)$ називається *фінітною*, якщо існує компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, поза яким $f(x) \equiv 0$, множина $suppf := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ називається *носієм* функції $f(x)$.

Нехай $\mathcal{D}(\Omega)$ — простір нескінченно диференційо функцій з носіями строго в Ω (*простір основних функцій*). Функція

$$\varphi(x, a) := \begin{cases} C_a e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases},$$

де $a > 0$, C_a — додатна стала, належить простору $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Далі вважатимемо

C_a такою, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,a)dx = 1$.

Для довільних обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *та компакта* $B \subset \Omega$ *існує така функція* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *що* $0 \le \psi(x) \le 1$ *та* $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$.

Кажемо, що послідовність $\varphi_k \to 0$ (при $k \to \infty$) у просторі $\mathcal{D}(\Omega)$, якщо:

а) існує компакт $K \subset \Omega$, такий що $\varphi_k(x) \equiv 0$ поза K для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $supp\varphi_k \subset K$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;

б) для довільного мультиіндексу $\gamma \quad D^\gamma \varphi_k \to 0$ рівномірно (на K).

Це дуже сильна топологія. $\mathcal{D}(\Omega)$ *є прикладом локально-опуклого топологічного простору.*

Значення функціонала f на основній функції φ позначаємо через (f, φ).

Функціонал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ називається *лінійним*, якщо для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ і довільних дійсних (або комплексних) чисел C_1, C_2

$$(f, C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1(f, \varphi_1) + C_2(f, \varphi_2).$$

Функціонал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ називається *неперервним*, якщо зі збіжності до нуля у просторі $\mathcal{D}(\Omega)$ послідовності φ_k при $k \to \infty$ випливає $(f, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Узагальненою функцією (розподілом) в Ω називається лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}(\Omega)$. Сукупність узагальнених функцій утворює векторний простір, який позначають $\mathcal{D}'(\Omega)$ і наділяють його слабкою топологією: $f_k \to 0$ ($k \to \infty$) у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$, якщо для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(f_k, \varphi) \to 0$, $k \to \infty$.

Використовуватимемо також інші простори узагальнених функцій, вибираючи за простори основних функцій, наприклад, $C^\infty(\Omega)$ — простір нескінченно диференційовних функцій в Ω,

$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma \varphi(x)| < +\infty \quad \forall \beta, \gamma\}$.

Функція $e^{-|x|^2}$ належить простору $S(\mathbb{R}^n)$ і не належить до $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (оскільки не є фінітною).

Послідовність $\varphi_k \to 0$ ($k \to \infty$) у просторі $C^\infty(\Omega)$, якщо для довільного мультиіндексу $\gamma \quad D^\gamma \varphi_k(x) \to 0$ рівномірно на довільному компакті $K \subset \Omega$.

Послідовність $\varphi_k \to 0$ ($k \to \infty$) у просторі $\mathcal{S} = S(\mathbb{R}^n)$, якщо:

а) для довільних мультиіндексів β, γ існує додатна стала $C_{\beta,\gamma}$ така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma \varphi_k(x)| \le C_{\beta,\gamma};$$

б) для довільного мультиіндексу γ рівномірно $D^\gamma \varphi_k(x) \to 0$ ($k \to \infty$).

Позначаємо:

$\mathcal{E}'(\Omega) = (C^\infty(\Omega))'$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $C^\infty(\Omega)$,

$S' = S'(\mathbb{R}^n)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $S(\mathbb{R}^n)$.

Простір $S(\mathbb{R}^n)$ називається простором *швидко спадаючих на безмежності* гладких функцій, а простір $S'(\mathbb{R}^n)$ — простором *повільно зростаючих на безмежності* узагальнених функцій.

Для введених просторів основних та узагальнених функцій правильні такі включення:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Приклади узагальнених функцій:

1) δ— функція Дірака: $(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2) Кожна *звичайна* (локально інтегровна) в Ω функція $f(x)$ визначає узагальнену функцію f

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.1}$$

$$(f, \varphi) = \int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.2}$$

де $\overline{f(x)}$— комплексно спряжений вираз до $f(x)$, якщо функції f, φ комплексно-значні. Далі клас звичайних функцій в Ω позначатимемо через $L_{1,loc}(\Omega)$.

3) $(P\frac{1}{x}, \varphi(x)) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

4) Якщо S— поверхня в $\mathbb{R}^n$, $\mu \in C(S)$, то рівністю

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu\varphi dS \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

визначено узагальнену функцію $\mu\delta_S$ — простий шар на поверхні S.

Узагальнена функція f, для якої існує звичайна функція $f(x)$, така що виконується рівність (1.1) або (1.2), називається *регулярною узагальненою функцією*, а всяка інша — *сингулярною узагальненою функцією.* Функції $\delta(x)$, $\delta(x-x_0)$, $P\frac{1}{x}$, $\mu\delta_S(x)$ є сингулярними узагальненими функціями.

Дві узагальнені функції f_1, f_2 називаються рівними ($f_1 = f_2$) у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$, якщо для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\qquad (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$.

Між простором звичайних і регулярних узагальнених функцій є взаємо-однозначна відповідність: кожна звичайна функція $f(x)$ визначає узагальнену функцію f (за формулою (1.1) або (1.2)) і для кожної регулярної узагальненої функції f існує тільки одна звичайна функція $f(x)$ така, що дорівнює f у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$. Це випливає з такої леми.

Лема 1 (Дюбуа-Реймона). *Якщо $f(x)$ – звичайна функція в Ω, то $f(x) = 0$ майже всюди в Ω тоді і тільки тоді, коли*

$$\int\limits_{\Omega} \overline{f(x)}\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Кажемо, що узагальнена функція $f = 0$ в області Ω, якщо

$$(f, \varphi) = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Носієм узагальненої функції f називається такий компакт $K := supp f$, що $f = 0$ поза K.

Узагальнена функція називається *фінітною*, якщо її носій є обмеженою множиною.

Теорема 1. *Кожна фінітна узагальнена функція належить простору $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.*

Правильна обернена теорема, так що $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — простір фінітних узагальнених функцій.

Узагальнена функція f називається *нескінченно диференційовною в точці* $x \in \Omega$, якщо в деякому околі $V(x)$ вона збігається з функцією $f_1 \in C^\infty(\Omega)$. Найменша замкнена множина, поза якою f нескінченно диференційовна, називається *носієм особливостей* функції f і позначається $singsupp f$.

1.2 Основні дії над узагальненими функціями

Оскільки клас $\mathcal{D}'$ узагальнених функцій є розширенням класу звичайних функцій, то визначають операції у $\mathcal{D}'$ так, щоб вони переходили у відомі операції для звичайних функцій.

1. *Додавання узагальнених функцій і множення на числа.* Якщо $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$, C_1, C_2 — комплексні числа, то $C_1 f_1 + C_2 f_2$ — така узагальнена функція із $\mathcal{D}'$, що

$$(C_1 f_1 + {}_2 f_2, \varphi) = \overline{C_1}(f_1, \varphi) + \overline{C_2}(f_2, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

2. *Множення узагальненої функції на нескінченно диференційовну.* Якщо $f \in \mathcal{D}'$, $a \in C^\infty$, то рівністю

$$(af, \varphi) = (f(x), \overline{a(x)}\varphi(x)) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

визначено $af \in \mathcal{D}'$ (оскільки $a\varphi \in \mathcal{D}$).

Приклади:

1) $(x\delta(x), \varphi) = (\delta(x), x\varphi) = 0 = (0, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$, тому за означенням рівності узагальнених функцій $x\delta(x) = 0$ у просторі $\mathcal{D}'$;

2) $(xP\frac{1}{x}, \varphi(x)) = (P\frac{1}{x}, x\varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = (1, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$, тому $xP\frac{1}{x} = 1$;

3) для $a \in C^\infty$, $\varphi \in \mathcal{D}$ маємо
$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x)) =$
$= (a(0)\delta(x), \varphi(x))$, а отже, $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

3. *Диференціювання узагальнених функцій.* Якщо $f \in \mathcal{D}'$, то рівністю

$$(D^\gamma f, \varphi) = (-1)^{|\gamma|}(f(x), D^\gamma \varphi(x)) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

визначено $D^\gamma f \in \mathcal{D}'$, так що кожна узагальнена функція нескінченно диференційовна (у визначеному вище сенсі).

Приклади.

1) Нехай $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Це звичайна функція (а отже, породжує регулярну узагальнену функцію з $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), яку називають *одиничною функцією Хевісайда.* За означенням похідної для довільної $\varphi \in \mathcal{D}$ матимемо
$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x) dx =$

$$= -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$ отже, $\theta' = \delta$.

2) $(ln|x|)' = P\frac{1}{x}$. Справді, $((ln|x|)', \varphi) = -(ln|x|, \varphi') =$

$$= -\lim_{\nu\to 0}\Big[\int\limits_{-\infty}^{-\nu} ln|x|\varphi'(x)dx + \int\limits_{\nu}^{\infty} ln|x|\varphi'(x)dx\Big] =$$
$$= -\lim_{\nu\to 0}\Big[(ln|x|\varphi(x))|_{-\infty}^{-\nu} - \int\limits_{-\infty}^{-\nu}\frac{\varphi(x)}{x}dx + (ln|x|\varphi(x))|_{\nu}^{-\infty} - \int\limits_{\nu}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\Big] =$$
$$= \lim_{\nu\to 0}[ln\nu\varphi(\nu) - ln\nu\varphi(-\nu)] + v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx =$$
$$= \lim_{\nu\to 0}[ln\nu\big(\varphi(\nu)-\varphi(-\nu)\big)] + \big(P\tfrac{1}{x},\varphi(x)\big) = \big(P\tfrac{1}{x},\varphi(x)\big)\,.$$

3) Якщо $f(x)$ — кусково абсолютно неперервна функція з розривами першого роду у точках $x_1,\dots,x_m \in \mathbb{R}$, то

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_{k=1}^{m} h_k\delta(x-x_k)\,,$$

де $\{f'(x)\}$ — похідна функції $f(x)$ у звичайному розумінні (визначена майже всюди в $\mathbb{R}$), $h_k = f(x_k+0) - f(x_k-0)$ — стрибок функції $f(x)$ у точці x_k. Наприклад,

$$f(x) = x_+^2 := \begin{cases} x^2, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} => \ f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} = 2x_+\,,$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} => f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} + \delta(x) = 2x_+ + \delta(x)\,.$$

4) Нехай $\theta(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & x_1>0,\dots,x_n>0\\ 0, & \text{в інших випадках}\end{cases}$. Це регулярна узагальнена функція із $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ і $\frac{\partial^n\theta(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\dots\partial x_n} = \delta(x_1,\dots,x_n) = \delta(x)$.

Первісною узагальненої функції $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ називається така $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, що $y' = f$ у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Для довільної $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ існує первісна. Різниця двох первісних для f — узагальнена стала C: $(C,\varphi) = C\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Примітка. За допомогою функції Хевісайда можемо подати включення в електричне коло в момент $t=0$ сталої напруги величини E_0: $E(t) = E_0\theta(t)$, а її зміна $E'(t) = E_0\delta(t)$. За допомогою дельта-функції $m\delta(x-x_0)$ визначають густину маси величини m, зосередженої в точці x_0.

Узагальнені функції ще називають розподілами. Це не ті розподіли, що в теорії ймовірності і статистиці, хоч певний зв'язок є. Як відомо, функцією розподілу випадкової величини називають обмежену неспадну неперервну зліва функцію $F(x)$:

$F(x_1) \le F(x_2),\ x_1 \le x_2, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to z-0} F(x) = F(z).$

Це звичайна функція. Величину $p(t) = F'(t)$ називають *густиною ймовірності.* Якщо ж випадкова величина з достовірністю набуває значення x_0, то $F(x) = 0$ при $x < x_0$ і $F(x) = 1$ при $x > x_0$, так що $F(x) = \theta(x - x_0)$, а тоді $p(x) = \delta(x-x_0)$. Якщо випадкова величина набуває значення $x_1, \dots, x_n$ відповідно із ймовірностями $p_1, \dots, p_n$, то $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k)$. Також характеристичною функцією η для густини ймовірності $p(x)$ є її перетворення Фур'є $\eta(z) = \mathcal{F}[p](z)$, яке для звичайних функцій $p(x)$ загалом є узагальненою функцією.

4. *Узагальнені функції, залежні від параметрів.* Нехай $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f = f(x, y)$ ($x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$) та $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Кажемо, що узагальнена функція f залежить від змінних y як від параметрів, якщо для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ визначено $(f(x, y), \varphi(x)) := g(y)$.

Узагальнена функція $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *неперервно залежить від змінних* $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ (як від параметрів), якщо для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ визначено $(f(x, y), \varphi(x)) := h(y)$ та $h \in C(\Omega_2)$, тобто існує

$$\lim_{y\to y_0} (f(x, y), \varphi(x)) = (f(x, y_0), \varphi(x)) \ \ \forall y_0 \in \Omega_2.$$

Узагальнена функція $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *нескінченно диференційовна за змінними* $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$, якщо для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ та кожного мультиіндексу γ визначено $D^\gamma(f(x, \cdot), \varphi(x)) \in C(\Omega_2)$. У цьому випадку

$$D_y^\gamma(f(x, y), \varphi(x)) = (D_y^\gamma f(x, y), \varphi(x)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

5. *Асоціативний добуток не визначено для довільних узагальнених функцій.* Справді, з наведених вище прикладів отримуємо

$$\big(P\frac{1}{x} \cdot x\big) \cdot \delta(x) = \big(x \cdot P\frac{1}{x}\big) \cdot \delta(x) = 1 \cdot \delta(x) = \delta(x),$$

однак $P\frac{1}{x} \cdot \big(x \cdot \delta(x)\big) = P\frac{1}{x} \cdot 0 = 0$.

6. *Прямий добуток узагальнених функцій.* Якщо $f \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $g \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, то рівністю

$$(f(x)g(y), \varphi(x,y)) = \big(f(x), (g(y), \varphi(x,y))\big)$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

визначено прямий добуток $f(x)g(y)$, $fg = f \cdot g = f \times g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Прямий добуток узагальнених функцій має такі властивості:

прямий добуток комутативний: $f(x)g(y) = g(y)f(x)$;

прямий добуток неперервно залежить від співмножників:

якщо $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ у $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, то $f_k g \to fg$ $(k \to \infty)$ у $\mathcal{D}'(\Omega)$;

правильна формула диференціювання

$$D_x^\gamma (f(x) \cdot g(y)) = D_x^\gamma f(x) \cdot g(y);$$

якщо $f \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $g \in L_{1,loc}(\Omega_2)$ (g — локально інтегровна за Лебегом у Ω_2, тобто звичайна у Ω_2), то з комутативності прямого добутку випливає формула

$$\Big(f(x), \int\limits_{\Omega_2} g(y)\varphi(x,y)dy\Big) = \int\limits_{\Omega_2} \big(f(x), \varphi(x,y)\big) g(y)dy$$

для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, яку називають *аналогом теореми Фубіні для узагальнених функцій.*

7. *Згортка узагальнених функцій.*

Згорткою звичайних функцій f, g називається функція

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi .$$

Якщо $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q \geq 1$, то існує $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$, де $1/r = 1/p + 1/q - 1$, причому

$$||f * g||_{L_r} \leq ||f||_{L_p} \, ||g||_{L_q},$$

зокрема, $r = 1$ при $p = q = 1$, так що $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ при $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $r = \infty$ при $p = 1$, $q = \infty$ або $p = q = 2$.

Якщо $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ і хоч одна з них фінітна, то існує $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Якщо $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ і обидві функції мають носії на $[0, +\infty)$, то існує $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $f * g$ має носій на $[0, +\infty)$ і визначається формулою

$$(f * g)(x) = \theta(x) \int\limits_0^x f(\xi) g(x-\xi) d\xi .$$

В усіх цих випадках згортка комутативна.

Приклади:

1) При додатних a, b маємо

$$e^{-ax^2} * e^{-bx^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{-b(x-y)^2} dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)[y^2 - \frac{2bx}{a+b} y + \frac{b^2x^2}{(a+b)^2}]} dy \; e^{\frac{b^2x^2}{a+b} - bx^2} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)\left(y - \frac{2bx}{a+b}\right)^2} dy \; e^{-\frac{ab}{a+b}x^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+b)z^2} dz \; e^{-\frac{ab}{a+b}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \; e^{-\frac{ab}{a+b}x^2} ;$$

2) $[\theta(x)\sin(x)] * [\theta(x)x] = \theta(x) \int\limits_0^x \sin(y) \; (x-y) dy =$

$$= -\theta(x)\cos(y) \; (x-y)\big|_{y=0}^{y=x} - \theta(x) \int\limits_0^x \cos(y) dy = x_+ - \sin(x_+) \, .$$

Позначаємо через $\widehat{*}$ операцію *згортки узагальненої функції* g *та основної функції* φ:

$$(g \widehat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)).$$

Вона має такі властивості:

1) $g \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ $\quad => \quad$ $g \widehat{*} \varphi \in C^\infty$;

2) $g \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ $\quad => \quad$ $g \widehat{*} \varphi \in \mathcal{D}$;

3) $supp(g \widehat{*} \varphi) \subset supp\varphi - suppg$ (арифметичною сумою чи різницею множин A, B є множини $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$);

4) $D^\gamma(g \widehat{*} \varphi) = g \widehat{*} D^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} D^\gamma g \widehat{*} \varphi$;

5) якщо $g \in \mathcal{E}'$, $\varphi_k \to 0$ у просторі $\mathcal{D}$, то $g \widehat{*} \varphi_k \to 0$ у $\mathcal{D}$;
якщо $g \in \mathcal{D}'$, $\varphi_k \to 0$ у просторі $\mathcal{D}$, то $g \widehat{*} \varphi_k \to 0$ у $\mathcal{E} = C^\infty$.

Згорткою узагальнених функцій f і g називається узагальнена функція $f * g$, визначена формулою

$$(f * g, \varphi) = (f, g \widehat{*} \varphi) \text{ для кожної основної функції } \varphi .$$

Теорема 2. *Якщо* $f, g \in \mathcal{D}'$ *і хоч одна з них фінітна, то існує* $f * g \in \mathcal{D}'$.

Основні властивості згортки:

1) за умови існування згортка $f * g$ лінійна і комутативна;

2) $supp(f * g) \subset suppf + suppg$;

3) якщо $f_k \to f$ у просторі $\mathcal{D}'$ та виконується одна з умов

а) $g \in \mathcal{E}'$ або

б) $g \in \mathcal{D}'$, існує компакт K такий, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ $\quad suppf_k \subset K$, то $f_k * g \to f * g$ у просторі $\mathcal{D}'$ (*згортка* $f * g$ *неперервна*);

4) за умови існування $f * g$ правильна формула диференціювання згортки

$$D^\gamma(f * g) = D^\gamma f * g = f * D^\gamma g = D^\beta f * D^{\gamma-\beta} g\,;$$

5) $\delta * f = f * \delta = f\,, \quad D^\gamma \delta * f = D^\gamma f\,;$

6) $f \in S'\,,\ g \in \mathcal{E}' \qquad => \qquad f * g \in \mathcal{S}'\,.$

Зауважимо, що фінітність однієї з компонент згортки не є необхідною умовою існування згортки.

Приклади:

1) $f(x) * \theta'(x) = f(x) * \delta(x) = f(x)\,;$

2) $\sin x * \delta^{(k)}(x) = \sin^{(k)} x * \delta(x) = \sin^{(k)} x\,;$

$\sin x * \delta^{(k)}(x-a) = \sin^{(k)} x * \delta(x-a) = \sin^{(k)}(x-a)\,;$

справді, для довільної основної $\varphi(x)$

$\big(f(x) * \delta(x-a), \varphi(x)\big) = \big(\delta(x-a) * f(x), \varphi(x)\big) =$

$= \big(\delta(x-a), (f(y), \varphi(x+y))\big) = (f(y), \varphi(a+y)) = (f(y-a), \varphi(y))\,,$

а тому $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)\,;$

3) зв'язок між функцією розподілу $F(x)$ і її густиною $p(x) = F'(x)$ ще можна подати за допомогою згортки $F(x) = (\theta * p)(x)\,.$

8. *Композиція узагальнених функцій.* Нехай $V(\mathbb{R}^n)$ — деякий функційний простір, зокрема, це може бути $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, або $S(\mathbb{R}^n)$, або $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $F \in V'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ і належить простору $V(\mathbb{R}^n)$ за другою частиною змінних, а саме, $(f(x,\cdot), \varphi(x)) \in V(\mathbb{R}^n)$ для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(f(x,\cdot), \varphi_k(x)) \to 0$ у $V(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi_k \to 0$ у $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ($k \to \infty$).

Композицією узагальнених функцій $F \in V'$ та f називається ([13]) узагальнена функція $Fof \in \mathcal{D}'$, визначена за правилом

$$(Fof, \varphi) = (F(y), (f(x,y), \varphi(x))) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Якщо $f(x,y) = f_1(x-y)$, то $Fof = F * f$, тому Fof має багато властивостей згортки.

Зауважимо таке: якщо $f(x,y) = 0$ при $x < 0$, тобто належить простору $\mathcal{D}'_+$ як функція першого аргументу, то також $Fof \in V'_+(\mathbb{R}) = V'(\mathbb{R}) \cap D'_+(\mathbb{R})$.

1.3 Узагальнений розв'язок диференціального рівняння, його властивості. Фундаментальний розв'язок

Нехай

$$P(x,D)=\sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x)D^\gamma$$

— лінійний диференціальний вираз порядку m, $a_\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\gamma|\le m$.

Розв'язком диференціального рівняння

$$P(x,D)u=f(x), \qquad f\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (*узагальненим розв'язком рівняння*) називається узагальнена функція $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, що задовольняє тотожність

$$(P(x,D)u,\varphi)=(f,\varphi) \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

тобто

$$(u,P^*(x,D)\varphi)=(f,\varphi) \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.4}$$

де $P^*(x,D)$ — формально спряжений вираз до $P(x,D)$:

$(P(x,D)u,\varphi)=(u,P^*(x,D)\varphi)$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Використовуючи означення основних операцій у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, знаходимо

$$P^*(x,D)\varphi=\sum_{|\gamma|\le m}(-1)^{|\gamma|}D^\gamma(a_\gamma\varphi).$$

За означенням (1.4) значення узагальненого розв'язку u задано на множині

$$\{\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n):\psi(x)=P^*(x,D)\varphi(x),\text{ де } \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Щоб розв'язати рівняння, треба продовжити функціонал із цієї множини на весь простір $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Класичним (або регулярним) розв'язком диференціального рівняння (1.3) називається функція $u\in C^m(\mathbb{R}^n)$, яка задовольняє тотожність

$$P(x,D)u(x)\equiv f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Зрозуміло, для цього необхідно, щоб $f\in C(\mathbb{R}^n)$.

Кожний класичний розв'язок диференціального рівняння (1.3) є його узагальненим розв'язком. Якщо $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \cap C^m(\mathbb{R}^n)$ *та є узагальненим розв'язком рівняння (1.3), то* u *— класичний розв'язок рівняння (1.3).*

Перше твердження очевидне. Якщо ж u є узагальненим розв'язком рівняння (1.3), то

$$(P(\cdot, D)u - f, \varphi) = 0 \text{ для довільної } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$

За умов теореми

$$P(\cdot, D)u - f \in C(\mathbb{R}^n) \subset L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Тоді за лемою Дюбуа-Реймона

$$P(x, D)u(x) - f(x) = 0 \text{ майже всюди в } \mathbb{R}^n\,,$$

а позаяк $P(\cdot, D)u - f \in C(\mathbb{R}^n)$, то $P(x, D)u(x) - f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Відомо, що

лінійні нормальні звичайні однорідні диференціальні рівняння (з нескінченно диференційовними коефіцієнтами) у просторі узагальнених функцій не мають інших розв'язків, крім класичних.

Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними (навіть із нескінченно диференційовними коефіцієнтами) можуть мати сингулярні розв'язки у просторі узагальнених функцій.

Фундаментальною функцією диференціального оператора $P(x, D)$ називається розв'язок $\omega(x, y)$ у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ рівняння

$$P(x, D)\omega(x, y) = \delta(x - y), \qquad y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Його ще називають *фундаментальним розв'язком* цього рівняння.

Зауважимо, що фундаментальний розв'язок визначається неоднозначно.

Якщо ω — фундаментальний розв'язок рівняння (1.5), ω_0 — розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння, то $\omega + \omega_0$ — також фундаментальний розв'язок рівняння (1.5):

$$P(x, D)(\omega(x, y) + \omega_0(x, y)) = P(x, D)\omega(x, y) + P(x, D)\omega_0(x, y) = \delta(x - y)\,.$$

Якщо коефіцієнти рівняння сталі, то диференціальний оператор позначатимемо $P(D)$. Якщо $\omega(x)$ — розв'язок рівняння

$$P(D)\omega = \delta(x), \tag{1.6}$$

то $\omega(x-y)$ – розв'язок рівняння

$$P(D)\omega = \delta(x-y).$$

Тому фундаментальною функцією диференціального оператора $P(D)$ зі сталими коефіцієнтами називають узагальнений розв'язок рівняння (1.6).

Теорема 3. *Для нетривіального диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами фундаментальна функція існує.*

Ця дуже загальна та важлива теорема, оригінальні доведення Хермандером (також Мальгранжем) за допомогою перетворення Фур'є наведені у [**??**] та інших підручниках. Вона поширена на окремі класи рівнянь зі змінними гладкими коефіцієнтами. Я.Б. Лопатинському [11] належить поширення теореми на рівняння та системи рівнянь зі змінними гладкими коефіцієнтами еліптичного типу (див. також [2]), С.Д. Ейдельману [34] — на рівняння та системи рівнянь параболічного типу.

Важливе значення фундаментальної функції диференціального оператора видно з такої теореми.

Теорема 4. *Нехай* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ω *— фундаментальна функція диференціального оператора* $P(D)$ *та існує згортка* $\omega * f$. *Тоді функція*

$$u = \omega * f$$

є розв'язком рівняння

$$P(D)u = f.$$

Розв'язок єдиний у класі $\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \text{ існує } \omega * u\}$.

Доведення. За лінійністю та правилом диференціювання згортки одержуємо

$$P(D)(\omega * f) = \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma D^\gamma(\omega * f) = \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma (D^\gamma \omega * f) =$$
$$= (\sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma D^\gamma \omega) * f = (P(D)\omega) * f = \delta * f = f.$$

Якщо є два розв'язки u_1, u_2, $u = u_1 - u_2$, то $P(D)u = 0$, і тоді

$$u = \delta * u = (P(D)\omega) * u = P(D)(\omega * u) = \omega * (P(D)u) = \omega * 0 = 0.$$

Згортки з фундаментальною функцією називаються *потенціалами*.

Теоерема 4 поширюється на лінійні рівняння з дробовими похідними, а за допомогою операції композиції узагальнених функцій замість операції згортки на рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Фундаментальну функцію звичайного лінійного диференціального оператора

$$P(x,\frac{d}{dx})=\sum_{k=0}^{m}a_k(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}},\quad a_k\in C^\infty(\mathbb{R}),\quad a_0(x)\neq 0$$

можна будувати *методом варіації сталих*, тобто у вигляді

$$u=\sum_{j=1}^{m}C_j(x)u_j(x), \tag{1.7}$$

де $u_1(x),\ldots,u_m(x)$ — лінійно незалежні розв'язки відповідного лінійного однорідного рівняння

$$P(x,\frac{d}{dx})u=0, \tag{1.8}$$

$C_1(x),\ldots,C_m(x)$ — невідомі узагальнені функції. Оскільки $u_j\in C^\infty(\mathbb{R})$, то функція (1.7) визначена. Для знаходження невідомих $C_1'(x),\ldots,C_m'(x)$ одержуємо систему

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}C_j'(x)u_j(x)=0\\
&\sum_{j=1}^{m}C_j'(x)u_j'(x)=0\\
&\ldots\\
&\sum_{j=1}^{m}C_j'(x)u_j^{(m-2)}(x)=0\\
&\sum_{j=1}^{m}C_j'(x)u_j^{(m-1)}(x)=\tfrac{f(x)}{a_0(x)}
\end{aligned}$$

із відмінним від нуля визначником Вронського.

У випадку сталих коефіцієнтів a_k доцільно шукати фундаментальну функцію оператора $P(\frac{d}{dx})$ у вигляді

$$\omega(x)=\theta(x)u(x), \tag{1.9}$$

де $u(x)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned}
&P(\tfrac{d}{dx})u(x)=0,\\
&u(0)=0,u'(0)=0,\ldots,u^{(m-2)}(0)=0,u^{(m-1)}(0)=a_0^{-1}.
\end{aligned}$$

У цьому підрозділі шукаємо "головні"фундаментальні функції, тобто без доданка, що є розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння.

З'ясуємо, що функція (1.9) є фундаментальною функцією оператора $P(\frac{d}{dx})$. Обчислюємо

$\omega'(x) = \theta'(x)u(x) + \theta(x)u'(x) = \delta(x)u(x) + \theta(x)u'(x) = \delta(x)u(0) + \theta(x)u'(x) = \theta(x)u'(x)$,

$\omega''(x) = (\theta(x)u'(x))' = \theta'(x)u'(x) + \theta(x)u''(x) = \delta(x)u'(x) + \theta(x)u''(x) = \delta(x)u'(0) + \theta(x)u''(x) = \theta(x)u''(x)$,

$\omega^{(l)}(x) = \theta(x)u^{(l)}(x)$, $l \leq m-1$,

$\omega^{(m)}(x) = \delta(x)u^{(m-1)}(0) + \theta(x)u^{(m)}(x) = \delta(x)a_0^{-1} + \theta(x)u^{(m)}(x)$.

Підставляючи обчислені похідні у рівняння, отримаємо

$P(\frac{d}{dx})\omega(x) = \delta(x) + \theta(x)P(\frac{d}{dx})u(x) = \delta(x)$.

Приклади:

1) Розв'яжемо рівняння

$$\omega' + a^2\omega = \delta(x).$$

Його розв'язок (фундаментальну функцію) шукаємо у вигляді (1.9). Для u одержали задачу Коші

$$u' + a^2u = 0, \qquad u(0) = 1.$$

Загальний розв'язок рівняння $u(x) = Ce^{-a^2x}$ (C — довільна стала). З початкової умови $C = 1$. Отже, $\omega(x) = \theta(x)e^{-a^2x}$.

2) Розв'яжемо рівняння $\omega'' + a^2\omega = \delta(x)$. Його розв'язок (фундаментальну функцію) шукаємо у вигляді (1.9). Для u отримаємо задачу Коші

$$u'' + a^2u = 0, \qquad u(0) = 0, u'(0) = 1.$$

Загальний розв'язок рівняння $u(x) = C_1\cos(ax) + C_2\sin(ax)$ (C_1, C_2 — довільні сталі). З початкових умов $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{a}$. Отже,

$$\omega(x) = \frac{\theta(x)\sin(ax)}{a}.$$

3) Якщо розглянути електричне коло з послідовно включеними опором R, індуктивністю провідника L і ємністю C, то при включенні в момент $t = 0$ сталої напруги величини E_0 сила струму $I(t)$ задовольняє рівняння

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\delta(t).$$

Розв'язати рівняння.

Ефективними для побудови фундаментальних функцій операторів із частинними похідними є інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа [42]. Покажемо це у розділі 3.

1.4 Алгебра згортки $\mathcal{D}'_+$ і дробове диференціювання

Нехай $D'_+(\mathbb{R}) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$.

Це простір узагальнених функцій з носіями на $[0, \infty)$.

Якщо $f \in D'_+(\mathbb{R})$, то $f' \in D'_+(\mathbb{R})$, $af \in D'_+(\mathbb{R})$ для довільної $a \in C^\infty$. Якщо $f_1, f_2 \in D'_+(\mathbb{R})$, то $C_1 f_1 + C_2 f_2 \in D'_+(\mathbb{R})$ для довільних чисел C_1, C_2.

Теорема 5. *Для $f \in \mathcal{D}'_+$ існує єдина первісна $u \in \mathcal{D}'_+$.*

Доведення. Якщо u_1, u_2— дві первісні з $\mathcal{D}'_+$, то $u_1 - u_2 = C \in \mathcal{D}'_+$, але C— стала. Отже, $C = 0$. Єдиність первісної з'ясовано. У [**??**] доведено, що узагальнена функція

$$(u, \varphi) = (f(x), -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\xi) d\xi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

є первісною функції f. Справді,

$$(u', \varphi) = -(u, \varphi') = (f(x), (\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\xi) d\xi)') = (f, \varphi).$$

Доведемо, що $u \in \mathcal{D}'_+$. Якщо $supp\varphi \subset (-\infty, 0)$, то також $supp\psi \subset (-\infty, 0)$, де $\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\xi) d\xi$. Тоді $(f, \psi) = 0$, звідки $(u, \varphi) = 0$.

Позаяк $\delta \in \mathcal{D}'_+$, то за теоремою 5 маємо єдиність фундаментального розв'язку звичайного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у просторі $\mathcal{D}'_+$.

Теорема 6. *Якщо $f, g \in \mathcal{D}'_+$, то існує $f * g \in \mathcal{D}'_+$. Згортка комутативна і асоціативна.*

Із врахуванням цієї теореми простір $D'_+(\mathbb{R})$ є комутативною та асоціативною алгеброю згортки (операцією "множення"елементів f, g є їхня згортка, одиничним елементом є δ-функція Дірака).

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(R)$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t) t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leq 0,$$

де $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція. Покажемо правильність таких співвідношень [3] (с. 87):

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}\,, \qquad f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}\,.$$

1) $\lambda > 0,\ \mu > 0\ => \ (f_\lambda * f_\mu)(t) = \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}(t^{\lambda-1} * t^{\mu-1}) =$

$= \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t \tau^{\lambda-1}(t-\tau)^{\mu-1}d\tau = \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} t^{\lambda+\mu-1} \int\limits_0^1 z^{\lambda-1}(1-z)^{\mu-1}dz =$

$= \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} t^{\lambda+\mu-1} B(\lambda,\mu) = \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} t^{\lambda+\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \frac{\theta(t)}{\Gamma(\lambda+\mu)} t^{\lambda+\mu-1} = f_{\lambda+\mu}\,,$

де $B(\lambda,\mu)$ – бета-функція;

2) $\lambda > 0,\ \mu < 0,\ \mu + k > 0\ =>$

$(f_\lambda * f_\mu)(t) = (f_\lambda * f^{(k)}_{\mu+k})(t) = (f_\lambda * f_{\mu+k})^{(k)}(t) = f^{(k)}_{\lambda+\mu+k}(t) = f_{\lambda+\mu}\,;$

інші випадки аналогічні.

Зауважимо, що

$$f_1(t) = \theta(t)\,,\ f_0(t) = \delta(t)\,,\ f_{-1}(t) = f_0'(t) = \delta'(t)\,,$$

$$f_{-n}(t) = f_0^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t)\ \text{ при }\ n \in \mathbb{N}\,,$$

а тоді

$$(f_{-n} * g)(t) = (\delta^{(n)} * g)(t) = g^{(n)}(t)\ \text{ для довільної }\ g \in \mathcal{D}'_+\,.$$

Враховуючи останній факт, можемо визначати *похідну дробового порядку* $\beta > 0$ (похідну Рімана-Ліувілля) функції $v \in \mathcal{D}'_+$ формулою

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t)\,,$$

зокрема, при $\beta \in (n-1,n)$ і регулярній v, враховуючи, що

$$f_{-\beta}(t) * v(t) = f^{(n)}_{n-\beta}(t) * v(t) = \big(f_{n-\beta}(t) * v(t)\big)^{(n)},$$

матимемо

$$v^{(\beta)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t f_{n-\beta}(t-\tau)v(\tau)d\tau,$$

можемо визначати *первісну дробового порядку* $\beta > 0$ функції $v \in \mathcal{D}'_+$

$$I_\beta(t) = f_\beta(t) * v(t)\,,$$

а при гладкій v з носієм на $[0,\infty)$ похідну Вейля $f_\beta(t)\widehat{*}v(t)$ порядку β

$$f_\beta(t)\widehat{*}v(t) = \int\limits_t^{+\infty} f_\beta(\tau - t)v(\tau)d\tau.$$

Зауважимо, що також

$$f_{-\beta}(t) * v(t) = f^{(n)}_{n-\beta}(t) * v(t) = f_{n-\beta}(t) * v^{(n)}(t),$$

а отже,

$$v^{(\beta)}(t) = f_{n-\beta}(t) * v^{(n)}(t),$$

де похідну розуміємо в узагальненому сенсі.

Похідну Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто (*регуляризовану дробову похідну*) порядку $\beta \in (n-1, n)$ визначають формулою

$$^{C}D^{\beta}v(t) = f_{n-\beta}(t) * \{v^{(n)}(t)\} = \int\limits_0^t f_{n-\beta}(t-\tau)\{v^{(n)}(\tau)\}d\tau\,.$$

Тут і далі через $\{v^{(n)}\}$ позначатимемо похідну функції v порядку n у класичному розумінні. Як бачимо, в означенні $^{C}D^{\beta}v$ при регулярній v відсутні сингулярні доданки з попередньої формули. Далі детальніше обгрунтуємо її назву – регуляризована дробова похідна.

Приклади:

$1^{(\beta)} = \theta^{(\beta)}(t) = f_{-\beta} * f_1(t) = f_{1-\beta}(t)$, але $^{C}D^{\beta}1 = 0$;

$I_\beta t_+^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\tau^\gamma d\tau = [\tau = tz] = \frac{t^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^1 (1-z)^{\beta-1}z^\gamma dz =$
$= \frac{t^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\beta)}B(\gamma+1,\beta) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\beta)}t^{\gamma+\beta},\ \ \beta > 0,\ \gamma > -1,\ t > 0\,.$

Зв'язок між похідними Рімана-Ліувіля і Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто:

1) $\beta \in (0,1)$ =>

$$\begin{aligned} v^{(\beta)}(t) &= f_{-\beta}(t) * v(t) = f'_{1-\beta}(t) * v(t) = \big(f_{1-\beta}(t) * v(t)\big)' = \\ &= f_{1-\beta}(t) * v'(t) = f_{1-\beta}(t) * [\{v'(t)\} + \delta(t)v(0)] \\ &= f_{1-\beta}(t) * \{v'(t)\} + f_{1-\beta}(t) * \delta(t)v(0) =^{C} D^{\beta}v(t) + f_{1-\beta}(t)v(0)\,; \end{aligned}$$

Згадаємо, що

$$^{C}D^{\beta}v(t) = f_{1-\beta}(t) * \{v'(t)\} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta}\{v'(\tau)\}d\tau\,.$$

Отже,

$$^{C}D^{\beta}v(t) = v^{(\beta)}(t) - f_{1-\beta}(t)v(0)\,.$$

2) $\beta \in (1,2)$ =>

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t) = f''{}_{2-\beta}(t) * v(t) =$$
$$= \big(f_{2-\beta}(t) * v(t)\big)'' = f_{2-\beta}(t) * v''(t) =$$
$$= f_{2-\beta}(t) * \Big(\{v'(t)\} + v(0)\delta(t)\Big)' =$$
$$= f_{2-\beta}(t) * \Big(\{v''(t)\} + v'(0)\delta(t) + v(0)\delta'(t)\Big) =$$
$$= f_{2-\beta}(t) * \{v''(t)\} + f_{2-\beta}(t)v'(0) + f'_{2-\beta}(t)v(0) =$$
$$= f_{2-\beta}(t) * \{v''(t)\} + f_{1-\beta}(t)v(0) + f_{2-\beta}(t)v'(0)\,;$$

Згадаємо, що

$$^{C}D^{\beta}v(t) = f_{2-\beta}(t) * \{v''(t)\} = \tfrac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\beta}\{v''(\tau)\}d\tau\,.$$

Отже,

$$^{C}D^{\beta}v(t) = v^{(\beta)}(t) - f_{1-\beta}(t)v(0) - f_{2-\beta}(t)v'(0)\,.$$

3) Ясно, що

$$(I_\beta v(t))^{(\beta)} = f_{-\beta}(t) * \big(f_\beta(t) * v(t)\big) = (f_{-\beta} * f_\beta)(t) * v(t) = v(t)\,,$$
$$I_\beta(v^{(\beta)}(t)) = f_\beta(t) * \big(f_{-\beta}(t) * v(t)\big) = (f_\beta * f_{-\beta})(t) * v(t) = v(t)\,.$$

Показати, що при $\beta \in (0,1)$

$$^{C}D^{\beta}(I_\beta v(t)) = v(t), \quad I_\beta(^{C}D^{\beta}v(t)) = v(t) - v(0)$$

(аналог $\frac{d}{dt}\int\limits_0^t v(\tau)d\tau = v(t)\,,\ \int\limits_0^t v'(\tau)d\tau = v(t) - v(0)$).

4) Аналог формули Гріна (формула інтегрування частинами): при $\beta \in (0,1)$ за умови $v(t) = 0$ при $t \ge T$ маємо

$$\int\limits_0^T {}^{C}D^{\beta}u\, v dt = \int\limits_0^T [u^{(\beta)} - f_{1-\beta}(t)u(0)]\, v dt =$$
$$= \int\limits_0^T (f_{1-\beta} * u)'(t)v(t)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= (f_{1-\beta} * u)(t)v(t)|_0^T - \int\limits_0^T (f_{1-\beta} * u)(t)v'(t)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= -\int\limits_0^T \Big(\tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^\tau (t-\tau)^{-\beta}u(\tau)d\tau\Big)v'(t)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= -\int\limits_0^T \Big(\tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_\tau^T (t-\tau)^{-\beta}v'(t)dt\Big)u(\tau)d\tau - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= -\int\limits_0^T \Big(\tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^{T-\tau} s^{-\beta}v'(s+\tau)ds\Big)u(\tau)d\tau - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$

$$= -\int\limits_0^T u(\tau)\big(f_{1-\beta}\widehat{*}v')(\tau)\big)d\tau - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T u(\tau)\big(f'_{1-\beta}\widehat{*}v)(\tau)\big)d\tau - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T u(t)\big(f_{-\beta}\widehat{*}v)(t)\big)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt\,,$$

а отже,

$$\int\limits_0^T {}^C D^\beta u\; vdt = \int\limits_0^T u\big(f_{-\beta}\widehat{*}v\big)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)u(0)v(t)dt\,.$$

Примітка:

$$\int\limits_0^T u^{(\beta)}\; vdt = \int\limits_0^T u\big(f_{-\beta}\widehat{*}v\big)dt,$$

тобто

$$\int\limits_0^T (f_{-\beta} * u)\; vdt = \int\limits_0^T u\big(f_{-\beta}\widehat{*}v\big)dt,$$

також

$$u^{(\beta)} = \frac{d^n}{dx^n}\big(I_{n-\beta}u\big).$$

Приклади: Обчислимо

1) $(x_+)^{(2/3)} = f_{-2/3}(x) * x_+ = f_{-2/3}(x) * f_2(x) = f_{2-\frac{2}{3}}(x) = f_{4/3}(x)\,;$

2) $g^{(1/4)}(x) = f_{-1/4}(x) * g(x) = f'_{5/4}(x) * g(x) = f_{5/4}(x) * g'(x) =$
$(f_{5/4} * g)'(x)\,;$

3) ${}^C D^{1/2}g(x) = g^{(1/2)}(x) - f_{1-\frac{1}{2}}(x)g(0) = (f_{-1/2} * g)(x) - f_{1/2}(x)g(0) =$
$= (f_{1/2} * g)'(x) - f_{1/2}(x)g(0)$, зокрема,
${}^C D^{1/2}x_+ = (f_{1/2} * x_+)'(x) = (f_{1/2} * f_2)'(x) = f'_{5/2}(x) = f_{3/2}(x)\,.$

Дробове інтегрування і диференціювання від звичайних функцій можна поширити і на безмежний проміжок, накладаючи вимогу збіжності невласних інтегралів, а саме,

$$(I_\beta u)(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)^{\beta-1}dy$$

або

$$(I_\beta u)(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{x}^{+\infty} f(y)(x-y)^{\beta-1}dy.$$

Ці інтеграли й похідні використовують у теорії розподілів випадкової величини. Нагадаємо, що функцією розподілу випадкової величини називають обмежену неспадну неперервну зліва функцію $F(x)$, таку що

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x)=1,\ \lim_{x\to z-0} F(x)=F(z).$$

Ймовірнісною мірою випадкової величини ξ є $P(\xi<x)=F(x)$. Якщо вона абсолютно неперервна за Лебегом, то існує функція густини $p(x)$ така, що

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy=1-\int\limits_{x}^{+\infty} p(y)dy,$$

(враховано, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(y)dy=1$).

Можна для функції густини з носієм на відрізку $[a,b]$ визначити функцію розподілу формулою

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ (I_\beta p)(x), & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

і навпаки, якщо функція розподілу $F(x)$ відома, то $p(x)=F^{(\beta)}(x)$.

Дробове диференціювання і дробові простори Соболєва.

Ми знаємо, що простори Соболєва (простори беселевих потенціалів [25] (с. 79) при $p>1$) для довільного $s\in\mathbb{R}$ визначаються так:

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=\left\{v\in S'(\mathbb{R}^n):\|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}=\left\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}v]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}<\infty\right\},$$

а для обмежених областей за допомогою операції їх звуження на область. Можна ці простори на інтервалі визначати за допомогою похідних дробового порядку [33].

Контрольні запитання.

1. Дати означення згортки звичайних функцій.
2. Сформулювати достатні умови існування згортки звичайних функцій.
3. Дати означення згортки узагальнених функцій.
4. Які достатні умови існування згортки узагальнених функцій?
5. Чому простір $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ є алгеброю?
6. Які є оператори дробового диференціювання та інтегрування, які їхні основні властивості?

7. Дати означення похідної Рімана-Ліувіля дробового порядку $\beta > 0$. Записати через інтеграл для регулярної функції при $\beta \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$.

8. Дати означення похідної Джрбашяна-Капуто дробового порядку $\beta > 0$. Записати через інтеграл для регулярної функції при $\beta \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$.

9. Який зв'язок між похідними Рімана-Ліувіля і Джрбашяна-Капуто дробового порядку $\beta \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$?

10. Вивести формулу інтегрування частинами для похідних дробового порядку

$$\int_0^T {}^C D^\beta u \, v dt = \int_0^T u\big(f_{-\beta} \widehat{*} v\big) dt -$$
$$- \int_0^T f_{1-\beta}(t) u(0) v(t) dt - \int_0^T f_{2-\beta}(t) u'(0) v(t) dt \, .$$

Вправи. Показати, що:

1) $x_+^a * x_+^b = x_+^{a+b+1} B(a+1, b+1) \quad (x_+^a = \theta(x) x^a)$;
2) $e^{ax} f(x) * e^{ax} g(x) = e^{ax} (f * g)(x)$, $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}) \cap D'_+$;
3) $\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(m)}(x-b) = \delta^{(k+m)}(x-a-b)$;
4) $\sin x_+ * \cos x_+ = \frac{1}{2} x_+ \sin x_+$;
5) $\sin x_+ * \sin x_+ = \frac{1}{2} x_+ \cos x_+$;
6) $\frac{a\pi}{x^2+a^2} * \frac{b\pi}{x^2+b^2} = \frac{(a+b)\pi}{x^2+(a+b)^2}$;
7) $f_a(x) e^{cx} * f_b(x) e^{cx} = f_{a+b}(x) e^{cx}$;
8) $\big(f(x) \cdot \delta(t)\big) * g(x,t) = f(x) * g(x,t)$ (f, g –узагальнені функції);
9) $\big(f(x) \cdot \delta'(t)\big) * g(x,t) = f(x) * \frac{\partial}{\partial t} g(x,t)$.

Знайти:

1) $f(x) * \delta'(x - x_0)$;
2) $x_+ * \delta'(x)$;
3) $f(x) * \delta_S(x)$ при $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$;
4) $f(x) * e^{-a|x|^2}$, $a = const$.

Розділ 2

РІВНЯННЯ ЗІ ЗВИЧАЙНИМИ ПОХІДНИМИ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ

2.1 Рівняння у згортках

Це рівняння вигляду

$$a * u = f, \tag{2.1}$$

де $a, f \in \mathcal{D}'_+$ — задані узагальнені функції. Його розв'язок шукаємо в алгебрі $\mathcal{D}'_+$.

У вигляді (2.1) можна записати всі звичайні лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k=0}^{m} a_k u^{(m-k)} = f(x)$$

при $a(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \delta^{(m-k)}(x), \qquad (a * u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^{(m-k)}(x)\,,$

лінійні рівняння з дробовими похідними

$$\sum_{k=0}^{m} a_k u^{(\alpha_k)} = f(x)$$

при $a(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k f_{-\alpha_k}\,,\ (a * u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k (f_{-\alpha_k} * u)(x)\,,$

лінійні рівняння з запізненнями

$$\sum_{k=0}^{m} a_k u(x - x_k) = f(x)$$

при $a(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k\delta(x - x_k)$, $\qquad (a * u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u(x - x_k)$,

лінійні інтегральні рівняння Вольтерри:

першого роду

$$\int\limits_0^x a(x-y)u(y)dy = f(x)$$

при $a \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$, $\qquad (a * u)(x) = \int\limits_0^x a(x-y)u(y)dy$,

другого роду

$$u(x) + \int\limits_0^x g(x-y)u(y)dy = f(x)$$

при $a(x) = \delta(x) + g(x)$, $\quad a, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$, $(a*u)(x) = u(x) + \int\limits_0^x g(x-y)u(y)dy$,

лінійні інтегро-диференціальні рівняння та ін.

Розв'язок $u \in \mathcal{D}'_+$ рівняння (2.1) при $f = \delta$ називається *фундаментальною функцією* оператора $a*$ і позначається $\omega = a^{-1}$. Це обернений елемент до a в алгебрі $\mathcal{D}'_+$ ($a * a^{-1} = a^{-1} * a = \delta$).

Теорема 1. *Якщо $a, f \in \mathcal{D}'_+$, то існує єдиний розв'язок $u = a^{-1} * f$ рівняння (2.1).*

Доведення. За властивостями згорток

$$a * (a^{-1} * f) = (a * a^{-1}) * f = \delta * f = f\,.$$

Якщо є два розв'язки u_1, u_2 рівняння (2.1), то $u = u_1 - u_2$ задовольняє рівняння

$$a * u = 0\,.$$

Тоді

$$u = \delta * u = (a * a^{-1}) * u = (a^{-1} * a) * u = a^{-1} * (a * u) = a^{-1} * 0 = 0.$$

Приклад фундаментальної функції для рівняння у згортках:

при $a(x) = f_\beta(x)$ (функція визначена у розділі 1) із співвідношень

$$f_\beta(x) * f_\gamma(x) = f_{\beta+\gamma}(x)\,,\ f_0 = \delta\,, \text{ а отже, } f_\beta(x) * f_{-\beta}(x) = \delta\,,$$

знаходимо $a^{-1} = f_{-\beta}(x)$.

Відоме рівняння Абеля

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{-\gamma} u(\xi) d\xi = g(x), \quad \gamma \in (0,1),$$

яке є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри першого роду з різницевим полярним ядром, записуємо у вигляді рівняння у згортках

$$\Gamma(1-\gamma) f_{1-\gamma}(x) * u(x) = g(x).$$

Фундаментальною функцією є $\omega(x) = \frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)}$. За доведеною теоремою 1 знаходимо єдиний розв'язок рівняння Абеля

$$u(x) = \frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)} * g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} f'_\gamma(x) * g(x),$$

який за умов $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $g(0) = 0$ є класичним

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} f_\gamma(x) * g'(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^x (x-\xi)^{\gamma-1} g'(\xi) d\xi.$$

При побудові фундаментальних функцій та розв'язанні рівнянь у згортках доцільно використовувати перетворення Лапласа.

Лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з різницевим полярним ядром

$$u(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^x (x-\xi)^{\gamma-1} u(\xi) d\xi = g(x), \quad \gamma > 0, \tag{2.2}$$

яке також можна записати у вигляді рівняння у згортках

$$u(x) - \lambda f_\gamma(x) * u(x) = g(x),$$

можна розв'язати методом послідовних наближень:

$u_0(x) = g(x)$,

$u_k(x) = \lambda\ f_\gamma(x) * u_{k-1}(x) + g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

Знаходимо

$u_1(x) = \lambda f_\gamma(x) * g(x) + g(x)$,

$u_2(x) = \lambda f_\gamma(x) * u_1(x) + g(x) =$

$$= \lambda f_\gamma(x) * \big[\lambda f_\gamma(x) * g(x) + g(x)\big] + g(x) =$$

$$= \lambda^2 f_{2\gamma}(x) * g(x) + \lambda f_\gamma(x) * g(x) + g(x)$$

і за методом математичної індукції одержуємо

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f_{k\gamma}(x) * g(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \tfrac{x^{k\gamma-1}}{\Gamma(k\gamma)} * g(x) + g(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \tfrac{x^{k\gamma+\gamma-1}}{\Gamma(k\gamma+\gamma)} * g(x) + g(x) =$$

$$= x^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{[\lambda x^\gamma]^k}{\Gamma(k\gamma+\gamma)} * g(x) + g(x) =$$

$$= \lambda x^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(\lambda x^\gamma) * g(x) + g(x)\,,$$

де

$$E_{\beta,\gamma}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\gamma)}, \quad \beta > 0$$

— функція Міттаг-Лефлера [8].

Отже, розв'язок рівняння (2.2) має вигляд

$$u(x) = \lambda x^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(\lambda x^\gamma) * g(x) + g(x). \tag{2.3}$$

Відзначимо деякі співвідношення для функцій Міттаг-Лефлера:

$$E_{1,1} = e^z\,,\ E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\,;$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \tfrac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z)\,;$$

$$\tfrac{d^m}{dz^m}[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha), \ \ \beta - m > 0\,;$$

$$\tfrac{d^m}{dz^m}[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-kz^\alpha)] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta}(-kz^\alpha), \ \ \beta - m > 0\,,$$
$$\alpha \in (0,2),\ z > 0,\ k > 0\,;$$

$$\tfrac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = \tfrac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z}\,;$$

$|E_{\alpha,\beta}(z)| \le \tfrac{C}{1+|z|},\ \alpha \in (0,2), \mu \le |arg(z)| \le \pi$, де $\mu \in [\tfrac{\pi\alpha}{2}, min\{\pi, \pi\alpha\}]$;

$$E_{\alpha,\alpha}(-z) < \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha \in (1,2), \quad z > 0\,.$$

2.2 Розв'язки лінійних рівнянь із дробовими похідними

1. Рівняння

$$\omega^{(\beta)}(x) + \lambda\omega(x) = \delta(x), \tag{2.4}$$

можна розв'язати методом послідовних наближень. Але записавши його у вигляді

$$f_{-\beta}(x) * \omega(x) + \lambda\omega(x) = \delta(x) \;\; <=>$$

$$\omega(x) = -\lambda(f_\beta * \omega)(x) + f_\beta(x), \tag{2.5}$$

одержуємо рівняння вигляду (2.2). За формулою (2.3) знаходимо його розв'язок

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= -\lambda x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^\beta) * f_\beta(x) + f_\beta(x) = \\
&= -\lambda x^{\beta-1}\sum_{p=0}^{\infty}\tfrac{(-\lambda x^\beta)^p}{\Gamma(p\beta+\beta)} * f_\beta(x) + f_\beta(x) = \\
&= -\lambda \sum_{p=0}^{\infty}\tfrac{(-\lambda)^p x^{p\beta+\beta-1}}{\Gamma(p\beta+\beta)} * f_\beta(x) + f_\beta(x) = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda)^{p+1} f_{(p+1)\beta}(x) * f_\beta(x) + f_\beta(x) = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda)^{p+1} f_{(p+2)\beta}(x) + f_\beta(x) = \\
&= f_\beta(x) + \sum_{m=1}^{\infty}(-\lambda)^m f_{(m+1)\beta}(x) = \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1} + \sum_{m=1}^{\infty}\tfrac{(-\lambda)^m x^{m\beta+\beta-1}}{\Gamma(m\beta+\beta)} = x^{\beta-1}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{(-\lambda)^m x^{m\beta}}{\Gamma(m\beta+\beta)},
\end{aligned}$$

а отже,

$$\omega(x) = \theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^\beta) \tag{2.6}$$

– розв'язок рівняння (2.4) (фундаментальний розв'язок), а розв'язок рівняння

$$u^{(\beta)}(x) + \lambda u(x) = g(x) \tag{2.7}$$

матиме вигляд

$$u(x) = \theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^\beta) * g(x). \tag{2.8}$$

Приклад: Розв'яжемо рівняння

$$u(x) + 2\int_0^x (x-t)^{1/3}u(t)dt = f(x)\,.$$

Запишемо його у вигляді

$$u(x) + 2\Gamma(4/3)\big(f_{4/3} * u\big)(x) = f(x)\,.$$

Діючи на нього оператором $f_{-4/3}*$ і використовуючи, що $f_{-4/3} * f_{4/3} = \delta$ і $\delta * g = g$, одержуємо

$$(f_{-4/3} * u)(x) + 2\Gamma(4/3)u(x) = (f_{-4/3} * f)(x)$$
$$<=> \ u^{(4/3)} + 2\Gamma(4/3)u(x) = (f_{-4/3} * f)(x)\,.$$

Це рівняння вигляду (2.7). Його розв'язок знаходимо за формулою (2.8)

$$u(x) = [\theta(x)x^{1/3}E_{4/3,4/3}(-2\Gamma(4/3)x^{4/3})] * f_{-4/3}(x) * f(x)\,.$$

2. Рівняння

$$^{C}D^{\beta}u(x) + \lambda u(x) = \delta(x) \tag{2.9}$$

при $\beta \in (0,1)$ запишемо як

$$u^{(\beta)}(x) + \lambda u(x) = \delta(x) + f_{1-\beta}(x)u(0).$$

Тоді, за доведеним, його розв'язок

$$u(x) = \theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^{\beta}) * [\delta(x) + f_{1-\beta}(x)u(0)]\,,$$
$$\theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^{\beta}) * f_{1-\beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda)^m x^{m\beta+\beta-1}}{\Gamma(m\beta+\beta)} * f_{1-\beta}(x) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-\lambda)^m f_{m\beta+\beta}(x) * f_{1-\beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-\lambda)^m f_{m\beta+1}(x) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda)^m x^{m\beta}}{\Gamma(m\beta+1)} = \theta(x)E_{\beta,1}(-\lambda x^{\beta})\,.$$

Отже, розв'язок рівняння (2.9)

$$u(x) = \theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^{\beta}) + \theta(x)E_{\beta,1}(-\lambda x^{\beta})u(0),$$

а для задачі Коші

$$^{C}D^{\beta}u(x) + \lambda u(x) = g(x), \;\; u(0) = u_0 \tag{2.10}$$

матимемо

$$u(x) = \theta(x)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda x^{\beta}) * g(x) + \theta(x)E_{\beta,1}(-\lambda x^{\beta})u_0.$$

3. Покажемо, що *при* $\beta \in (1,2)$ *множина всіх розв'язків рівняння*

$$^{C}D^{\beta}u + \lambda u = 0 \tag{2.11}$$

описується формулою

$$u(t) = C_1 E_{\beta,1}(-\lambda t^\beta) + C_2 t E_{\beta,2}(-\lambda t^\beta), \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Використовуючи зв'язок між похідними дробового порядку Джрбашяна-Капуто і Рімана-Ліувілля, записуємо рівняння (2.11) у вигляді

$$f_{-\beta} * u + \lambda u = f_{1-\beta} u(0) + f_{2-\beta} u'(0).$$

Застосовуючи до обох частин цього рівняння оператор $f_\beta *$, одержуємо еквівалентне рівнянню (2.11) рівняння

$$u + \lambda f_\beta * u = f_1 u(0) + f_2 u'(0), \quad t \geq 0, \tag{2.13}$$

а саме

$$u(t) = -\lambda \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(\tau) d\tau + u(0) f_1(t) + u'(0) f_2(t).$$

Одержане інтегральне рівняння Вольтерри другого роду має вигляд (2.2) і за формулою (2.3) знаходимо його розв'язок

$$u(t) = \theta(t) t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\lambda t^\beta) * g(t),$$

де $g(t) = f_1(t)u(0) + f_2(t)u'(0)$. Залишилось знайти згортку.

Можна незалежно знайти розв'язок методом послідовних наближень:

$u^0(t) = u(0)\theta(t) + u'(0)t\theta(t) = u(0)f_1(t) + u'(0)f_2(t)$,

$u^{j+1}(t) = u^0(t) - \lambda f_\beta(t) * u^j(t)$, $j \in \mathcal{Z}_+$. Знаходимо

$$u(t) = u(0) \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^p f_{p\beta+1}(t) + u'(0) \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^p f_{p\beta+2}(t) =$$

$$= u(0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p t^{p\beta}}{\Gamma(p\beta+1)} + u'(0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^p t^{p\beta+1}}{\Gamma(p\beta+2)} =$$

$$= u(0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\beta)^p}{\Gamma(p\beta+1)} + u'(0) t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\beta)^p}{\Gamma(p\beta+2)}.$$

Одержана функція має вигляд (2.12) при $C_1 = u(0)$, $C_2 = u'(0)$.

Зауважимо, що множина всіх розв'язків рівняння (2.11) при $\beta \in (0,1]$ має вигляд

$$u(t) = C_1 E_{\beta,1}(-\lambda t^\beta)\,, \quad t \geq 0\,, \text{ де } C_1 \text{ – довільна стала.}$$

4. Розглянемо найпростіші застосування.

Розглянуте лінійне однорідне рівняння є окремим випадком рівняння ядерного розпаду

$$^{C}D^\beta u + a(t)u = 0,$$

це різновид дробових диференціальних рівнянь Ріккаті. Тут $u(t)$ – кількість радіонуклідів, наявних у радіоактивному середовищі. Розв'язання цієї форми рівнянь надзвичайно важливе через його застосування в галузі ядерної енергетики.

Модель Харрода-Домара динаміки доходу $Y(t)$ з урахуванням інвестицій $U(t)$ при споживанні $C(t)$, $Y(t) = C(t) + U(t)$.

Припущення:

1) $Y'(t) = kU(t)$ ($Y'(t)$ – темп доходу, k – коефіцієнт капіталовіддачі);
2) інвестиції миттєво переходять у приріст доходу.

Одержують рівняння

$$Y'(t) = k(Y(t) - C(t)). \tag{2.14}$$

Без припущення 2 буде рівняння

$$^{C}D^\beta Y(t) - kY(t) = -kC(t). \tag{2.15}$$

Модель Еванса встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару, $q(t)$ – попит на товар, $s(t)$ – пропозиція, $p(t)$ – ціна.

Припущення:

1) $q(t) = a - bp(t)$, $s(t) = c + dp(t)$, де a, b, c, d – сталі, $a > c$;
2) $p'(t) = k\big(q(t) - s(t)\big)$; звідки

$$p' = a_1 p + b_1\,,\ p(0) = p_0\,;$$

$\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ – рівноважна ціна, або коли $q(p) = s(p)$.

Цю модель також можна узагальнити, використавши рівняння

$$^{C}D^\beta p(t) - kp(t) = -ks(t). \tag{2.16}$$

При вивченні динамічних процесів так званої "довгої" пам'яті, керованої шумом Леві, виникає рівняння

$$u^{(\beta)} + Bu^{(\alpha)} + Cu = f(t), \tag{2.17}$$

де B, C – сталі, $\beta > \alpha$.

Його фундаментальний розв'язок [29]

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-C)^k}{k!} t^{\beta(k+1)-1} E^{(k)}_{\beta-\alpha,\beta+\alpha k}(-Bt^{\beta-\alpha}),$$

де

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!t^k}{j!\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)},$$

зокрема, при $C = 0$

$$\omega(t) = t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta}(-Bt^{\beta-\alpha}),$$

а при $B = 0, \beta = 1$ маємо $\omega(t) = e^{-Ct}$.

2.3 Інтегральні перетворення

Для побудови розв'язків рівнянь із дробовими похідними доцільно використовувати інтегральні перетворення: перетворення Лапласа для рівнянь зі звичайною дробовою похідною, перетворення Фур'є, або й обидва, для рівнянь із частинними похідними.

2.3.1 Перетворення Фур'є

У підрозділі 1.1 був введений функційний простір

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma \varphi(x)| < +\infty \quad \forall \beta, \gamma\}$$

і його топологія.

Простір $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $S(\mathbb{R}^n)$. Вважаємо, що $g_k \to 0$ у просторі S' при $k \to \infty$, якщо $(g_k, \psi) \to 0$ для довільної $\psi \in S$.

Прикладом регулярної узагальненої функції із S' є функціонал

$$g : (g, \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\sigma)\psi(\sigma) d\sigma \quad \forall \psi \in Z,$$

де $g(\sigma)$ росте не швидше полінома (такі функції називаються *повільно зростаючими на безмежності*).

Простір $S(\mathbb{R}^n)$ називається простором *швидко спадаючих на безмежності* гладких функцій, а простір $S'(\mathbb{R}^n)$ — простором *повільно зростаючих на безмежності* узагальнених функцій.

Нехай $i^2=-1$, $(x,s)=x_1s_1+\dots+x_ns_n$ — скалярний добуток векторів x та s, $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. Функція

$$\widehat{\varphi}(s)=\mathcal{F}[\varphi](s):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{i(x,s)}dx,\quad s=\sigma+\tau i\in\mathbb{C}^n \tag{2.18}$$

називається *перетворенням Фур'є* функції φ.

Властивості перетворення Фур'є функцій із $S(\mathbb{R}^n)$:

1) $\mathcal{F}[D^\gamma\varphi(x)](s)=(-is)^\gamma\mathcal{F}[\varphi],\quad s\in\mathbb{C}^n;$

2) $\mathcal{F}[(ix)^\gamma\varphi(x)](s)=D^\gamma\mathcal{F}[\varphi](s),\quad s\in\mathbb{C}^n;$

3) $\mathcal{F}[\varphi(x-x_0)]=\mathcal{F}[\varphi(x)]\cdot e^{i(x_0,s)};$

4) $\mathcal{F}[\varphi(x)\cdot e^{i(x,s_0)}]=\mathcal{F}[\varphi(x)](s+s_0);$

5) $\mathcal{F}[\varphi*\psi]=\mathcal{F}[\varphi]\cdot\mathcal{F}[\psi];$

6) $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\sigma)=\frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[\varphi](-\sigma).$

Перетворення Фур'є $\mathcal{F}:S\to S$.

Справді, інтеграл (2.18) існує та визначає неперервну функцію $\widehat{\varphi}(s)$. Покажемо, що *якщо* $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathcal{F}[\varphi]\in S(\mathbb{R}^n)$. Маємо

$$\sigma^\alpha D^\beta(\mathcal{F}[\varphi])=\sigma^\alpha\mathcal{F}[(ix)^\beta\varphi]=i^{|\alpha|}\mathcal{F}[D^\alpha\big((ix)^\beta\varphi\big)]=$$
$$=i^{|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^\alpha\big((ix)^\beta\varphi\big)e^{i(x,\sigma)}d\sigma\,.$$

Інтеграл у правій частині існує і є обмеженою функцією для всіх α,β. Отже, $\mathcal{F}[\varphi]\in S(\mathbb{R}^n)$.

Для довільних $f,\varphi\in S$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{i(x,\sigma)}dx\big)\varphi(\sigma)d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)\big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\sigma)e^{i(x,\sigma)}d\sigma\big)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

На базі цієї тотожності визначають перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in S'$.

Перетворенням Фур'є функції $f \in S'$ називається функція $g = \mathcal{F}[f] \in S'$, визначена рівністю

$$(\mathcal{F}[f], \varphi) = (f, \mathcal{F}[\varphi]) \qquad \forall \varphi \in S,$$

також визначаємо обернене перетворення Фур'є функції $g \in S'$:

$$(\mathcal{F}^{-1}[g], \psi) = (g, \mathcal{F}^{-1}[\psi]) \qquad \forall \psi \in S.$$

Введене перетворення Фур'є є лінійною й неперервною операцією. Для нього виконуються всі властивості, що й для перетворення Фур'є основних функцій. Наприклад, покажемо, що правильна властивість 1:

$$\mathcal{F}[D^\gamma f(x)](s) = (-is)^\gamma \mathcal{F}[f], \quad \forall f \in S'.$$

При $\varphi \in S$ маємо

$$\big(\mathcal{F}[D^\gamma f](s), \varphi(s)\big) = (D^\gamma f, \mathcal{F}[\varphi]) = (-1)^{|\gamma|}(f, D^\gamma \mathcal{F}[\varphi]) =$$
$$= (-1)^{|\gamma|}(f, \mathcal{F}[(is)^\gamma \varphi]) = (-1)^{|\gamma|}(\mathcal{F}[f], (is)^\gamma \varphi) = \big((-is)^\gamma \mathcal{F}[f](s), \varphi(s)\big).$$

Так само

$$\big(\mathcal{F}[(ix)^\gamma f(x)](s), \varphi(s)\big) = \big((ix)^\gamma f(x), \mathcal{F}[\varphi](x)\big) =$$
$$(-1)^{|\gamma|}\big((f(x), (ix)^\gamma \mathcal{F}[\varphi](x)\big) = (-1)^{|\gamma|}\big((f(x), D^\gamma \mathcal{F}[\varphi](x)\big) = (D^\gamma \mathcal{F}[f], \varphi),$$

а отже, правильна і властивість 2:

$$(\mathcal{F}[(ix)^\gamma f(x)], \varphi) = (D^\gamma \mathcal{F}[f], \varphi) \quad \forall f \in S'.$$

Також перетворення Фур'є згортки є добутком перетворень Фур'є його компонент,

$\mathcal{F}[\delta(x)] = 1$, $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n\, \delta(x)$, $\mathcal{F}[P(\frac{1}{x})] = -\pi i sgn(\sigma)$,

$\mathcal{F}[\frac{\theta(x) e^{-ax} x^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}] = \frac{1}{(a+is)^{\gamma+1}} := e^{-i(\gamma+1)\pi/2}(s - ia)^{-\gamma-1}$, $\gamma > -1$,

$\mathcal{F}[\theta(x)] = -\frac{i}{s-i0} = \pi\delta(s) - iP(\frac{1}{s})$, $\mathcal{F}[\theta(-x)] = \frac{i}{s+i0} = \pi\delta(s) + iP(\frac{1}{s})$,

$\mathcal{F}[sgn(x)] = \mathcal{F}[\theta(x) - \theta(-x)] = -2iP(\frac{1}{s})$.

Приклади:

1) $\mathcal{F}[10x - 2] = 10\mathcal{F}[x] - 2\mathcal{F}[1] = -i\mathcal{F}[ix \cdot 1] - 4\pi\delta(s) = -2\pi i\delta'(s) - 4\pi\delta(s)$;

2) $\mathcal{F}[\theta(1 - |x|) * e^{-|x|})] = \mathcal{F}[\theta(1 - |x|)]\, \mathcal{F}[e^{-|x|})] =$

$$= \int\limits_{-1}^{1} e^{ixs}dx \cdot [\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x+ixs}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x+ixs}dx] =$$
$$= \frac{e^{is}-e^{-is}}{is} \cdot [\frac{1}{1-is} + \frac{1}{1+is}] = \frac{2\sin(s)}{s} \cdot \frac{2}{1+s^2} = \frac{4\sin(s)}{s(1+s^2)}$$

(тут $\theta(a-|x|) = 1$ при $|x| < a$, $\theta(a-|x|) = 0$ поза $[-a, a]$).

3) $\mathcal{F}[sin(5x) * \delta'(x)] = \mathcal{F}[5cos(5x)] = \frac{5}{2}\mathcal{F}[e^{5ix} + e^{-5ix}] =$

$= \frac{5}{2}\{\mathcal{F}[e^{5ix}] + \mathcal{F}[e^{-5ix}]\} = \frac{5}{2}\{\mathcal{F}[1](s+5) + \mathcal{F}[1](s-5)\} =$

$= 5\pi\{\delta(s+5) + \delta(s-5)\}$;

4) знайдемо $\mathcal{F}[\delta_R(x)]$, де $\delta_R(x)$ – фінітна узагальнена функція з носієм на сфері $|x| = R$ в $\mathbb{R}^3$ ($(\delta_R, \varphi) = \int\limits_{|x|=R} \varphi(x)dS$):

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \int\limits_{|x|=R} e^{i(x,\xi)}dS = R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} e^{i|x||\xi|\cos\beta} \sin\beta d\beta =$$

$$= -2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} e^{iR|\xi|\cos\beta} d(\cos\beta) =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_{-1}^{1} e^{iR|\xi|\eta} d\eta = 2\pi R \frac{e^{iR|\xi|} - e^{-iR|\xi|}}{i|\xi|},$$

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \frac{4\pi R \sin(R|\xi|)}{|\xi|};$$

5) $\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\xi|^{\frac{n}{2}-1}} \int\limits_0^{\infty} g(r) r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)dr$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя 1-го роду порядку ν, зокрема,

$$\mathcal{F}[g(|x|)] = 2\int\limits_0^{\infty} g(r)\cos(r|\xi|)dr, \quad n = 1,$$
$$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} g(r) r J_0(r|\xi|)dr, \quad n = 2,$$
$$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^{\infty} g(r) r \sin(r|\xi|)dr, \quad n = 3,$$
$$\int\limits_0^{\infty} J_\nu(at) t^{\nu+1} e^{-p^2t^2} dt = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{a^2}{4p^2}};$$

6) використовуючи наведені формули перетворення Фур'є сферично-симетричних функцій, знаходимо

$$\mathcal{F}[e^{-p|x|}] = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right) \frac{p}{(p^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \,,$$

зокрема, $\mathcal{F}[e^{-|x|}] = \frac{2}{1+\xi^2}$ у випадку $n = 1$;

$$\frac{\mathcal{F}[|x|^p]}{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} = 2^{n+p} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{|\xi|^{-p-n}}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)} \,.$$

2.3.2 Перетворення Лапласа

Нехай $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $f(t) = 0$ при $t < 0$, $|f(t)| \leq Ae^{at}, \quad t \to \infty.$

Функція, яка має такі властивості, називається *оригіналом.*

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ або її *зображенням* називається функція

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} e^{-\omega t i} dt = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \qquad (2.19)$$

де $\mathcal{F}$ – оператор перетворення Фур'є і загалом $s = \sigma + \omega i$.

Позаяк $|e^{-\omega t i}| = 1$, $|f(t)e^{-\sigma t}| \leq Ae^{-(\sigma - a)t}, \quad t \to \infty$, то з умов на функцію $f(t)$ випливає існування інтеграла (2.19) для всіх $\sigma > a$, інтеграл рівномірно збігається на замкненій півплощині $\sigma \geq a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Запис $f(t) \to F(s)$ (або $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$) означатиме, що $F(s)$ є зображенням функції $f(t)$.

Якщо функція $F(s) = F(\sigma + \omega i)$ абсолютно інтегровна за $\omega \in \mathbb{R}$, то її оригінал (обернене перетворення Лапласа) визначається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{\sigma t} ds. \qquad (2.20)$$

Перевіримо, що $\theta(t)e^{-ht} \to \frac{1}{s+h}$ при $s + h > 0$. Маємо

$$\int_0^\infty e^{-ht} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(h+s)t} dt = -\tfrac{1}{h+s} e^{-(h+s)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \tfrac{1}{s+h}\,;\ \theta(t) \to \tfrac{1}{s}\,.$$

Перевіримо, що $\theta(t)\cos(ht) \to \frac{s}{s^2+h^2}$. Маємо

$$J = \int_0^\infty \cos(ht) e^{-st} dt = -\tfrac{1}{s} \cos(ht) e^{-st} dt \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \tfrac{h}{s} \int_0^\infty \sin(ht) e^{-st} dt =$$

$$= \tfrac{1}{s} + \tfrac{h}{s^2} \sin(ht) e^{-st} dt \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \tfrac{h^2}{s^2} J \,,$$

$$(1 + \tfrac{h^2}{s^2}) J = \tfrac{1}{s}\,,\ \ \tfrac{s^2+h^2}{s^2} J = \tfrac{1}{s}\,,\ \ J = \tfrac{s}{s^2+h^2}\,.$$

Отже, $\theta(t)\cos(ht) \to \frac{s}{s^2+h^2}$.

Подібно знаходимо, що $\theta(t)\sin(ht) \to \frac{h}{s^2+h^2}$.

Основні властивості перетворень Лапласа звичайних функцій:

1) $f^{(m)}(t) \to s^m F(s) - s^{m-1}f(0) - s^{m-2}f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0)$, $m = 0, 1, \ldots$ — перетворення Лапласа похідної; справді,

$$\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0);$$

наприклад,

$$\sin(ht) = -\tfrac{1}{h}(\cos(ht))' \to -\tfrac{1}{h}\big(sL[\cos(ht)] - 1\big) =$$
$$= -\tfrac{1}{h}\big(\tfrac{s^2}{s^2+h^2} - 1\big) = \tfrac{h}{s^2+h^2}, \text{ а отже, } \sin(ht) \to \tfrac{h}{s^2+h^2};$$

2) $(-t)^m f(t) \to F^{(m)}(s)$, $m = 0, 1, \ldots$ — диференціювання перетворення Лапласа; справді, $\int\limits_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt = F'(s)$;

3) $f(t)e^{ht} \to F(s-h)$ при $\sigma > a + Reh$ — зсув перетворення Лапласа;

4) $f(t-\tau) \to e^{-\tau s}F(s)$ ($\tau \geq 0$) — перетворення Лапласа зсуву;

5) $f(ct) \to \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$ ($c = const$) — перетворення Лапласа подібності;

6) якщо $f(t) \to F(s)$, $g(t) \to G(s)$, то

$(f * g)(t) \to F(s)G(s)$ — перетворення Лапласа згортки;

7) $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(s)}{s}$ — перетворення Лапласа первісної.

Наведемо ще деякі формули:

$$t^n e^{at} \ \to\ \tfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N};$$
$$tch(at) \ \to\ \tfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2};\ tsh(at) \ \to\ \tfrac{2as}{(s^2-a^2)^2};$$
$$tcos(at) \ \to\ \tfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2};\ tsin(at) \ \to\ \tfrac{2as}{(s^2+a^2)^2};$$
$$E_{\beta,1}(-at^\beta) \ \to\ \tfrac{s^{\beta-1}}{s^\beta+a};\ t^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(-at^\beta) \ \to\ \tfrac{s^{\beta-\gamma}}{s^\beta+a};$$
$$E_{\beta,\gamma}(t) \to \sum_{k=0}^\infty \tfrac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}\Gamma(\beta k+\gamma)}.$$

Формулу (2.19) можна використати і для означення перетворення Лапласа узагальненої функції.

Введемо функційні простори

$$S'_+ = \mathcal{D}'_+ \cap S',$$

$$\mathcal{D}'_+(a) = \{f \in \mathcal{D}'_+ : f(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'_+ \quad \forall \sigma > a\}.$$

Перетворенням Лапласа узагальненої функції $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ називається функція

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) := \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) \quad \forall \sigma > a. \tag{2.21}$$

Теорема 2. Перетворенням Лапласа узагальненої функції $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ є функція

$$F(s) = \big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big), s = \sigma + \omega i, \sigma > \sigma_0 > a\}, \tag{2.22}$$

де $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > -\varepsilon \\ 0, & t < -2\varepsilon \end{cases}$, $\varepsilon > 0$.

Доведення. Позаяк $f(t)e^{-\sigma_0 t}$ належить S'_+, $\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}$ — функція з S, то визначена цією формулою функція $F(s)$ існує. Використовуючи означення перетворення Фур'є та властивості функцій із простору S'_+, $\mathcal{D}'_+(a)$, доведемо, що функція $F(s)$ з означення (2.21) набуває потрібного вигляду. Для довільних $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ та $\varphi \in S$ отримаємо

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}[f(t)](s), \varphi(s)) &= (\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \varphi(-\omega)) \\
&= (f(t)e^{-\sigma t}, \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](t)) \\
&= (\eta(t)f(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}, \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](t)) \\
&= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(-\omega)e^{i\omega t}d\omega\Big) \\
&= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\Big) \\
&= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\eta(t)e^{-(\sigma+i\omega-\sigma_0)t}d\omega\Big) \\
&= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}d\omega\Big) \qquad \forall \sigma > \sigma_0 > a.
\end{aligned}$$

Використовуючи аналог теореми Фубіні (це можливо, оскільки $\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}$ — функція з S), одержимо

$$(\mathcal{L}[f(t)](s), \varphi(s)) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\varphi(\omega)d\omega,$$

звідки за лемою Дюбуа-Реймона одержуємо твердження теореми.

Як і для звичайних функцій, запис $f(t) \to F(s)$ означає, що $F(s)$ є зображенням функції $f(t)$.

Використовуючи означення перетворень Фур'є та Лапласа, властивості перетворення Фур'є і останню теорему, одержуємо основні властивості перетворення Лапласа узагальнених функцій із $\mathcal{D}'_+(a)$.

Покажемо, що при $f \in \mathcal{D}'_+(a)$

$$f^{(m)}(t) \to s^m F(s)\,,\ m = 0, 1, \ldots .$$

Справді, якщо $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то $f' \in \mathcal{D}'_+(a)$,

$$\begin{aligned} f'(t) &\to \mathcal{F}[f'(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \mathcal{F}[(f(t)e^{-\sigma t})' + \sigma f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) \\ &= \mathcal{F}[(f(t)e^{-\sigma t})'](-\omega) + \sigma\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ &= \omega i\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) + \sigma\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ &= (\sigma + \omega i)\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = sF(s)\,, \end{aligned}$$

далі використовуємо метод математичної індукції.

Покажемо, що при $f \in \mathcal{D}'_+(a)$

$$(-t)^m f(t) \to F^{(m)}(s)\,,\ m = 0, 1, \ldots .$$

Оскільки $t^m f(t)$ — функція із $\mathcal{D}'_+(a)$, то за теоремою 2

$$\begin{aligned} (-t)^m f(t) &\to \big((-t)^m f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big) \\ &= \big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\,. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\tfrac{d}{ds}(-t\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}) = \eta(t)\tfrac{d}{ds}e^{-(s-\sigma_0)t}$$

і подібно

$$\eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t} = \eta(t)\tfrac{d^m}{ds^m}e^{-(s-\sigma_0)t} = \tfrac{d^m}{ds^m}\big(\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\,.$$

Тому за правилом диференціювання узагальнених функцій, залежних від параметрів (у нашому випадку параметром є s), одержимо

$$\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t}\big) = \tfrac{d^m}{ds^m}\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big) = F^{(m)}(s)\,.$$

Можна перевірити, що

$$f_\beta(t) \to s^{-\beta}\,.$$

Тоді у просторі узагальнених функцій

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta} * v(t) \to s^\beta V(s),$$

де $V(s)=\mathcal{L}[v(t)]$. Зокрема, після перетворення Лапласа рівняння (2.17) набуває вигляду

$$\frac{1}{s^\beta+Bs^\alpha+C}=F(s).$$

Для регулярної $v(t)$

$$v^{(\beta)}(t)\to s^\beta V(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k v^{(\beta-k-1)}(0). \tag{2.23}$$

Також

$$^{C}D^\beta v(t)\to s^\beta V(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\beta-k-1}v^{(k)}(0). \tag{2.24}$$

Справді,

$$^{C}D^\beta v(t)\to \int\limits_0^\infty \tfrac{e^{-st}}{\Gamma(n-\beta)}\Big[\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1}v^{(n)}(\tau)d\tau\Big]=$$

$$=\tfrac{1}{s^{n-\beta}}L[v^{(n)}(t)]=\tfrac{1}{s^{n-\beta}}\Big[s^nV(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kv^{(n-k-1)}(0)\Big]=$$

$$=s^\beta V(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\beta+k-n}v^{(n-k-1)}(0)=s^\beta V(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{\beta-m-1}v^{(m)}(0).$$

Перетворення Лапласа ефективне при розв'язуванні рівнянь у згортках (зокрема, з дробовими похідними), лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, ядра яких залежать від різниці аргументів, систем таких рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\theta(x)x\cos x * u(x)=\theta(x)\sin x.$$

Нехай $u(x)\to U(s)$, тоді

$$\theta(x)x\cos x\to -(L[\cos x])'(s)=-\big(\tfrac{s}{s^2+1}\big)'=\tfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2};$$
$$(\theta(x)x\cos x)*u(x)\to \tfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}U(s);\ \theta(x)\sin x\to\tfrac{1}{s^2+1};$$
$$\tfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}U(s)=\tfrac{1}{s^2+1};$$
$$U(s)=\tfrac{s^2+1}{s^2-1}=1+\tfrac{2}{s^2-1}=1+\tfrac{1}{s-1}-\tfrac{1}{s+1};$$
$$u(x)=\delta(x)+\theta(x)e^x-\theta(x)e^{-x}.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$u'+u=0,\ t>0,\ \ u(0+)=1;$$

$u(t)\to U(s)$; тоді

$$sU(s) - u(0+) + U(s) = 0,\ \ U(s) = \tfrac{1}{s+1},\ \ u(t) = u(0+)e^{-t},$$

з початкової умови $u(0+) = 1$, а отже, $u(t) = e^{-t}$.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$u''(x) - \int_0^x e^{-(x-t)}[u'(t) + u(t)]dt = e^{-x},\ \ u(0) = 0,\ u'(0) = 4.$$

Нехай $u(x) \to U(s)$, тоді

$$u'(x) \to sU(s) - u(0) = sU(s),$$

$$u''(x) \to s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - 4,$$

$$\int_0^x e^{-(x-t)}[u'(t) + u(t)]dt = e^{-x} * [u'(x) + u(x)] \to \tfrac{1}{s+1}[sU(s) + U(s)] = U(s)$$

і після перетворення Лапласа одержимо рівняння

$$s^2U(s) - 4 - U(s) = \tfrac{1}{s+1}\ \ <=>\ \ (s^2 - 1)U(s) = \tfrac{1}{s+1} + 4\ \ <=>$$

$$U(s) = \tfrac{1}{(s+1)^2(s-1)} + \tfrac{4}{s^2-1};$$

$$\tfrac{1}{(s+1)^2(s-1)} = \tfrac{A}{s+1} + \tfrac{B}{(s+1)^2} + \tfrac{C}{s-1},$$

звідки $A(s^2 - 1) + B(s - 1) + C(s + 1)^2 \equiv 1$, і при $s = 1$ одержимо $C = \frac{1}{4}$, при $s = -1$ матимемо $B = -\frac{1}{2}$, а при $s = 0$ буде

$$-A - B + c = 1\ \ =>\ \ A = -B + C - 1 = -\tfrac{1}{2};\ \tfrac{4}{s^2-1} = \tfrac{2}{s-1} - \tfrac{2}{s+1}.$$

Отож,

$$U(s) = -\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{s+1} + \tfrac{1}{(s+1)^2}] + \tfrac{1}{4(s-1)} + \tfrac{2}{s-1} - \tfrac{2}{s+1}\ \ <=>$$

$$U(s) = -\tfrac{2{,}5}{s+1} + \tfrac{2{,}25}{s-1} + \tfrac{0{,}5}{(s+1)^2},$$

звідки, повертаючись до оригіналів, одержуємо

$$u(x) = -2,5e^{-x} + 2,25e^{x} + 0,5xe^{-x}.$$

Приклад 4. Розв'язати задачу

$${}^{C}D^{\beta}u + u = 0,\ t > 0,\ \ u(0+) = 1;$$

$u(t) \to U(s)$; тоді

$$s^{\beta}U(s) - s^{\beta-1}u(0+) + U(s) = 0,\ \ U(s) = \tfrac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+1} = s^{\beta-1}\cdot\tfrac{1}{s^{\beta}+1},$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[s^{\beta-1}](t) * \mathcal{L}^{-1}[(s^{\beta} + 1)^{-1}](t) = f_{1-\beta}(t) * [\theta(t)t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-t^{\beta})],$$

$$u(t) = E_{\beta,1}(-t^{\beta}).$$

2.4 Розв'язок задачі Коші для системи рівнянь із дробовою похідною

Розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференцальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = Au + g(t),\ \ u(0) = u_0$$

можна подати в матричному вигляді

$$u(t) = e^{At}u_0 + e^{At} * g(t),$$

де

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \ldots$$

Подібним буде зображення розв'язку задачі Коші для системи звичайних рівнянь із дробовими похідними. Формули подібні до цих, але тут уже будуть матричні функції Міттаг-Лефлера, як у випадку скалярних лінійних рівнянь із дробовими похідними. Одержимо їх за допомогою перетворення Лапласа [27].

При побудові розв'язків рівнянь із дробовими похідними ми використовували функцію Міттаг-Лефлера $E_{\beta,\gamma}(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\gamma)}$, а якщо A– квадратна матриця, то визначено матричну функцію Міттаг-Лефлера

$E_{\beta,\gamma}(A) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{\Gamma(p\beta+\gamma)}$.

Знайдемо її перетворення Лапласа:

$$L[t^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(At^\beta)] = L[t^{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\beta)^k}{\Gamma(k\beta+\gamma)}] = \int_0^{\infty} e^{-st}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\gamma)}t^{k\beta+\gamma-1}dt =$$

$$[t=\tau/s] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(k\beta+\gamma)s^{\beta k+\gamma}}\int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{k\beta+\gamma-1}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{s^{\beta k+\gamma}},$$

а отже,

$$L[t^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(At^\beta)] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-\beta k-\gamma}.$$

Покажемо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-\beta k-\gamma} = s^{\beta-\gamma}(s^\beta I - A)^{-1} \iff$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\beta} = (s^\beta I - A)^{-1} \iff \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\beta}(s^\beta I - A) = I\,.$$

Маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\beta}(s^\beta I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\beta} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} s^{-(k+1)\beta} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\beta} - \sum_{m=1}^{\infty} A^m s^{-m\beta} = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k s^{-k\beta} - \sum_{m=1}^{\infty} A^m s^{-m\beta} = I\,.$$

Отже,

$$L[t^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(At^\beta)] = s^{\beta-\gamma}(s^\beta I - A)^{-1},$$

зокрема, при $\beta=\gamma$

$$L[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})]=(s^{\beta}I-A)^{-1}.$$

Розглянемо при $\beta\in(n-1,n)$ задачу Коші для системи

$$^{C}D^{\beta}u=Au+g(t),\ \ u^{(k)}(0)=u_k,\ k=0,1,n-1. \tag{2.25}$$

Застосовуючи перетворення Лапласа і враховуючи, що $u(t)\to U(s)$, $g(t)\to G(s)$, одержимо

$$s^{\beta}U(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\beta-k-1}u^{(k)}(0)=AU(s)+G(s) <=>$$

$$(s^{\beta}I-A)U(s)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{\beta-k-1}u_k+G(s) <=>$$

$$U(s)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{\beta-k-1}(s^{\beta}I-A)^{-1}u_k+(s^{\beta}I-A)^{-1}G(s).$$

Знаходимо обернене перетворення Лапласа

$$u(t)=\sum_{k=0}^{n-1}f_{k+1-\beta}(t)*\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})\right]u_k+\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})\right]*g(t).$$

Було показано, що

$$f_{1-\beta}(t)*\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})\right]=E_{\beta,1}(At^{\beta}).$$

Так само показуємо, що

$$f_{k+1-\beta}(t)*\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})\right]=t^{k}E_{\beta,k+1}(At^{\beta}),$$

а тоді

$$u(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^{k}E_{\beta,k+1}(At^{\beta})u_k+\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(At^{\beta})\right]*g(t).$$

Це розв'язок задачі (2.25).

Приклад. Розв'язок задачі

$$^{C}D^{\beta}u+u=0,\ t>0,\ \ u(0+)=1$$

при $\beta\in(0,1)$ знаходимо одразу із застосуванням одержаної формули при $A=-1$:

$$u(t)=E_{\beta,1}(-t^{\beta}).$$

2.5 Числове наближення дробових інтегралів і похідних

Використовуємо відомі теореми про середнє для інтегралів:

1. $f \in C[a,b] => \exists c \in (a,b): \int\limits_a^b f dt = f(c)(b-a)$.
2. $f, g \in C[a,b], g$ не міняє знак на $[a,b]$ $=> \exists c \in (a,b):$

$$\int\limits_a^b f\ g dt = f(c) \int\limits_a^b g dt.$$

Нехай $[a,b] = [0,T]$, $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\tau = T/n$. За значення середніх точок c_j при великому n можна брати ліві або праві кінці інтервалів. Тоді

$$I_\beta v(t_{k+1}) = \int\limits_0^{t_{k+1}} v(s) f_\beta(t_{k+1}-s) ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} v(s) f_\beta(t_{k+1}-s) ds,$$

а використовуючи другу теорему про середнє,

$$I_\beta v(t_{k+1}) = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{m=0}^{k} v(m\tau) \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} (t_{k+1}-s)^{\beta-1} ds = \ [t_{k+1}-s=\eta]$$

$$= \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{m=0}^{k} v(m\tau) \int\limits_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} \eta^{\beta-1} d\eta =$$

$$= \tfrac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \sum_{m=0}^{k} v(m\tau) \eta^\beta \Big|_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} =$$

$$= \tfrac{1}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{m=0}^{k} v(m\tau)[((k+1-m)\tau)^\beta - ((k-m)\tau)^\beta],$$

і після заміни $k - m = j$ одержуємо

$$I_\beta v(t_{k+1}) = \frac{\tau^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{j=0}^{k} v(t_{k-j})[(j+1)^\beta - j^\beta],\ \tau = T/n.$$

При $\beta \in (0,1)$:

$${}^C D^\beta v(t_{k+1}) = \int\limits_0^{t_{k+1}} v'(s) f_{1-\beta}(t_{k+1}-s) ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} v'(s) f_{1-\beta}(t_{k+1}-s) ds,$$

а використовуючи наближений вираз для похідної v',

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - v(m\tau)}{\tau} \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} (t_{k+1} - s)^{-\beta} ds =$$

$[t_{k+1} - s = \eta]$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - v(m\tau)}{\tau} \int\limits_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} \eta^{-\beta} d\eta =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta)\Gamma(1-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - v(m\tau)}{\tau} \, \eta^{1-\beta}\Big|_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - v(m\tau)}{\tau} \left[((k+1-m)\tau)^{1-\beta} - ((k-m)\tau)^{1-\beta}\right],$$

і після заміни $k - m = j$ одержуємо

$$^{C}D^{\beta} v(t_{k+1}) = \tag{2.26}$$

$$= \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{j=0}^{k} \left[v\big(t_{k+1-j}\big) - v\big(t_{k-j}\big)\right] \left[(j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}\right], \ \tau = T/n.$$

При $\beta \in (1, 2)$:

$$^{C}D^{\beta} v(t_{k+1}) = \int\limits_{0}^{t_{k+1}} v''(s) f_{2-\beta}(t_{k+1} - s) ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} v''(s) f_{2-\beta}(t_{k+1} - s) ds,$$

а використовуючи наближений вираз для похідної v'',

$$^{C}D^{\beta} v(t_{k+1}) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - 2v(m\tau) + v\Big((m-1)\tau\Big)}{\tau^2} \int\limits_{m\tau}^{(m+1)\tau} (t_{k+1} - s)^{1-\beta} ds =$$

$[t_{k+1} - s = \eta]$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - 2v(m\tau) + v\Big((m-1)\tau\Big)}{\tau^2} \int\limits_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} \eta^{1-\beta} d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2-\beta)\Gamma(2-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - 2v(m\tau) + v\Big((m-1)\tau\Big)}{\tau^2} \, \eta^{2-\beta}\Big|_{(k-m)\tau}^{(k+1-m)\tau} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{m=0}^{k} \frac{v\Big((m+1)\tau\Big) - v(m\tau) + v\Big((m-1)\tau\Big)}{\tau^2} \left[((k+1-m)\tau)^{2-\beta} - ((k-m)\tau)^{2-\beta}\right],$$

і після заміни $k-m=j$ одержуємо

$$ {}^{C}D^{\beta}v(t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\sum_{j=0}^{k} b_j\big[v\big(t_{k+1-j}\big) - 2v\big(t_{k-j}\big) + v\big(t_{k-1-j}\big)\big], \qquad (2.27) $$

де $b_j = (j+1)^{2-\beta} - j^{2-\beta}$, $\tau = T/n$.

Приклад. При $\beta \in (0,1)$ розглянемо рівняння

$$ {}^{C}D^{\beta}v = v^2 + g(t). $$

Використаємо формулу (2.26) За нею при $k=j=0$ маємо

${}^{C}D^{\beta}v(t_1) = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\big[v\big(t_1\big) - v\big(t_0\big)\big]$

і $v(t_1)$ знаходимо як розв'язок рівняння

$\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\big[v\big(t_1\big) - v\big(t_0\big)\big] = v^2(t_1) + g(t_1)\,;$

при $k=1$ маємо

${}^{C}D^{\beta}v(t_2) = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Big[v\big(t_2\big) - v\big(t_1\big) + [v(t_1) - v(t_0)]\,[2^{2-\beta}-1]\Big]$

і $v(t_2)$ знаходимо як розв'язок рівняння

$\frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\Big[v\big(t_2\big) - v\big(t_1\big) + [v(t_1) - v(t_0)]\,[2^{2-\beta}-1]\Big] = v^2(t_2) + g(t_2)\,,$

і т.д.

Можна записати задане рівняння у вигляді

$$ (f_{-\beta} * v)(t) - f_{1-\beta}(t)v(0) = v^2(t) + g(t)\,, $$

тобто

$$ v(t) = v(0) + f_{\beta}(t) * [v^2(t) + g(t)]\,, $$

а тоді застосувати метод послідовних наближень

$$ v_0(t) = v(0)\,,\ v_{n+1}(t) = v(0) + f_{\beta}(t) * [v_n^2(t) + g(t)]\,,\ n = 1, 2, \dots\,, $$

де чисельно рахуватимемо на кожному кроці дробовий інтеграл. Вже на кожному кроці не буде нелінійного алгебричного рівняння.

Опрацювати [56] про розв'язання задачі Коші для нелінійної системи рівнянь із дробовими похідними, що має застосування в кінетиці.

2.6 Півлінійні рівняння

Приклади повних метричних просторів:

$C[a,b]\,,\ ||v||_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|\,,$

$C^1[a,b]\,,\ ||v||_{C^1[a,b]} = \max\{\max\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|, \max\limits_{x\in[a,b]} |v'(x)|\}\,,$

$\mathcal{M}$ – простір обмежених функцій на дійсній осі, $||v||_M = \sup\limits_{x\in R} |v(x)|\,,$

$L_2(a,b)\,,\ ||v||_{L_2(a,b)} = \sqrt{\int\limits_a^b |v(x)|^2 dx}\,.$

При розв'язуванні операторних рівнянь вигляду

$$u = Au \tag{2.28}$$

найчастіше використовують метод послідовних наближень, теореми Банаха і Шаудера.

Теорема Банаха (принцип стисних відображень). *Якщо у повному метричному просторі H оператор A переводить елементи простору H в себе і є стисним, тобто*

$$\exists L \in (0,1):\ \forall u_1, u_2 \in H \quad \varrho(Au_1, Au_2) \le L\varrho(u_1, u_2),$$

то оператор A має єдину нерухому точку, тобто існує єдиний розв'язок операторного рівняння (2.28).

Доведення. Для довільного $u_0 \in H$ вибираємо $u_n = Au_{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що ця послідовність фундаментальна в H. Маємо

$\varrho(u_1, u_2) = \varrho(Au_0, Au_1) \le L\varrho(u_0, u_1) = L\varrho(u_0, Au_0)\,,$

$\varrho(u_2, u_3) = \varrho(Au_1, Au_2) \le L\varrho(u_1, u_2) \le L^2\varrho(u_0, u_1) = L^2\varrho(u_0, Au_0)\,,$

$\varrho(u_3, u_4) = \varrho(Au_2, Au_3) \le L\varrho(u_2, u_3) \le L^3\varrho(u_0, Au_0)\,,$ і.т.д.

$\varrho(u_m, u_{m+p}) \le \varrho(u_m, u_{m+1}) + \cdots + \varrho(u_{m+p-1}, u_{m+p}) \le$

$\le (L^m + \cdots + L^{m+p})\varrho(u_0, Au_0) = \frac{L^m - L^{m+p}}{1-L}\varrho(u_0, Au_0) \le \frac{L^m}{1-L}\varrho(u_0, Au_0)$

(бо $0 < L < 1$), а тому $\varrho(u_m, u_{m+p}) \to 0,\ m \to \infty$ – послідовність фундаментальна. За повнотою простору H вона збігається до деякого елемента $u \in H$.

Покажемо, що u – розв'язок рівняння:

$$\varrho(u, Au) \le \varrho(u, u_m) + \varrho(u_m, Au) = \varrho(u, u_m) + \varrho(Au_{m-1}, Au) \le$$
$$\le \varrho(u, u_m) + L\varrho(u_{m-1}, u) \to 0\,,\ m \to \infty\,,$$
а отже, $\varrho(u, Au) = 0$.

Єдиність розв'язку доводимо методом від супротивного: нехай $u = Au,\ v = Av$, тоді

$$\varrho(u, v) = \varrho(Au, Av) \le L\varrho(u, v)\,.$$

Якщо $\varrho(u, v) \ne 0$, то $1 \le L$. Одержали суперечність.

Із попереднього також випливає оцінка похибки:

$$\varrho(u_m, u) \le \frac{L^m}{1-L}\varrho(u, Au).$$

Приклад 1. Розглянемо лінійне інтегральне рівняння

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f(x),\ \ x \in [a, b] \tag{2.29}$$

за умови

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy = Q^2 < +\infty\,,\ f \in L_2(a, b)\,.$$

На $L_2(a, b)$ введемо оператор $(\mathcal{K}u)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy,\ \ x \in (a, b)$.

Маємо

$$||\lambda[\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2]||^2_{L_2(a,b)} = |\lambda \int_a^b |(\mathcal{K}u_1)(x) - (\mathcal{K}u_2)(x)|^2 dx|^2 =$$
$$= |\lambda|^2 \int_a^b |\int_a^b K(x, y)[u_1(y) - u_2(y)]dy|^2 dx \le$$
$$\le |\lambda|^2 \int_a^b \Big[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \int_a^b |u_1(y) - u_2(y)|^2 dy\Big] dx \le$$
$$\le |\lambda|^2 \Big[\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy\Big] \int_a^b |u_1(y) - u_2(y)|^2 dy \le$$
$$\le (|\lambda|Q)^2 ||u_1 - u_2||^2_{L_2(a,b)}\,.$$

Отже, при $|\lambda|Q < 1$ за теоремою Банаха в $L_2(a, b)$ існує єдиний розв'яок рівняння (2.29).

Приклад 2. Розглянемо інтегральне рівняння Урисона

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy,\ \ x \in [a, b], \tag{2.30}$$

де функція $K(x,y,u)$ неперервна на $\Omega := [a,b]\times[a,b]\times[-h,h]$ ($h>0$) і задовольняє умову Ліпшиця за аргументом u:

$$\exists L_1>0 : \forall (x,y,v_1),(x,y,v_2)\in\Omega$$
$$|K(x,y,v_1)-K(x,y,v_2)|\le L_1|v_1-v_2|.$$

Нехай $S_h=\{u\in C[a,b]:\ ||u||:=||u||_{C[a,b]}\le h\}$,

$$(Au)(x)=\lambda\int_a^b K(x,y,u(y))dy.$$

Тоді

$$||Au||=\max_{x\in[a,b]}|\lambda\int_a^b K(x,y,u(y))dy|\le|\lambda|\max_{x,y\in[a,b]}|K(x,y,u(y))|(b-a),$$

так що, позначаючи $M=\max\limits_{x,y\in[a,b],||u||\le h}|K(x,y,u(y))|$, одержуємо

$||Au||\le h$ при $|\lambda|M(b-a)\le h$ – оператор A переводить повний метричний (тут банахів) простір S_h в себе.

Для довільних $u,v\in S_h$

$$||Au-Av||=\max_{x\in[a,b]}|\lambda\int_a^b[K(x,y,u(y))-K(x,y,v(y))]dy|\le$$
$$\le|\lambda|L_1\int_a^b|u(y)-v(y)|dy|\le|\lambda|L_1\int_a^b\max_{x\in[a,b]}|u(y)-v(y)|dy|,$$

тобто

$||Au-Av||\le|\lambda|L_1(b-a)||u-v||$ – при $|\lambda|L_1(b-a)<1$ оператор A є стисним. Отож, при $|\lambda|<\min\{\frac{h}{M(b-a)},\frac{1}{L_1(b-a)}\}$ умови теореми Банаха виконуються – інтегральне рівняння (2.30) має єдиний розв'язок в S_h.

Приклад 3. Розглянемо рівняння

$$u^{(\beta)}=u^2+g(t) \tag{2.31}$$

при $g\in C[0,T]$, $|g(t)|\le G$ при $t\in[0,T]$.

Перетворимо рівняння:

$$f_{-\beta}(t)*u(t)=u^2+g(t);$$
$$u(t)=f_\beta(t)*u^2(t)+f_\beta(t)*g(t);$$
$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}[\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}u^2(\tau)d\tau+(f_\beta*g)(t)]:=Au(t).$$

Нехай $F_M=\{u\in C[0,T]:||u||=\max\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|\le M\}$. Тоді при $t\in[0,T]$

$$|(Au)(t)|\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}[M^2\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}d\tau+|\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}g(\tau)d\tau|]\le$$

$$\leq \tfrac{1}{\beta\Gamma(\beta)}[M^2 t^\beta + t^\beta \max_{\tau\in[0,T]} |g(\tau)|] = \tfrac{1}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta [M^2+G] \leq \tfrac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}[M^2+G]\,.$$

Покажемо, що $||Au||_{C[0,T]} \leq M$ при певних додатних M, T.

Нехай $a = \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$ і виберемо $M^2 \geq G$. Тоді $G \leq M^2$, $a(M^2+G) \leq 2aM^2$ і умова $||Au||_{C[0,T]} \leq M$ виконується при

$$2aM^2 \leq M <=> a \leq \frac{1}{2M} <=> \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \leq \frac{1}{2M},$$

що є при достатньо малих T.

Перевіримо, чи є оператор стисним на вибраній замкненій підмножині F_M повного метричного простору $C[0,T]$.

$$||Au_1 - Au_2||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |u_1^2(\tau) - u_2^2(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \max_{t\in[0,T]} \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |u_1(\tau)+u_2(\tau)|\,|u_1(\tau)-u_2(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \tfrac{2M}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\, |u_1(\tau)-u_2(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \tfrac{2M}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\, d\tau\, ||u_1-u_2||_{C[0,T]} \leq \tfrac{2MT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} ||u_1-u_2||_{C[0,T]}\,.$$

Отже, оператор A стисний при

$$\frac{2MT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} < 1 <=> \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} < \frac{1}{2M}.$$

Тому при вибраних M, T рівняння (2.31) має єдиний розв'язок $u \in F_M$.

Теорема Шаудера (принцип Шаудера). *Якщо цілком неперервний оператор A відображає замкнену опуклу множину $\bar{S}$ банахового простору H на свою частину, то існує нерухома точка цього відображення: існує така $u \in \bar{S}$, що $Au = u$.*

Застосування теореми Шаудера до півлінійних рівнянь зі звичайною похідною дробового порядку наведено, зокрема, у [54], а у випадку рівнянь із частинними похідними дробового порядку – у наступному розділі.

Опрацювати дослідження розв'язності задачі Коші для півлінійного рівняння зі звичайною похідною дробового порядку [54] і застосування методу послідовних наближень у [51].

Контрольні запитання.

1. Навести приклади рівнянь у згортках.
2. Що використовують для розв'язання рівняння Абеля?
3. Яка формула числового наближення дробового інтегралу?
4. Яка формула числового наближення дробової похідної?
5. Вивести формулу розв'язку рівняння $u^{(\beta)} + a^2 u = g(t)$.
6. Дати схему числового розв'язання рівняння $u^{(1/4)} + 4u = \theta(t)$.
7. Вивести формулу розв'язку рівняння ${}^C D^{\beta} u + a^2 u = g(t)$.
8. Дати схему числового розв'язання задачі:
   ${}^C D^{1/2} u + 4u = \theta(t)\,,\ u(0+) = 1$.
9. Дати означення перетворення Лапласа.
10. Вивести формулу перетворення Лапласа похідної дробового порядку.

Вправи. Використовуючи перетворення Лапласа, властивості операторів дробового диференціювання (інтегрування), розв'язати рівняння чи задачу:

1) ${}^C D^{1/2} - 4u = t\,,\ t > 0\,,\ u(0+) = 1\,;$
2) ${}^C D^{1/2} u + u = t + 2\,,\ u(0+) = 2\,;$
3) ${}^C D^{1/4} u - u = 2t^2\,,\ u(0+) = 1\,;$
4) ${}^C D^{3/2} u - 2 {}^C D^{1/2} u = 0\,,\ u(0+) = 2\,,\ u'(0+) = 2\,;$
5) ${}^C D^{1/2} u -{}^C D^{1/4} u + 4u = 0\,,\ u(0+) = 1\,;$
6) $(x_+)^{-1/4} * u(x) = x_+\,;$
7) $u(x) + \int\limits_0^x (x-t)^{1/4} u(t)dt = x_+\,;$
8) $u(x) - 2\int\limits_0^x (x-t)^{-1/3} u(t)dt = \theta(x)\,.$

Зразок контрольного завдання.

1. $f(x) * \theta(x) =?\,,\ f \in L_{1,loc} \cap D'_+\,.$
2. $(x_+^2)^{(3/2)} =?$
3. Розв'язати рівняння $(x_+)^{-1/4} * u(x) = f(x)$ у D'_+.
4. Розв'язати рівняння $u(x) + 2\int\limits_0^x (x-t)^{1/3} u(t)dt = f(x)\,.$

Розділ 3

ПРЯМІ Й ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ

Еліптичні й параболічні крайові задачі з регулярними й узагальненими функціями у правих частинах активно вивчаються. Умови класичної розв'язності крайових задач для рівняння другого порядку

$$D_t^{\beta} u(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = F(x,t), \quad a = const$$

з регуляризованою похідною дробового порядку $\beta \in (0,1)$ одержані, зокрема, в [47].

Фундаментальні розв'язки рівнянь відіграють важливу роль у вивченні задачі Коші та крайових задач у класах гладких та узагальнених функцій. Деякі зображення, оцінки та інші властивості фундаментальних розв'язків рівнянь із дробовими похідними за часом та функцій Гріна задач Коші для таких рівнянь одержані в [28,31,32,34,49,50,53] та інших працях. Тут розглянемо задачу Коші, першу крайову задачі і деякі обернені задачі для рівнянь із частинними похідними дробових порядків, використовуючи метод рядів Фур'є і властивості функцій Гріна.

3.1 Основні задачі для рівнянь із частинними похідними дробових порядків

В [12] знайдено фундаментальну функцію і вивчено основні крайові задачі для рівняння

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_2^\alpha} = f(x_1, x_2), \ \ \alpha \in (1,2).$$

Тут будемо вивчати задачі для рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ \ \beta \in (0,2).$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + (-\Delta)^{\alpha/2} u + f(x,t), \ \ \beta, \alpha \in (0,2),$$

де оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначений за допомогою перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2} g(x)] = |\lambda|^\alpha \mathcal{F}[g(x)]\,.$$

При $\alpha = 2$ останнє рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \Delta u + f(x,t).$$

У курсі рівнянь із частинними похідними вивчають рівняння теплопровідності

$$u_t = \sum_{j=1}^{3} (k_j u_{x_j})_{x_j} + f(x,t),$$

яке також є рівнянням дифузії, наприклад, концентрація $u(x,t)$ газу в перерізі x трубки, заповненої пористим середовищем, в момент часу t описується рівнянням

$$u_t = a^2 u_{xx} = f(x,t),$$

де $a^2 = k/C$, $f(x,t) = g(x,t)/C$, k – коефіцієнт дифузії, $g(x,t)$ – густина внутрішніх джерел газу, C – коефіцієнт пористості середовища (відношення об'єму пор до повного об'єму трубки). Рівняння Шредінгера

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi$$

описує хвильову функцію ψ частинки масою m_0, а $|\psi(x,t)|^2 dx$ є ймовірністю того, що частинка в момент часу t знаходиться в околі точки x об'ємом dx, $V(x)$ – потенціал зовнішнього силового поля, $\hbar$ – стала Планка.

Перехід до дробової похідної за часом дозволяє врахувати ефекти пам'яті системи, глибше осмислити відомі результати, одержати нові адекватні кількісні моделі досліджуваних явищ. Наприклад, рівнянням

$$\sum_{j=1}^{3} (k_j u_{x_j})_{x_j} - c(x,t)u = a^2 u_t^{(\alpha)}$$

можна описати розподіл тиску $u(x,t)$ газу в пласті пористого неоднорідного середовища (в моделі процесу фільтрації газу в підземних газосховищах). Електромагнітні хвилі в діелектриках описують такими рівняннями при $\beta \in (1,2)$ і $\beta \in (2,3)$.

Як виникають рівняння дробової дифузії? Згадаємо вивід рівняння поширення тепла в стержні. Кількість тепла, що проходить через поверхню S за час від t_1 до t_2

за законом Фур'є $Q_1 = -S\int\limits_{t_1}^{t_2} ku_x dt$,

за законом Ньютонв $Q_2 = S\int\limits_{t_1}^{t_2} k_1(u-u_0)dt$,

де u_0 – температура зовнішнього середовища, k, k_1 – коефіцієнти відповідно внутрішньої і зовнішньої теплопровідності. Нехай $f_1(x,t)$ – інтенсивність джерел тепла (кількість тепла, яку дає його джерело в одиниці об'єму за одиницю часу), ϱ – густина матеріалу стержня, c – питома теплоємність стержня.

Рівняння теплового балансу в стержні набуває вигляду

$$S\int\limits_{t_1}^{t_2} ku_x|_{x+\Delta x}dt - S\int\limits_{t_1}^{t_2} ku_x|_x dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} k_1 P\Delta x(u-u_0)dt+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f_1(x,t)dxdt = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})dx;$$

$$S\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}(ku_x)_x dxdt - P\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} k_1(u-u_0)dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f_1(x,t)dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho u_t dxdt,$$

звідки

$$S(ku_x)_x - Pk_1(u-u_0) + f_1(x,t) = c\rho u_t$$

і при сталих k, k_1 одержуємо

$$u_t = a^2 u_{xx} - b^2 u = f(x,t).$$

Рівняння вивчають при початковій

$$u(x,0) = u_0(x)$$

і крайових умовах вигляду:

$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t),\ t\geq 0$ – якщо задано закон зміни температури на кінцях стержня,

$u_x(0,t)=\mu_1(t),\ u_x(l,t)=\mu_2(t),\ t\geq 0$ – якщо до кінців подається тепловий потік,

$u_x(0,t)-hu(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t)+hu(0,t) = \mu_2(t),\ t \geq 0$ – якщо на кінцях відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, а також різних комбінаціях цих умов на лівому і правому кінцях стержня.

Закон Фур'є, який ще можна записати у вигляді

$$q(t)=-k\ grad\ u\,,$$

замінюють на закон

$$q(t)=-k\int\limits_0^t K(t-\tau)u_x(x,\tau)d\tau$$

або

$$q(t)=-k\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau)u_x(x,\tau)d\tau$$

(враховуючи пам'ять), і тоді замість рівняння

$$u_t=a^2u_{xx}$$

одержують

$$u_t=a^2\int\limits_0^t K(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau$$

або

$$u_t=a^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau.$$

З останнього, інтегруючи, одержуємо

$$u(x,t)-u(x,0)=a^2\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau\ \ (=a^2f_\alpha(t)*u_{xx}(x,t)),$$

а діючи оператором $f_{-\alpha}(t)*$, одержимо

$$f_{-\alpha}(t)*u(x,t)-f_{1-\alpha}(t)u(x,0)=a^2u_{xx}(x,t),$$

тобто рівняння

$${}^CD^\alpha u=a^2u_{xx}.$$

3.1.1 Класичний розв'язок крайової задачі методом рядів Фур'є

При $\alpha \in (0,1)$ розглянемо [16] крайову задачу

$$ {}^C D_t^\alpha u - u_{xx} = h(x,t),\ (x,t) \in (0,l) \times (0,t_0] := Q, \tag{3.1} $$

$$ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,t_0], \tag{3.2} $$

$$ u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l]. \tag{3.3} $$

Нехай $C(Q)$, $C(\bar{Q})$, $C[0,t_0]$ – класи неперервних відповідно в Q, $\bar{Q}$ та на $[0,t_0]$ функцій,

$C_{2,\alpha}(Q) = \{v \in C(Q) :\ v_{xx}, {}^C D_t^\alpha v \in C(Q)\}$, $C_{2,\alpha}(\bar{Q}) = C_{2,\alpha}(Q) \cap C(\bar{Q})$.

Класичним розв'язком задачі (3.1)-(3.3) називається функція $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$, що задовольняє рівняння (3.1) в Q та умови (3.2), (3.3).

Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді ряду Фур'є

$$ u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (x,t) \in Q \tag{3.4} $$

за власними функціями $\sin\frac{k\pi x}{l}$ ($k = 1,2,\dots$) задачі Штурма-Ліувілля

$$ X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,l), \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{3.5} $$

Маємо

$$ {}^C D_t^\alpha\Big(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\tfrac{k\pi x}{l}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\tfrac{k\pi x}{l}\Big)_{xx} = h(x,t), $$

$$ \sum_{k=1}^{\infty} \left[{}^C D^\alpha T_k(t) + (\tfrac{k\pi}{l}))^2 T_k(t)\right] \sin\tfrac{k\pi x}{l} = h(x,t), $$

$$ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin\tfrac{k\pi x}{l} = F_1(x). $$

Для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ одержуємо задачі Коші

$$ {}^C D^\alpha T_k + \lambda_k T_k = h_k(t), \quad t \in (0,t_0), \tag{3.6} $$

$$ T_k(0) = F_{1k}, \quad k = 1,2,\dots, \tag{3.7} $$

де $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, F_{1k}, $h_k(t)$ – коефіцієнти розвинення відповідно функцій $F_1(x)$, $h(x,t)$ за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля:

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \sin\tfrac{k\pi x}{l}\,, \quad F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k} \sin\tfrac{k\pi x}{l}\,.$$

Використовуючи зв'язок між похідними дробового порядку Джрбашяна-Капуто та Рімана-Ліувілля, зводимо кожну з задач (3.6), (3.7) до рівняння

$$T_k^{(\alpha)} + \lambda_k T_k = h_k(t) + f_{1-\alpha}(t) F_{1k}, \quad t \in (0, t_0]$$

і за виведеною у розділі 2 формулою одержуємо його розв'язок

$$T_k(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * h_k(t) + F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha). \tag{3.8}$$

Примітка. Можна довести, що

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau = \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)}{\lambda_k},$$

$$\frac{d^m}{dt^m} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-m} E_{\alpha,\alpha-m+1}(-\lambda_k t^\alpha),$$

$$\frac{d}{dt}\big(t E_{\alpha,2}(-\lambda_k t^\alpha)\big) = E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha), \quad t > 0.$$

Введемо функційні простори

$\tilde{C}^1(0,l) = \{F \in C[0,l] \cap C^1(0,l) : \ F(0) = F(l) = 0\}\,,$

$\tilde{C}^1(Q) = \{v \in C(\bar{Q}) : v(\cdot, t) \in \tilde{C}^1(0,l) \quad \forall t \in (0, t_0]\}\,.$

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \in (0,1]$, $h \in \tilde{C}^1(Q)$, $F_1 \in \tilde{C}^1(0,l)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ *задачі (3.1) – (3.3). Він має вигляд (3.4), де* $T_k(t)$ *визначаються формулою (3.8). Правильні оцінки*

$$||u||_{C(Q)} \le a_0 ||h||_{C(Q)} + a_1 ||F_1||_{C(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q)} + ||{}^C D_t^\alpha u||_{C(Q)} \le \widehat{a}_0 ||h||_{C^1(Q)} + \widehat{a}_1 ||F_1||_{C^1(0,l)},$$

де $a, a_0, a_1, \widehat{a}, \widehat{a}_0, \widehat{a}_1$ *– додатні сталі.*

Тут $\quad ||v||_{C(Q)} = \sup\limits_{(x,t)\in Q} |v(x,t)|\,, \ ||v||_{C^r(0,l)} = \max\limits_{m=\overline{0,r}} \sup\limits_{x\in(0,l)} |v^{(m)}(x)|\,,$

$$||v||_{C^r(Q)} = \max_{m=\overline{0,r}} \max_{t\in[0,t_0]} \sup_{(x,t)\in Q} |\tfrac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m}|, \ r = 0, 1, \ldots$$

Доведення. У випадку $\alpha \in (0,1)$ функція $E_{\alpha,1}(-z)$ не має дійсних додатних нулів, $0 \le E_{\alpha,1}(-z) \le 1$, $E_{\alpha,\alpha}(-z) \ge 0$, $z \ge 0$.

Тільки при неперервності та обмеженості $h(x,t)$ на $(0,l)$ (для кожного t) перший доданок у формулі (3.8) матиме оцінку

$$t^{\alpha-1}|E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * h_k(t)| \le M_1 \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)d\tau$$
$$= M_1\tfrac{[1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k\tau^\alpha)]}{\lambda_k} \le \tfrac{M_2}{\lambda_k}.$$

Тут і далі M_i $(i=0,1,\dots)$ – додатні сталі. Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * h_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.9}$$

рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$.

При $F_1 \in C[0,l]$ матимемо

$$|F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)| \le \frac{C_1}{1+\lambda_k t^\alpha},$$

де C_1 – додатна стала. Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.10}$$

рівномірно та абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$. Якщо $F_1 \in \tilde{C}^1(0,l)$, то

$$F_{1k} = \frac{2\int\limits_0^l F_1'(x)\cos(\lambda_k^{1/2}x)dx}{l\lambda_k^{1/2}} = \frac{\tilde{F}_{1k}}{\lambda_k^{1/2}},$$

де $\tilde{F}_{1k}$ – коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є функції $F_1'(x)$ за системою $\{1,\cos(\lambda_k^{1/2}x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді продиференційований двічі за x ряд (3.10) мажорується збіжним числовим рядом

$$M_3\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{|\tilde{F}_{1k}|}{k} \le M_3\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k^2}\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{F}_{1k}^2\Big]^{1/2}.$$

Продиференційований двічі за x ряд (3.9) має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * h_k(t)\right]\lambda_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подібно до вищенаведеного для функції $F_1(x)$, за умови $h \in \tilde{C}^1(Q)$ (як у формулюванні теореми) він збігається рівномірно.

Із рівняння задачі одержуємо існування неперервної похідної ${}^C D_t^\alpha$ функції (3.9) та суми ряду (3.4). Оцінки в теоремі випливають із зображення розв'язку і одержаних оцінок рядів.

Єдиність розв'язку задачі випливає з принципу максимуму [46]. Неперервна залежність розв'язку від даних випливає з одержаних оцінок.

Опрацювати принцип максимуму і застосування методу рядів Фур'є при розв'язанні крайової задачі для загальнішого рівняння другого порядку з регуляризованою похідною дробового порядку [46], а також доведення існування сильного узагальненого розв'язку такої задачі [47,35].

3.1.2 Обернена задача

При $\alpha \in (0,1)$ розглянемо [44] задачу

$$ {}^C D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t)F_0(x),\ (x,t) \in (0,l) \times (0,t_0] := Q, \tag{3.11}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,t_0], \tag{3.12}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{3.13}$$

$$u(x,t_0) = F_2(x), \quad x \in [0,l] \tag{3.14}$$

про знаходження пари функцій $(u, F_0) \in \mathcal{M} := C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times \tilde{C}^1(0,l)$. Додаткову умову (3.14) називають умовою перевизначення.

За теоремою 1 при $g \in C[0,t_0]$ і відомій $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ прямої задачі (3.11) – (3.13), що має вигляд (3.4), а $T_k(t)$ визначаються формулою (3.8) з заміною $h_k(t)$ на $F_{0k}g(t)$.

Підставляючи розв'язок (3.4) прямої задачі (3.11) – (3.13) в умову перевизначення (3.14), одержуємо

$$T_k(t_0) = F_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots <=>$$

$$F_{0k} \int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) g(t_0 - \tau)\, d\tau + F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) = F_{2k},$$

звідки за умови

$$G_k := \int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) g(t_0 - \tau)\, d\tau \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.15}$$

знаходимо вирази для невідомих коефіцієнтів F_{0k} розвинення функції $F_0(x)$ в ряд Фур'є:

$$F_{0k} = \left[F_{2k} - F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)\right]G_k^{-1},\ k = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Залишається обгрунтувати рівномірну збіжність розвинення

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l), \tag{3.17}$$

належність суми ряду до класу $\tilde{C}^1(0, l)$ (при такій $F_0(x)$ за доведеним у теоремі 1 може бути класичним розв'язок (3.4) прямої задачі).

За формулою (3.8) маємо

$$T_k(t) = F_{0k}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t) + F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) = \tag{3.18}$$

$$= F_{0k}\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha)g(t-\tau)d\tau + F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha),$$

де F_{0k} визначені формулою (3.16).

Далі враховуємо, що $\frac{1}{G_k}$ може рости як λ_k при $k \to +\infty$ і при великих λ_k функції $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ ($\mu = 1, 2, \alpha$) мають однаковий характер поведінки. Тоді з доведення теореми 1 випливає, що при $F_0 \in \tilde{C}^1(0, l)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}\frac{\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)g(t-\tau)d\tau}{G_k}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

рівномірно та абсолютно збігається на $\bar{Q}$ і що при $F_0 \in \tilde{C}^3(0, l)$ цей ряд можна двічі почленно диференціювати за x. Для цього за формулою (3.16) достатньо, щоб $F_1 \in \tilde{C}^1(0, l)$, $F_2 \in \tilde{C}^3(0, l)$. Ми використовуємо позначення

$\tilde{C}^j(0, l) = \{F \in C^{j-1}[0, l] \cap C^j(0, l) :\ F(0) = F(l) = 0\}$, $j = 1, 2$,

$\tilde{C}^3(0, l) = \{F \in C^2[0, l] \cap C^3(0, l) :\ F(0) = F(l) = 0,\ F''(0) = F''(l) = 0\}$.

Одержали наступний результат.

Теорема 2. *Нехай* $\alpha \in (0, 1)$, $g \in C[0, t_0]$ $F_1 \in \tilde{C}^1(0, l)$, $F_2 \in \tilde{C}^3(0, l)$,

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk}\sin\frac{k\pi x}{l},\ \ j = 1, 2$$

і виконується умова (3.15). Тоді існує єдиний розв'язок $(u, F_0) \in \mathcal{M} := C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times \tilde{C}^1(0, l)$ *задачі (3.11)-(3.14). Функція* u *визначається формулою (3.4), де* $T_k(t)$ *визначені згідно з (3.18),* F_{0k} *– згідно з (3.16),*

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l).$$

Примітка. Із врахуванням формули

$$\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau = \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)}{\lambda_k},$$

при $g(t) = const$, $t \in [0, t_0]$ умова (3.15) рівнозначна умові $E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) \neq 1$. При $\alpha \in (0, 1]$ функція $E_{\alpha,1}(-z)$ не має дійсних додатних нулів, монотонно спадна, $E_{\alpha,1}(0) = 1$, тому при $g(t) = const$, $t \in [0, t_0]$ умова (3.15) виконується для всіх $t_0 > 0$.

Теорема 3. *За припущення (3.15) розв'язок* $(u, F_0) \in \mathcal{M} = C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times \tilde{C}^1(0, l)$ *задачі (3.11) – (3.14) єдиний.*

Доведення. Припускаючи існування двох розв'язків (u^1, F_0^1), (u^2, F_0^2) класу $\mathcal{M}$ оберненої задачі, для $u = u^1 - u^2$, $F_0 = F_0^1 - F_0^2$ матимемо задачу

$$\begin{aligned}
&{}^C D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t) F_0(x), \quad (x, t) \in Q, \\
&u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, t_0], \\
&u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = 0, \quad x \in [0, l].
\end{aligned}$$

За теоремою 1 при відомій $F_0 \in \tilde{C}^1(0, l)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ прямої задачі, що має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k} \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) g(t - \tau) d\tau \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$(x, t) \in Q_0$. Підставляючи його в умову перевизначення, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{0k} G_k \sin \frac{k\pi x}{l} = 0, \quad (x, t) \in Q.$$

За повнотою системи власних функцій

$$F_{0k} G_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Звідси, враховуючи припущення (3.15), одержуємо $F_{0k} = 0$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, а отже, $F_0(x) = 0$, $x \in [0, l]$.

Теорема 4. *За умов теореми 2 розв'язок $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ задачі (3.11) – (3.14) неперервно залежить від даних.*

Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення методом рядів Фур'є одержано в [17].

3.1.3 Узагальнені розв'язки методом рядів Фур'є

Нехай $X_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ простір періодичних розподілів $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ таких, що

$$v(x + 2\pi) = v(x) = -v(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Формальний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k X_k(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

– ряд Фур'є розподілів $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$,

$$v_k = \frac{2}{\pi}(v, X_k)_{2\pi} = \frac{2}{\pi}(v, hX_k)$$

– його коефіцієнти, де $h(x)$ – непарна функція з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi) \end{cases}, \quad 0 \le h(x) \le 1,$$

$$v_k = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(x) X_k(x) dx \quad \text{при} \quad v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}),$$

і тоді ряд (3.19) є класичним рядом Фур'є v за системою X_k, $k \in \mathbb{N}$.

Відомо, що $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ряд (3.19) для функції $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ збігається в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ до v, коефіцієнти мають оцінки

$$|v_k| \le C_0(m) C(v, m)(1 + k)^m \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

при деякому $m \in \mathbb{Z}_+$, $C_0(m)$, $C(v, m)$ – сталі, що не залежать від $k \in \mathbb{N}$, зокрема, $C(v, m) = \Big(\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^{-m/2} |v(x)| dx \Big)^{1/2}$. Число m називається порядком розподілу v (для регулярних функцій $m < 0$).

Нехай $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$H^\gamma(\mathbb{R}) = \left\{ v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) : \|v\|_{H^\gamma(\mathbb{R})} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k|(1+k)^\gamma < +\infty \right\},$$

$C\big([0,T]; H^\gamma(\mathbb{R})\big)$ – простір неперервних за $t \in [0,T]$ функцій $v(x,t)$ зі значеннями $v(\cdot,t) \in H^\gamma(\mathbb{R})$,

$$\|v\|_{C\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{H^\gamma(\mathbb{R})},$$

$$C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^\gamma(\mathbb{R})\big) = \left\{ v \in C\big([0,T]; H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\big) :^C D^\alpha v \in C\big([0,T]; H^\gamma(\mathbb{R})\big) \right\}$$

– його підпростір з нормою

$$\|v\|_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} = \max\left\{ \|v\|_{C\left([0,T];H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\right)}, \|^C D^\alpha v\|_{C\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} \right\}.$$

Зауважимо, що $H^{\gamma+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset H^\gamma(\mathbb{R})$ для всіх $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Розглянемо задачу [42]

$$^C D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x), \quad (x,t) \in Q := \mathbb{R} \times (0,T], \tag{3.20}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

$$\int_0^{t_0} u(x,t)dt = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t_0 \in (0,T] \tag{3.22}$$

де $\alpha \in (0,2)$, F_1, F_2, Φ – задані функції, $T > 0$, u, F_0 – невідомі функції. Друга умова в (3.21) відсутня при $\alpha \in (0,1]$.

Припущення (A): $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$, $F_j \in H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})$, $j = 1,2$;

$\Phi \in H^{\gamma+4+2\theta}(\mathbb{R})$, $t_0 \in (0,T]$ таке, що $E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ (якщо $\alpha \in (1,2)$),

$F_1 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $F_2 = 0$, $\Phi \in H^{\gamma+4}(\mathbb{R})$ і $t_0 \in (0,T]$ довільне при $\alpha \in (0,1)$.

Примітка. $0 < E_{\alpha,\mu}(-k^2 t^\alpha) < 1$ при всіх $t > 0$, $\mu \geq \alpha$, якщо $\alpha \in (0,1]$. У випадку $\alpha \in (1,2)$ функція $1 - E_{\alpha,2}(-z)$ має скінченну кількість дійсних додатних коренів, тому існує $t_0 \in (0,T]$ таке, що

$$E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Розкладемо $F_j(x)$, $j \in \{0,1,2\}$, $\Phi(x)$ у формальні ряди Фур'є за системою $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} X_k(x), \quad x \in \mathbb{R},\ \ j = 0,1,2, \tag{3.23}$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k X_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пара функцій

$$(u, F_0) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta} := C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big) \times H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$$
$$\big((u, F_0) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma} = \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,0} \text{ при } \alpha \in (0,1)\big),$$

задана рядами

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (x,t) \in Q \tag{3.24}$$

і (3.23) при $j = 0$, яка задовольняє рівнячння (3.20) і умови (3.21), (3.22) у $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, називається розв'язком задачі (3.20)–(3.22) за умов (A).

Підставляючи функцію (3.24) в (3.20) і (3.21), (3.22), одержуємо задачі

$$\begin{gathered} {}^{C}D^{\alpha} u_k + k^2 u_k = F_{0k},\ t \in (0,T], \\ u_k(0) = F_{1k}, \quad u_k'(0) = F_{2k}, \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\int\limits_0^{t_0} u_k(t)dt = \Phi_k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.26}$$

для невідомих $u_k(t)$, $t \in [0,T]$ і F_{0k}, $k \in \mathbb{N}$.

Маємо

$$u_k^{(\alpha)} + k^2 u_k = F_{0k}(t) + f_{1-\alpha}(t) F_{1k} + f_{2-\alpha}(t) F_{2k}, \quad t \in (0,T], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

звідки

$$u_k(t) = F_{0k} \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^{\alpha}) d\tau$$
$$+F_{1k} E_{\alpha,1}(-k^2 t^{\alpha}) + F_{2k} t E_{\alpha,2}(-k^2 t^{\alpha}), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $u_{k0}(t)$ – перший доданок у цій формулі. Знайдемо його оцінку:

$$|u_{k0}(t)| \le |F_{0k}| \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} |E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^{\alpha})| d\tau$$

$$\le r_{\alpha,\alpha} |F_{0k}| \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-1} d\tau}{1 + k^2\tau^{\alpha}} = \frac{r_{\alpha,\alpha}}{\alpha k^2} |F_{0k}| ln(1 + k^2 t^{\alpha})$$

$$\leq \frac{r_{\alpha,\alpha}}{\alpha}|F_{0k}|t^{s\alpha}k^{2s-2} \quad \forall s > 0.$$

Нехай $c(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \geq 0, \\ 2^{-\gamma}, & \gamma < 0, \end{cases}$. Тоді $k^{\gamma} \leq c(\gamma)(1+k)^{\gamma}$, і з попередньої оцінки при $s = \theta$

$$(1+k)^{\gamma+2}|u_{k0}(t)| \leq K_0 \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2\theta}, \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

За обмеженістю $E_{\alpha,j}(-k^2t^{\alpha})$, $j = 1, 2$,

$$t^{j-1}|F_{jk}E_{\alpha,j}(-k^2t^{\alpha})|(1+k)^{\gamma+2} \leq K_j|F_{jk}|(1+k)^{\gamma+2},$$

$$t \in [0,T], \ j \in \{1,2\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Отже, функція (3.24) належить до простору $C\big([0,T]; H^{\gamma+2}(\mathbb{R})\big)$ і з формул (3.24) і (3.29) одержуємо оцінку

$$||u||_{C([0,T];H^{\gamma+2}(\mathbb{R}))} \leq \widehat{a}_0||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{2}\widehat{a}_j||F_j||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \qquad (3.28)$$

де $\widehat{a}_j$, $j \in \{0,1,2\}$ – додатні сталі, що не залежать від даних задачі.

З рівнянь у (3.25) випливає існування неперервних похідних ${}^{C}D^{\alpha}u_k(t)$, $t \in (0,T]$ і оцінки:

$$|{}^{C}D^{\alpha}u_k(t)| \leq k^2|u_k(t)| + |F_{0k}(t)|, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$||{}^{C}D^{\alpha}u||_{C([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R}))} = \max_{t\in[0,T]}\sup_{k\in\mathbb{N}}|{}^{C}D^{\alpha}u_k(t)|(1+k)^{\gamma}$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}\Big[\sup_{k\in\mathbb{N}}k^2|u_k(t)|(1+k)^{\gamma} + \sup_{k\in\mathbb{N}}|F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2\theta}(1+k)^{-2\theta}\Big]$$

$$\leq ||u||_{C([0,T];H^{\gamma+2}(\mathbb{R}))} + ||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})}.$$

Отже, $u \in C_{2,\alpha}([0,T]; H^{\gamma}(0,l)\big)$. З останньої нерівності і (3.28) випливає (3.30).

У випадку $\alpha \in (0,1)$ маємо $E_{\alpha,\mu}(-x) > 0$ при $x > 0$, $\mu \geq \alpha$ і

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^{\alpha})d\tau = \int_0^t \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p k^{2p}\tau^{p\alpha+\alpha-1}d\tau}{\Gamma(p\alpha+\alpha)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p k^{2p}t^{p\alpha+\alpha}}{\Gamma(p\alpha+\alpha+1)} = E_{\alpha,\alpha+1}(-k^2t^{\alpha}).$$

Тоді $\quad |u_{k0}(t)| \le K_0 \sup\limits_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| \quad$ і

$$(1+k)^{\gamma+2}|u_{k0}(t)| \le K_0 \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2}, \;\; t\in[0,T], \;\; k\in\mathbb{N}.$$

Далі, як при $\alpha\in(1,2)$, одержуємо, що $u\in C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)$.

Нерівність (3.30) дає неперервну залежність розв'язку від даних. Результатом є

Теорема 5. *Нехай* $\gamma\in\mathbb{R}$, $\theta\in(0,1)$, $F_0\in H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$,

$F_j\in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $j=1,2$, *якщо* $\alpha\in(1,2)$,

$F_0\in H^{\gamma}(\mathbb{R})$, $F_1\in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $F_2=0$, *якщо* $\alpha\in(0,1]$.

Існує единий розв'язок $u\in C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)$ *задачі (3.20), (3.21). Він заданий формулою (3.24), де*

$$\begin{gathered} u_k(t) = F_{0k}k^{-2}\big[1-E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)\big] \\ +F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha) + F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha), \quad t\in[0,T], \quad k\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Розв'язок неперервно залежить від даних (F_0, F_1, F_2), правильні оцінки:

$$||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} \le a_0||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{2} a_j||F_j||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \tag{3.30}$$

де a_j, $j\in\{0,1,2\}$ *– додатні сталі, які не залежать від даних задачі,* $F_2=0$ *і* $\theta=0$ *у (3.30), якщо* $\alpha\in(0,1]$.

Теорема 6. *За припущення (A) існує единий розв'язок* $(u,F_0)\in\mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta}$ *оберненої задачі (3.20) – (3.22). Він має вигляд (3.24) і (3.23) при* $j=0$, *де* $u_k(t)$ *визначені формулою (3.29),*

$$F_{0k} = \Big[\Phi_k - F_{1k}t_0E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha) - F_{2k}t_0^2E_{\alpha,3}(-k^2t_0^\alpha)\Big]k^2\, G_k^{-1}, \; k\in\mathbb{N} \tag{3.31}$$

із $\quad G_k = t_0\big[1-E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha)\big]$.

Розв'язок неперервно залежить від даних F_1, F_2, Φ *і правильні оцінки*

$$\begin{gathered} ||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} + ||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} \\ \le b_0||\Phi||_{H^{\gamma+2\theta+4}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{2} b_j||F_j||_{H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})}, \;\; \alpha\in(1,2), \\ ||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} + ||F_0||_{H^{\gamma}(\mathbb{R})} \le b_0||\Phi||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + b_1||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \;\; \alpha\in(0,1] \end{gathered} \tag{3.32}$$

де b_j, $j \in \{0,1,2\}$ *– додатні сталі, що не залежать від даних задачі.*

Доведення. За теоремою 5 існує єдиний розв'язок прямої задачі (3.20), (3.21). На підставі (3.29) запишемо умови (3.26) у вигляді

$$F_{0k}k^{-2}\int\limits_0^{t_0}\Big[1-E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)\Big]dt$$

$$+\int\limits_0^{t_0}\Big[F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)+F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\Big]dt=\Phi_k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_0^{t_0}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt=t_0E_{\alpha,2}(-k^2{t_0}^\alpha),\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\int\limits_0^{t_0}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)dt=\frac{1}{\alpha k^{4/\alpha}}\int\limits_0^{k^2{t_0}^\alpha}E_{\alpha,2}(-z)z^{\frac{2}{\alpha}-1}dz$$

$$=\frac{1}{k^{4/\alpha}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(k^2{t_0}^\alpha)^{p+\frac{2}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+3)}=t_0^2E_{\alpha,3}(-k^2{t_0}^\alpha),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси, згідно з (A), знаходимо вирази (3.31) для невідомих коефіцієнтів F_{0k}, $k\in\mathbb{N}$.

Покажемо, що знайдений розв'язок належить до $\mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta}$. Тому що $E_{\alpha,\mu}(-k^2t^\alpha)$ ($\mu\in\{\alpha,1,2,3\}$) мають однакові оцінки при великих k, враховуючи формули (3.31), одержуємо

$$(1+k)^{\gamma+2\theta}|F_{0k}|\le c_0\Big[|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+2\theta}$$

$$+|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2\theta-2}+|F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2\theta-2}\Big](1+k)^4$$

$$=c_0\Big[|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+4+2\theta}+|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2\theta+2}+|F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2\theta+2}\Big],\ \alpha\in(1,2),$$

$$(1+k)^\gamma|F_{0k}|\le c_0\Big[|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+4}+\sup_{t\in(0,T]}|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2}\Big],\alpha\in(0,1),\ k\in\mathbb{N}$$

де $c_0>0$, а тоді

$$||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})}\le c_0\Big[||\Phi||_{H^{\gamma+4+2\theta}(\mathbb{R})}+\sum_{j=1}^{2}||F_j||_{H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})}\Big],\ \ \alpha\in(1,2),$$

$$||F_0||_{H^\gamma(\mathbb{R})}\le c_0\Big[||\Phi||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})}+||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}\Big],\ \ \alpha\in(0,1].$$

Отже, $F_0 \in H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$ ($F_0 \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$ при $\alpha \in (0,1]$). Тоді з (3.30) випливає (3.32).

3.2 Застосування функції Гріна

Функцію Гріна широко застосовують для розв'язування задачі Коші, крайових і початково-крайових задач та дослідження властивостей їхніх розв'язків. Вивчимо функції Гріна на підставі основних інтегральних тотожностей та теорії узагальнених функцій (як у [57]).

3.2.1 Поняття функції Гріна

1. Визначимо функцію Гріна крайової задачі для оператора

$$L(x,D) = \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x) D^\gamma, \quad a_\gamma \in C^\infty.$$

Для обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею S (замкненою поверхнею класу C^∞) і довільних $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ правильна *формула Гріна*

$$\int\limits_\Omega [vLu - uL^* v] dy = \int\limits_S \sum_{j=1}^m L_j(y,u,v)\nu_j(y) d_y S,$$

де L^* – формально спряжений оператор до диференціального оператора L, $L_j(y,u,v)$ — лінійні диференціальні вирази з гладкими (нескінченно диференційовними на S) коефіцієнтами порядків $\le m-1$ щодо функцій u, v.

Нехай $\omega^*(y,x)$ — фундаментальна функція оператора $L^*(y,D)$:

$$L^*(y,D)\omega^*(y,x) = \delta(y-x), \; y, x \in \Omega.$$

Як і кожну узагальнену функцію, функцію $\omega^*(y,x)$ можна подати у вигляді

$$\omega^*(y,x) = \lim_{k\to\infty} f_k(y,x)$$

з нескінченно диференційовними f_k. Записуючи формулу Гріна із функціями f_k замість $v(y)$, $u \in C^m(\bar{\Omega})$ і переходячи до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$(\omega^*(y,x), L(y,D)u(y)) - (L^*(y,D)\omega^*(y,x), u(y)) =$$

$$= \int\limits_S \sum_{j=1}^m L_j(y,u,v)\nu_j(y) d_y S.$$

Тут зліва дужками позначено значення узагальненої функції на основну. Враховуючи, що

$$(L^*(y,D)\omega^*(y,x),u(y)) = (\delta(y-x),u(y)) = u(x),$$

а $\omega^*(y,x)$ є регулярною узагальненою функцією, отримаємо

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \omega^*(y,x)L(y,D)u(y)dy -$$

$$\int\limits_{S} \sum_{j=1}^{m} L_j(y,u(y),\omega^*(y,x))\nu_j(y)d_yS, \quad x \in \Omega. \tag{3.33}$$

Це інтегральне зображення функції $u \in C^m(\bar{\Omega})$ в Ω через значення Lu в Ω та значення функції u та її частинних похідних до порядку $m-1$ на межі S області. Вимагаючи від функції $\omega^*(y,x)$ більше, звідси одержуємо зображення розв'язків крайових задач.

Наприклад, для оператора Лапласа ($L = \Delta$) попередня формула набуває вигляду

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \Delta u(y)\omega(x,y)dy +$$

$$\int\limits_{S} [u(y)\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial\nu_y} - \frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}\omega(x,y)]d_yS, \quad x \in \Omega, \tag{3.34}$$

де $\omega(x,y) = \omega^*(y,x)$.

З (3.34), враховуючи, що фундаментальна функція визначена з точністю до адитивного розв'язку $\omega_0(x,y)$ відповідного лінійного однорідного рівняння (тут $\Delta_x\omega_0 = 0,\ x \in \Omega$), одержуємо зображення розв'язку задачі Діріхле

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x) = f_1(x), \quad x \in S$$

у вигляді

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dx + \int\limits_{S} \frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_x} f_1(y)d_xS, \quad x \in \Omega,$$

де $G(x,y) = \omega(x,y) + \omega_0(x,y)$ — *функція Гріна задачі Діріхле* — розв'язок задачі

$$\Delta_x G(x,y) = \delta(x-y), \quad x \in \Omega, \qquad G(x,y) = 0, \quad y \in S.$$

Із формули (3.34) також одержуємо зображення розв'язку задачі Неймана

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = f_1(x), \quad x \in S$$

у вигляді

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} f(y) G_1(x,y) dy - \int\limits_{S} f_1(y) G_1(x,y) d_y S, \quad x \in \Omega,$$

де $G_1(x,y)$ — *функція Гріна задачі Неймана* — розв'язок задачі

$$\Delta_y G_1(x,y) = \delta(x-y), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial \nu_x} = 0, \quad x \in S.$$

Нормальною фундаментальною функцією диференціального оператора L називають таку фундаментальну функцію $\omega(x,y)$ оператора $L(x,D)$, яка (як функція змінної y) є фундаментальною функцією формально спряженого оператора $L^*(y,D)$, тобто

$$L(x,D)\omega(x,y) = \delta(x-y) \text{ та } L^*(y,D)\omega(x,y) = \delta(x-y)\,.$$

Звідси $\qquad \omega(x,y) = \omega^*(y,x)\,.$

Бачимо, що *функція Гріна* $G(x,y)$ *задачі є нормальною фундаментальною функцією оператора* $L(x,D)$, *що задовольняє відповідну крайову умову.*

Примітка. Можна довести, що з зображення довільного класичного розв'язку задачі випливають використані нами властивості функції $G(x,y)$. Тому *функцією Гріна задачі також називають таку функцію* $G(x,y)$, *що для довільного класичного розв'язку задачі правильне відповідне інтегральне зображення.*

Існування функції Гріна загальної крайової задачі для самоспряженого еліптичного диференціального оператора доведено в [2]. Лопатинським Я.Б. [11] доведено існування нормальної фундаментальної функції загального еліптичного диференціального оператора.

2. Визначимо функцію Гріна першої крайової задачі для оператора теплопровідності

$$L(x,t,D) = -\frac{\partial}{\partial t} + a^2 \Delta,$$

де $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$, тобто задачі

$$L(x,t,D)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T], \tag{3.35}$$

$$u(x,t) = f_1(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T = S \times (0,T], \quad u|_{t=0} = f_2(x), \quad x \in \Omega.$$

Формула Гріна набуває вигляду

$$\int\limits_0^T d\tau \int\limits_\Omega [vLu - uL^*v]dy = a^2 \int\limits_0^T d\tau \int\limits_S [v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}]dS +$$

$$+ \int\limits_\Omega v(y,0)u(y,0)dy - \int\limits_\Omega v(y,T)u(y,T)dy, \qquad u,v \in C^\infty(\bar{Q}_T),$$

де $L^*v = \frac{\partial v}{\partial \tau} + a^2 \Delta v$.

Нехай $v = G^*(y,\tau;x,t)$ — розв'язок задачі

$$L^*(y,\tau,D)G^*(y,\tau;x,t) = \delta(y-x,\tau-t), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_T, \tag{3.36}$$

$$G^*(y,\tau;x,t) = 0, \quad (y,\tau) \in \Gamma_T = S \times [0,T],\ (x,t) \in Q_T,$$
$$G^*(y,\tau;x,t) = 0, \quad x,y \in \Omega,\ \tau \le t.$$

Як у попередніх випадках, із формули Гріна знаходимо зображення розв'язку задачі (3.35) у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau)f(y,\tau)dy +$$

$$+a^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} f_1(y,\tau)d_yS + \tag{3.37}$$

$$+ \int\limits_\Omega G(x,t;y,0)f_2(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T,$$

де $G(x,t;y,\tau) = G^*(y,\tau;x,t)$, також $G(x,t;y,\tau) = 0$ при $\tau \ge t$, і функція $G(x,t;y,\tau)$ є розв'язком задачі

$$L(x,t,D)G(x,t;y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau),\ (x,t),(y,\tau) \in Q_T,$$
$$G(x,t;y,\tau) = 0, \quad (y,\tau) \in \Gamma_T,$$
$$G(x,t;y,\tau) = 0, \quad x,y \in \Omega, \quad \tau \ge t.$$

Вона називається *функцією Гріна* задачі (3.35).

Івасишеним С.Д. [9] доведено існування функції Гріна загальної параболічної за Петровським крайової задачі.

Функцією Гріна задачі (3.35) також називають таку функцію $G(x,t;y,\tau)$, що класичний розв'язок задачі набуває вигляду (3.37). З наведеного вище випливає еквівалентність обох означень.

3. Нагадаємо, що регуляризованою похідною порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m=1,2,\dots$ функції v називають функцію

$$ {}^{C}D_t^{\beta}v(t) = \int_0^t f_{m-\beta}(t-\tau)u^{(m)}(\tau)d\tau $$
$$ = \tfrac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1}u^{(m)}(\tau)d\tau\,,\ t\in[0,T]\,. $$

У працях Ейдельмана С.Д. і Кочубея О.Н. (наприклад, [10], [34]) було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівняння

$$ {}^{C}D_t^{\beta}u(x,t) = A(x,D)u(x,t),\ (x,t)\in R^n\times[0,T] $$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta\in(0,1)$ за змінною t, де $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з гладкими коефіцієнтами, залежними тільки від просторових змінних $x\in\mathbb{R}^n$.

Відомі потенціали Ріса (див., напр., [55])

$J_\alpha u = J_\alpha * u$, де $J_\alpha(x) = c_{\alpha,n}|x|^{\alpha-n}$, $c_{\alpha.n} = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha}\Gamma(\frac{\alpha}{2})$, якщо $0<\alpha<n$, які володіють властивістями

$$ J_\alpha * J_\beta = J_{\alpha+\beta},\ \ -\Delta J_{\alpha+2}u = J_\alpha u, $$

і вони можуть бути продовженими на випадок від'ємних α так, що

$$ (-\Delta)^s u = J_{-2s}u,\ \ s\in\mathbb{R}, $$

а також можуть бути визначеними за допомогою перетворення Фур'є:

$$ \mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}g(x)] = |\xi|^\alpha\mathcal{F}[g(x)]\,. $$

Зауважимо, що потенціали Бесселя

$$ I_\gamma(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\gamma/2}\Gamma(\gamma/2)} \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/s}e^{-\frac{s}{4\pi}}s^{\frac{\gamma-n}{2}-1}ds, $$

також володіють властивістю

$$ I_\alpha * I_\gamma = I_{\alpha+\gamma},\quad \alpha\ge0,\ \gamma\ge0 $$

і визначено оператори

$$\mathcal{I}_\gamma f = I_\gamma * f = (1-\Delta)^{-\gamma/2} \text{ і обернені } \mathcal{I}_{-\gamma} f = (1-\Delta)^{\gamma/2},$$

для яких також

$$\mathcal{F}[\mathcal{I}_{-\gamma} f] = (1+|\xi|^2)^{\gamma/2}.$$

Розглянемо рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2} u = F(x,t),\ (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T] \tag{3.38}$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (1,2)$.

Нехай $D(\bar{Q}_T)$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_T$, $C_{\alpha,\beta}(Q_T)$ — клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$, які дорівнюють нулю при $t \geq T$ та з неперервними функціями $(-\Delta)^{\alpha/2} v$, ${}^C D_t^\beta v$ в Q_T.

Введемо оператори

$\widehat{L} : (\widehat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) \widehat{*} v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t)$,

$L : (Lv)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t),\ v \in D(\bar{Q}_T)$,

$L^{reg} : (L^{reg}v)(x,t) \equiv {}^C D_t^\beta v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t), v \in C_{\alpha,\beta}(\bar{Q}_T)$, $(x,t) \in Q_T$

і функційний простір

$$X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T) : \widehat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T)\}.$$

Можна довести, що $X(\bar{Q}_T)$ непорожній.

Для $v \in C_{\alpha,\beta}(Q_T)$, $\beta \in (1,2)$, $\psi \in D(\bar{Q}_T)$ *правильна формула Гріна*

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (L^{reg}v)(x,t)\psi(x,t)dxdt+ \tag{3.39}$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)dx \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} v_t(x,0)dx \int\limits_0^T f_{2-\beta}(t)\psi(x,t)dt.$$

Останнього доданка нема при $\beta \in (0,1]$.

При $\beta \in (0,1)$ у розділі 1 ми вивели формулу інтегрування частинами

$$\int\limits_0^T {}^C D^\beta u\, v dt = \int\limits_0^T u\big(f_{-\beta} \widehat{*} v\big) dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t) u(0) v(t) dt.$$

Звідси і з самоспряженості оператора $(-\Delta)^{\alpha/2}$ випливає формула Гріна.

Примітка: $\int\limits_0^T v^{(\beta)}\ \psi dt = \int\limits_0^T v\big(f_{-\beta}\widehat{*}\psi\big) dt$, тобто
$$\int\limits_0^T (f_{-\beta} * v)\ \psi dt = \int\limits_0^T v\big(f_{-\beta}\widehat{*}\psi\big) dt\,.$$

Вектор-функцією Гріна задачі Коші

$$L^{reg} u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad \beta \in (1,2), \tag{3.40}$$

$$u(x,0) = g_1(x),\ u_t(x,0) = g_2(x), \ \ x \in R^n \tag{3.41}$$

називається така трійка функцій $(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t))$, що при достатньо гладких і фінітних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) g_0(y,\tau) dy + \tag{3.42}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) g_j(y) dy, \quad (x,t) \in Q_T$$

є класичним (класу $C_{\alpha,\beta}(Q_T)$) розв'язком цієї задачі.

У випадку сталих коефіцієнтів рівняння компоненти вектор-функції Гріна залежать від різниць аргументів: (x,t,y,τ) можна замінити на $(x-y, t-\tau)$.

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$$\begin{aligned}
&LG_0(x,t) = \delta(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q_T\,,\\
&L^{reg} G_j(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \ \ j = 1,2\,,\\
&G_0(x,0) = 0, \quad (G_0)_t(x,0) = 0\,,\\
&G_1(x,0) = \delta(x), \quad (G_1)_t(x,0) = 0\,,\\
&G_2(x,0) = 0, \quad (G_2)_t(x,0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

3.2.2 Побудова фундаментальної функції і вектор-функції Гріна задачі Коші

Використовують такі основні методи побудови вектор-функцій Гріна початково-крайових задач: метод функції Леві, для плоских областей метод конформних відображень, для областей спеціального вигляду метод дзеркальних відображень, метод рядів Фур'є, метод інтегральних перетворень.

Метод рядів Фур'є використано, наприклад, у [20] для побудови функції Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a(t)u_{xx} = F(x,t).$$

Загалом для побудови фундаментальної функції чи вектор-функції Гріна для параболічних чи гіперболічних рівнянь можна використовувати перетворення Лапласа за змінною t (тоді одержимо задачу на знаходження функції Гріна стаціонарної задачі), перетворення Фур'є за змінними x (тоді треба буде шукати функцію Гріна задачі Коші), або й обидва перетворення.

Вектор-функцію Гріна задачі Коші знайдемо методом продовження розв'язку нулем при $t<0$ (так званим операційним методом в узагальнених функціях). Для задач Коші він запропонований у [3] і може бути використаний для загальних крайових задач (див., зокрема, [12]). А для побудови фундаментальної функції застосуємо метод перетворення Фур'є.

1. Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, t\in(0,+\infty), \quad u(x,0)=u_0(x) \tag{3.43}$$

спочатку при неперервних даних (f, u_0).

Нехай $u(x,t)$ — регулярний розв'язок задачі (3.43),

$$U(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}, \; F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}.$$

Тоді, використовуючи формулу диференціювання кусково-гладкої функції (див. підрозділ 1.3), знаходимо

$$\tfrac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} + u_0(x)\delta(t), \; \Delta U(x,t) = \begin{cases} \Delta u(x,t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases},$$

і замість задачі (3.43) одержимо, що $U(x,t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\Delta U = F(x,t) + u_0(x)\delta(t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \tag{3.44}$$

в просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Введемо позначення $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ і функційний простір

$$\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1}) = \{F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) : F=0 \text{ при } t<0\}.$$

Функції цього простору мають властивості простору $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Рівняння (3.44) має сенс також для довільних узагальнених функцій $F \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (не тільки регулярних), а задачу про знаходження його розв'язку $U \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$ називають узагальненою задачею Коші.

Означення 3.1. *При $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ розв'язком задачі Коші (3.43) називаємо таку узагальнену функцію $U \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$, що задовольняє рівняння (3.44).*

За теоремами 4-6 із розділу 1, функція

$$U(x,t) = \omega(x,t) * \big(F(x,t) + u_0(x)\delta(t)\big),$$

де $\omega(x,t)$ — фундаментальна функція оператора теплопровідності, є розв'язком рівняння (3.44), єдиним у просторі $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$, оскільки $\omega \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$, права частина рівняння належить цьому простору й існує їхня згортка, що також належить цьому простору.

Побудуємо фундаментальну функцію оператора теплопровідності, тобто узагальнений розв'язок $\omega(x,t)$ рівняння

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - a^2 \Delta \omega = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\widehat{\omega}(\sigma_1 \ldots, \sigma_n, t) = \mathcal{F}_{x\to s}[\omega(x_1, \ldots, x_n, t)]$ – перетворення Фур'є за змінними $x_1, \ldots, x_n$ функції $\omega(x,t)$. Тоді

$$\mathcal{F}_{x\to s}[\Delta\omega(x,t)] = -|s|^2 \widehat{\omega}(s,t).$$

Доведемо, що $\qquad \mathcal{F}_{x\to s}[\frac{\partial \omega}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{x\to s}[\omega] = \frac{\partial \widehat{\omega}(s,t)}{\partial t}$.

Справді, для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$(\mathcal{F}_{x\to s}[\tfrac{\partial \omega}{\partial t}], \varphi) = (\tfrac{\partial \omega}{\partial t}, \mathcal{F}_{x\to s}[\varphi]) = -(\omega, \tfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{x\to s}[\varphi]) =$$

$$= -(\omega, \mathcal{F}_{x\to s}[\tfrac{\partial \varphi}{\partial t}]) = -(\mathcal{F}_{x\to s}[\omega], \tfrac{\partial \varphi}{\partial t}) = (\tfrac{\partial \mathcal{F}_{x\to s}[\omega]}{\partial t}, \varphi).$$

Ми використали можливість диференціювання за параметром t інтегралів від гладких функцій. Також за властивістю перетворення Фур'є прямого добутку

$$\mathcal{F}_{x\to s}[\delta(x,t)] = \mathcal{F}_{x\to s}[\delta(x) \cdot \delta(t)] = \mathcal{F}_{x\to s}[\delta(x)] \cdot \delta(t) = 1(s) \cdot \delta(t).$$

Тому функція $\widehat{\omega}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t} + a^2 |s|^2 \widehat{\omega} = 1(s) \cdot \delta(t),$$

а вважаючи s параметром, одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\widehat{\omega}}{dt} + a^2|s|^2\widehat{\omega} = \delta(t),$$

тобто $\widehat{\omega}$ є фундаментальною функцією звичайного диференціального оператора $\frac{d}{dt} + a^2|s|^2$ і, як у попередньому розділі, отримаємо

$$\widehat{\omega}(s,t) = \theta(t)e^{-a^2|s|^2t}.$$

Тепер $\omega(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}[\theta(t)e^{-a^2|s|^2t}] = (2\pi)^{-n}\theta(t)\mathcal{F}_{s\to x}[e^{-a^2|s|^2t}]$.

Знаходимо

$$\mathcal{F}[e^{-b^2\sigma^2}] = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-b^2\sigma^2}e^{ix\sigma}dx = \frac{\pi^{1/2}}{b}e^{-\frac{x^2}{4b^2}} \text{ при } \sigma, x \in \mathbb{R},\ b = const,$$

а приймаючи $b = at^{1/2}$, матимемо

$$F_{s\to x}[e^{-a^2|s|^2t}] = \mathcal{F}_{s\to x}[e^{-a^2s_1^2t}\cdot\ldots\cdot e^{-a^2s_n^2t}] =$$
$$= \mathcal{F}_{s_1\to x_1}[e^{-a^2s_1^2t}]\cdot\ldots\cdot\mathcal{F}_{s_n\to x_n}[e^{-a^2s_n^2t}] =$$
$$= \left(\frac{\pi^{1/2}}{at^{1/2}}\right)^n e^{-\frac{x_1^2}{4a^2t}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{x_n^2}{4a^2t}} = \left(\frac{\pi^{1/2}}{at^{1/2}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

У підсумку одержуємо

$$\omega(x,t) = \frac{\theta(t)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a)^n(\pi t)^{n/2}}.$$

Оскільки

$$\omega(x,t) * \big(u_0(x)\delta(t)\big) = \omega(x,t) * u_0(x),$$

де справа згортка лише за змінними x, фундаментальна функція ω побудована та дорівнює нулю при $t < 0$, одержуємо одразу розв'язок задачі (3.43)

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a)^n(\pi t)^{n/2}} * F(x,t) + \frac{\theta(t)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a)^n(\pi t)^{n/2}} * u_0(x),$$
$$x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, +\infty).$$

У випадку класичної задачі Коші (для неперервних та обмежених $f(x,t)$, $u_0(x)$) ця формула набуває вигляду формули Пуассона для рівняння теплопровідності

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(2a)^n\pi^{n/2}(t-\tau)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y,\tau)dy +$$

$$+\frac{1}{(2a)^n\pi^{n/2}t^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)dy, \quad x\in\mathbb{R}^n, t\in(0,+\infty).$$

Тут $G_0(x-y,t-\tau)=\omega(x-y,t-\tau)$, $G_1(x-y,t)=\omega(x-y,t)=G_0|_{\tau=0}$.

2. Розглянемо задачу Коші для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+,$$

$$u(x,0)=u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.45}$$

Якщо $u(x,t)$ — регулярний розв'язок задачі (3.43), $U(x,t)$, $F(x,t)$ введені як у попередньому пункті, то задачу (3.45), використовуючи формулу диференціювання кусково-гладкої функції, зводимо до рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\Delta U=F(x,t)+u_0(x)\delta'(t)+u_1(x)\delta(t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.46}$$

Означення 3.2. *При $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $u_0,u_1\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ розв'язком задачі Коші (3.45) називаємо таку узагальнену функцію $U\in\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$, що задовольняє рівняння (3.46).*

За теоремами 4-6 із розділу 1, функція

$$U(x,t)=\omega(x,t)*\big(F(x,t)+u_0(x)\delta'(t)+u_1(x)\delta(t)\big),$$

де $\omega(x,t)$ — фундаментальна функція хвильового оператора, є розв'язком рівняння (3.46), єдиним у просторі $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$ (права частина рівняння належить цьому простору й існує згортка, що також належить цьому простору).

Побудуємо фундаментальну функцію хвильового оператора, тобто узагальнений розв'язок $\omega(x,t)$ рівняння

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-a^2\Delta\omega=\delta(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Нехай $\widehat{\omega}(s_1,\ldots,s_n,t)=\mathcal{F}_{x\to s}[\omega(x_1,\ldots,x_n,t)]$. Згідно з міркуваннями попереднього випадку, функція $\widehat{\omega}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2\widehat{\omega}}{\partial t^2}+a^2|s|^2\widehat{\omega}=1(s)\cdot\delta(t),$$

а вважаючи s параметром, матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\widehat{\omega}}{dt^2}+a^2|s|^2\widehat{\omega}=\delta(t),$$

тобто $\widehat{\omega}$ є фундаментальною функцією звичайного диференціального оператора $\frac{d^2}{dt^2}+a^2|s|^2$ і, як у розділі 2, отримаємо

$$\widehat{\omega}(s,t)=\theta(t)\frac{\sin(a|s|t)}{a|s|}.$$

Тепер

$$\omega(x,t)=\mathcal{F}^{-1}_{s\to x}[\theta(t)\tfrac{\sin(a|s|t)}{a|s|}]\,.$$

Використовуємо відомі перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}[\theta(R-|x|)]=\tfrac{2\sin(R\sigma)}{\sigma}\,,\qquad n=1\,,$$
$$\mathcal{F}[\tfrac{\theta(R^2-|x|^2)}{(R^2-|x|^2)^{1/2}}]=\tfrac{2\pi\sin(R|\sigma|)}{|\sigma|}\,,\qquad n=2\,,$$
$$\mathcal{F}[\delta_R]=\tfrac{4\pi R\sin(R|\sigma|)}{|\sigma|}\,,\qquad n=3\,,$$

де δ_R — простий шар на сфері S_R радіуса R із центром у початку координат. Звідси при $R=at$ знаходимо

$$\omega(x,t)=\tfrac{1}{2a}\theta(at-|x|)\,,\qquad n=1\,,$$
$$\omega(x,t)=\omega(x_1,x_2,t)=\tfrac{\theta(a^2t^2-|x|^2)}{2\pi a(R^2-|x|^2)^{1/2}}\,,\qquad n=2\,,$$
$$\omega(x,t)=\omega(x_1,x_2,x_3,t)=\tfrac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{at}\,,\qquad n=3\,.$$

Враховуючи, що

$$\omega(x,t)*\big(u_0(x)\delta'(t)\big)=\tfrac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}*u_0(x)\,,$$
$$\omega(x,t)*\big(u_1(x)\delta(t)\big)=\omega(x,t)*u_1(x)\,,$$

де справа згортки лише за змінними x, одержуємо розв'язок задачі (3.45)

$$u(x,t)=\omega(x,t)*F(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t)*u_0(x)+\omega(x,t)*u_1(x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_+,$$

зокрема,

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2a}[\theta(at-|x|)*F(x,t)+$$
$$+\tfrac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|)*u_0(x)+\theta(at-|x|)*u_1(x)],\quad n=1,$$
$$u(x,t)=\tfrac{\theta(a^2t^2-|x|^2)}{2\pi a(R^2-|x|^2)^{1/2}}*F(x,t)+\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\theta(a^2t^2-|x|^2)}{2\pi a(R^2-|x|^2)^{1/2}}*u_0(x)+$$
$$+\tfrac{\theta(a^2t^2-|x|^2)}{2\pi a(R^2-|x|^2)^{1/2}}*u_1(x),\quad n=2,$$
$$u(x,t)=\tfrac{1}{4\pi a^2}\tfrac{\delta_{at}(x)}{t}*F(x,t)+$$
$$+\tfrac{1}{4\pi a^2}[\tfrac{\partial}{\partial t}\big(\tfrac{\delta_{at}(x)}{t}\big)*u_0(x)+\tfrac{\delta_{at}(x)}{t}*u_1(t)],\quad n=3.$$

Зауважимо, що у випадку локально інтегровних f, u_0, u_1 та достатньо гладких одержуємо класичні розв'язки та відомі формули розв'язків (формули Даламбера, Пуассона, Кірхгофа). Справді,

$$\frac{1}{2a}\theta(at-|x|)*u_1(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_{\mathbb{R}}u_1(y)\theta(at-|x-y|)dy=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(y)dy,\quad n=1,$$

$$\frac{\theta(a^2t^2-|x|^2)}{2\pi a(R^2-|x|^2)^{1/2}}*u_1(x)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}u_1(y)\frac{\theta(a^2t^2-|x-y|^2)}{(R^2-|x-y|^2)^{1/2}}dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{y:|y-x|<at}\frac{u_1(y_1,y_2)dy_1dy_2}{(R^2-|x-y|^2)^{1/2}},\quad n=2,$$

$$\frac{1}{4\pi a^2t}\delta_{at}(x)*u_1(x)=\frac{1}{4\pi a^2t}\big(\delta_{at}(x-y),u_1(y)\big)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2t}\int\limits_{y:||y-x|=at}u_1(y)d_yS,\quad n=3.$$

Інші доданки обчислюють подібно.

3. Розглянемо задачу Коші

$$^C D_t^\beta u+a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u=F(x,t),\quad (x,t)\in Q_T=\mathbb{R}^n\times(0,T],\tag{3.47}$$

$$u(x,0)=F_1(x),\ u_t(x,0)=F_2(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n$$

з похідною Джрбашяна-Капуто порядку $\beta\in(1,2)$ та оператором $(-\Delta)^{\alpha/2}$, визначеним вище за допомогою перетворення Фур'є.

Його одновимірний випадок (точніше, при $-b\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}+c(u-F_1)$ замість $a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u$) – це дробова модель біотепла Пеннеса [30], яка широко використовується для вивчення теплопередачі в тканинах шкіри. Тут використано припущення Пеннеса (у 1948 році), що швидкість теплопередачі між кров'ю і тканиною пропорційна, зокрема, різниці між температурою артеріальної крові та місцевою температурою тканини.

Якщо $u(x,t)$ — регулярний розв'язок задачі (3.47), $U(x,t)$ введено, як у попередніх пунктах, то задача (3.47) зводиться до рівняння

$$U_t^{(\beta)}+a^2(-\Delta)^{\alpha/2}U=\theta(t)F(x,t)+f_{1-\beta}(t)F_1(x)+f_{2-\beta}(t)F_2(x),\quad x\in\mathbb{R}^{n+1}.\tag{3.48}$$

При $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $F_1,F_2\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ функція

$$U(x,t)=\omega(x,t)*\Big(\theta(t)F(x,t)+f_{1-\beta}(t)F_1(x)+f_{2-\beta}(t)F_2(x)\Big),$$

де $\omega(x,t)$ — фундаментальна функція, є розв'язком рівняння (3.48), єдиним у просторі $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$ (права частина рівняння належить цьому простору й існує згортка, що також належить цьому простору). Цей розв'язок при регулярних даних можемо подати у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)F(y,\tau)dy + \tag{3.49}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)F_j(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T,$$

де $G_0(x,t) = \omega(x,t)$, $G_j(x,t) = \omega(x,t) * f_{j-\beta}(t)$, $j = 1,2$.

Для знаходження фундаментального розв'язку $\omega(x,t) = G_0(x,t)$ треба розв'язати рівняння

$$G_{0t}^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}G_0 = \delta(x,t) \tag{3.50}$$

у просторі узагальнених функцій. Позначимо

$$\widehat{G}_0(\xi,t) = \mathcal{F}_{x\to\xi}[G_0(x,t)].$$

Після перетворення Фур'є рівняння (3.50) перейде у рівняння

$$\widehat{G}_{0t}^{(\beta)} + a^2|\xi|^\alpha \widehat{G}_0 = \delta(t), \tag{3.51}$$

яке вже вміємо розв'язувати, а отже, маємо розв'язок

$$\widehat{G}_0(\xi,t) = t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta).$$

Згідно з результатом із 2.3.2,

$$E_{\beta,1}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = f_{1-\beta}(t) * \left(t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\right),$$
$$tE_{\beta,2}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = f_{2-\beta}(t) * \left(t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\right),$$

і для розв'язку задачі Коші (3.47) матимемо

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)] = t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\widehat{F}(\xi,t) +$$

$$+E_{\beta,1}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\widehat{F}_1(\xi) + tE_{\beta,2}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\widehat{F}_2(\xi).$$

Залишилось знайти обернене перетворення Фур'є. Це зроблено [10,38,31]. Фундаментальний розв'язок $G_0(x,t)$ рівняння (3.50) має вигляд

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1)(\beta,\beta) \\ (1,1)(n/2,\alpha/2)(1,\alpha/2) \end{matrix} \right), \tag{3.52}$$

де $\quad H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right) := H^{m,n}_{p,q}(z)$ — H-функція Фокса [36],

$$H^{m,n}_{p,q}(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(s) z^{-s} ds,$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\Pi_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \Pi_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\Pi_{i=n+1}^q \Gamma(a_i + \alpha_i s) \Pi_{j=m+1}^p \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)},$$

$$z^{-s} = \exp[-s(log|z| + iargz)], \quad z \neq 0\,,\; i^2 = -1\,,$$

$\mathbb{C}$ — безмежний контур, що відокремлює полюси $b_{jl} = \frac{-b_j - l}{\beta_j}$, $1 \le j \le m$, $l = 0,1,\dots$ функції $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ наліво і полюси $a_{ik} = \frac{1 - a_i - k}{\alpha_i}$, $1 \le i \le n$, $k = 0,1,\dots$ функції $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ направо (припускається, що вони не збігаються).

Зауважимо, що правильне зображення [36]

$$E_{\beta,\gamma}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = H^{1,1}_{1,2}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \middle| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1)(1-\gamma,\beta) \end{matrix} \right)$$

через H-функції Фокса, а обернене перетворення Фур'є [30]

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[E_{\beta,\gamma}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)] = \frac{1}{\alpha|x|} H^{2,1}_{3,3}\left(\frac{|x|}{(a^2|t^\beta)^{\frac{1}{\alpha}}} \middle| \begin{matrix} (1,\frac{1}{\alpha}) & (\gamma,\frac{\beta}{\alpha}) & (1,\frac{1}{2}) \\ (1,\frac{1}{\alpha}) & (1,1) & (1,\frac{1}{2}) \end{matrix} \right).$$

Також

$$E^{(m)}_{\beta,\gamma}(z) = H^{1,1}_{1,2}\left(-z \middle| \begin{matrix} (-m,1) & \\ (0,1) & (1-\beta m-\gamma,\beta)) \end{matrix} \right).$$

У випадку задачі Коші для параболічного рівняння $G_1(x,t) = G_0(x,0)$. Для рівняння з дробовою похідною $G_1(x,t) \neq G_0(x,0)$. Загалом для рівняння з дробовою похідною

$$G_j(x-y,t) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad j = 1,2. \tag{3.53}$$

При $\alpha = 2$, $\beta \in (0,1)$ відомі [38] оцінки компонент вектор-функції Гріна:

$$|D^\alpha G_0(x,t)| \le Ct^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}+\beta-1} e^{-c(|x|t^{-\frac{\beta}{2}})^{\frac{2}{2-\beta}}} \Psi_{n+|\alpha|-2}(|x|t^{-\frac{\beta}{2}}),$$
$$|D^\alpha G_1(x,t)| \le Ct^{-\beta\frac{n+|\alpha|}{2}} e^{-c(|x|t^{-\frac{\beta}{2}})^{\frac{2}{2-\beta}}} \Psi_{n+|\alpha|-2}(|x|t^{-\frac{\beta}{2}}) \qquad (3.54)$$

де $\Psi_m(z) = \begin{cases} 1, & m<0 \\ 1+|ln|z||, & m=0 \\ |z|^{-m}, & m>0 \end{cases}$ при $|z|<1$, $\Psi_m(z)=\Psi_m(1)$ при $|z|>1$,

і, наприклад, $c < (2-\beta)\Big(\frac{\beta^\beta}{4}\Big)^{\frac{1}{2-\beta}}$, якщо $A(D)=\Delta$.

Тут c, C і далі c_k, C_k ($k \in \mathbb{Z}_+$) – додатні сталі. Також, детальніше, при $|x| > t^{\frac{\beta}{2}}$

$$|G_0(x,t)| \le C\frac{t^{\beta-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\Big)^{1+\frac{n-\beta}{2(2-\beta)}} e^{-c\big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\big)^{\frac{1}{2-\beta}}},$$

$$|G_j(x,t)| \le C\frac{t^{j-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\Big)^{\frac{n+2-2j}{2(2-\beta)}} e^{-c\big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\big)^{\frac{1}{2-\beta}}}, \quad j=\overline{1,m};$$

при $|x| < t^{\frac{\beta}{2}}$

$$|G_0(x,t)| \le C\frac{t^{\beta-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\Big)^{\min\{1,\frac{n}{2}\}} = C\begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{t}, & n>2 \\ \frac{1}{t}\big(1+\big|ln\frac{|x|^2}{t^\beta}\big|\big), & n=2 \\ t^{\frac{\beta}{2}-1}, & n=1 \end{cases},$$

$$|G_j(x,t)| \le C\frac{t^{j-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\beta}\Big)^{\min\{1,\frac{n}{2}\}} = C\begin{cases} |x|^{2-n}t^{j-1-\beta}, & n>2 \\ t^{j-1-\beta}\big(1+\big|ln\frac{|x|^2}{t^\beta}\big|\big), & n=2 \\ t^{j-1-\frac{\beta}{2}}, & n=1 \end{cases},$$

$j=\overline{1,m}$.

При $\alpha \ne 2$ оцінки компонент вектор-функції Гріна знайдені в [14].

Зупинимось на випадку $\alpha = 2$. Введемо позначення:

$$(G_j\varphi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(y,t)dy,$$
$$(\widehat{G_j}\varphi)(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x,t)dx, \ j=0,1,2.$$

Лема 1. *При* $\beta \in (m-1,m)$, $m=1,2$, *для всіх* $k \in \mathrm{Z}_+$, *мульти-індексів* κ, $|\kappa|=k$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ *правильні оцінки*

$$\big|D_y^\kappa(\widehat{G_0}\varphi)(y,t)\big| \le c_k t^{\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k}, \ (y,t)\in Q,$$
$$\big|D_y^\kappa(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\big| \le c_k t^{j-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k}, \ (y,t)\in \bar{Q}_T, \ j=\overline{1,m},$$

де $\quad ||\varphi||_{\mathcal{D}^k} = \max\limits_{t\in[0,T]} \max\limits_{|\kappa|\le k} \sup\limits_{x\in\mathrm{R}^n} |D^\kappa \varphi(x,t)|$.

Доведення. З оцінок компонент вектор-функції Гріна при $n>2$ для всіх α, $|\alpha|=k$, $\varphi\in\mathcal{D}(\bar{Q})$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t)D^\alpha\varphi(x,t)dx\Big|$$

$$\le \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2<t^\beta\}} G_0(x-y,t)|D^\alpha\varphi(x,t)|dx$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2>t^\beta\}} G_0(x-y,t)|D^\alpha\varphi(x,t)|dx \le$$

$$\le Ct^{-\frac{\beta n}{2}+\beta-1}\Big[\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|<t^{\frac{\beta}{2}}\}} [|x-y|t^{-\frac{\beta}{2}}]^{2-n}|D^\alpha\varphi(x,t)|dx$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|>t^{\frac{\beta}{2}}\}} e^{-c[|x-y|t^{-\frac{\beta}{2}}]^{\frac{2}{2-\beta}}}|D^\alpha\varphi(x,t)|dx\Big],$$

а переходячи до сферичної системи координат, матимемо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t)D^\alpha\varphi(x,t)dx\Big| \le$$

$$\le C_1\Big[t^{\beta-1}+t^{\beta-1}\int\limits_1^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-\beta}e^{-cz}\,dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k} \le$$

$$\le C_2 t^{\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k}, \quad y\in\mathbb{R}^n,\ \ 0<t\le T.$$

Подібно знаходимо оцінки

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)D^\alpha\varphi(x,t)dx\Big| \le$$

$$\le C_3\Big[t^{j-1}+t^{j-1}\int\limits_1^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-j}e^{-cz}\,dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k} \le C_4 t^{j-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k}, \quad (y,t)\in\bar{Q},$$

$j=\overline{1,m}$. Інтегруючи частинами, $D_y^\kappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x,t)dx$ виражаємо через виписані вище інтеграли. З їхніх оцінок одержуємо потрібний результат.

Такі ж оцінки правильні для похідних від $(G_j\varphi)(x,t)$, $(x,t)\in Q$, $j=0,1,2$.

Примітка. Лема 1 залишається правильною при заміні операторів $\widehat{G_j}$ операторами G_j, $j=0,1,2$.

3.2.3 Вектор-функція Гріна першої крайової задачі та властивості спряжених операторів Гріна

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $S=\partial\Omega$ – межа області Ω (класу C^∞), $Q_T=\Omega\times(0,T]$, $Q_{1T}=S\times(0,T]$,

$D(\bar\Omega)=C^\infty(\bar\Omega)$,

$D(\bar Q_T)=\{\varphi\in C(\bar Q_T):\varphi(\cdot,t)\in D(\bar\Omega)\ \ \forall t\in[0,T]\}$,

$D(\bar Q_{1T})=\{\varphi\in C(\bar Q_{1T}):\varphi(\cdot,t)\in D(S)\ \ \forall t\in[0,T]\}$,

$X(\bar Q_T)=\{\varphi\in D(\bar Q_T):\ \varphi|_{t=T}=0,\ \widehat{L}\varphi\in D(\bar Q_T),\ \varphi|\bar Q_{1T}=0\}$,

$D'(\bar\Omega), D'(\bar Q_T), D'(\bar Q_{1T}), X'(\bar Q_T)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $D(\bar\Omega), D(\bar Q_T), D(\bar Q_{1T}), X(\bar Q_T)$,

$(f,\varphi)_0$ – значення $f\in D'(\bar Q_T)$ на основній функції $\varphi\in D(\bar Q_T)$,

$(f,\varphi)_1$ – значення $f\in D'(\bar Q_{1T})$ на основній функції $\varphi\in D(\bar Q_{1T})$,

$(f,\varphi)_2$ – значення $f\in D'(\bar\Omega)$ на основній функції $\varphi\in D(\bar\Omega)$,

$C_{2,\beta}(\bar Q_T)=\{v\in C(\bar Q_T):\ {}^CD_t^\beta v,\Delta v\in C(Q_T)\}$.

Розглянемо першу крайову задачу

$$f_{-\beta}(t)*u(x,t)-a^2\Delta u(x,t)=F(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{3.55}$$

$$u(x,t)=F_1(x,t),\quad (x,t)\in Q_{1T},\qquad u(x,0)=F_2(x),\quad x\in\Omega \tag{3.56}$$

при $\beta\in(0,1)$ і $F\in D'(\bar Q_T)$, $F_1\in D'(\bar Q_{1T})$, $F_2\in D'(\bar\Omega)$.

Вектор-функція $(G_0(x,t),G_1(x,t),G_2(x,t))$ така, що при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy+ \tag{3.57}$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G_1(x-y,t-\tau)g_1(y,\tau)dS+\int\limits_\Omega G_2(x-y,t)g_2(y)dy,\quad (x,t)\in Q_T$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(\bar{Q}_T)$) розв'язком задачі

$$ {}^{C}D_t^{\beta}u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.58}$$

$$u(x,t) = g_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = g_2(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.59}$$

називається вектор-функцією Гріна задачі (3.55), (3.56) (а також задачі (3.58), (3.59)).

З означення випливає, що

$$(LG_0)(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,,\ G_0(x,t) = 0,\ (x,t) \in Q_{1T}\,,$$

$G_0(x,0) = 0, \quad x \in \Omega$, де δ – дельта-функція Дірака,

$$(L^{reg}G_1)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T\,,\ G_1(x,t) = \delta(x,t),\ (x,t) \in Q_{1T},$$

$$G_1(x,0) = 0, \quad x \in \Omega\,,$$

$$(L^{reg}G_2)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T\,,\ G_2(x,t) = 0,\ (x,t) \in Q_{1T},$$

$$G_2(x,0) = \delta(x), \quad x \in \Omega.$$

Оператори

$$(\mathcal{G}_0\psi)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} G_0(x-y,t-\tau)\psi(y,\tau)dy\,,$$

$$(\mathcal{G}_1\psi)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S} G_1(x-y,t-\tau)\psi(y,\tau)dS\,,$$

$$(\mathcal{G}_2\psi)(x,t) = \int\limits_{\Omega} G_2(x-y,t)\psi(y,t)dy$$

називають операторами Гріна задачі.

Спряжені оператори Гріна

$$\Big(\int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega} (\mathcal{G}_j\psi)\varphi dx = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \psi(\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)dyd\tau, \quad j = 0,1,2\Big)$$

мають вигляд

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^T dt \int\limits_{\Omega} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx\,,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^T dt \int\limits_{\Omega} G_1(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx\,,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_2\varphi)(y) = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega} G_2(x-y,t)\varphi(x,t)dx\,, \qquad \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

Лема 2. *Для всіх* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{3.60}$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \frac{\partial\psi(y,t)}{\partial\nu}, \quad (y,t) \in \bar{Q}_{1T}, \tag{3.61}$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_2(\widehat{L}\psi))(y) = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in \Omega. \tag{3.62}$$

Доведення. Як у випадку задачі Коші, при $u \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_T)$, $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ правильна формула Гріна

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_T} u(x,t)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt + \\ + \int\limits_0^T dt \int\limits_S u(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dS + \int\limits_\Omega u(x,0)dx \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Якщо підствити розв'язок класичної задачі (3.58), (3.59) в формулу Гріна (3.63), то для всіх $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy\Big)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt + \\ &\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G_1(x-y,t-\tau)g_1(y,\tau)dS\Big)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt + \\ &\quad + \int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_\Omega G_2(x-y,t)g_2(y)dy\Big)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt = \\ &= \int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt + \\ &\quad + \int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)(\widehat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_0(y,\tau)dyd\tau + \\ &+ \int\limits_{Q_{1T}} \Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_1(x-y,t-\tau)(\widehat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_1(y,\tau)dSd\tau + \\ &\quad + \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_{Q_T} G_2(x-y,t)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)g_2(y)dy = \\ &= \int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt + \\ &\quad + \int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt. \end{aligned}$$

Правильність леми тепер одержуємо з довільності g_0, g_1, g_2.

Лема 3. *Для довільної* $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ *існує така* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, *що*

$$(\widehat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T.$$

Доведення. З формули (3.60) випливає, що шуканою є функція

$$\psi(y,\tau)=\int\limits_{\tau}^{T}dt\int\limits_{\Omega}G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Лема 4. $\widehat{\mathcal{G}}_0\colon\ D(\bar{Q}_T)\to D(\bar{Q}_T)$.

Доведення. Лема доводиться за схемою доведення леми 1 на підставі оцінок компонент вектор-функцій Гріна.

Лема 5. $G_1(x-y,t)=\frac{\partial G_0(x-y,t)}{\partial\nu_y},\quad (x,t)\in Q_T\,,\ (y,t)\in Q_{1T}\,,$
$G_2(x,t)=f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)\,,\quad (x,t)\in Q_T\,.$

Доведення. Із (3.60) і (3.61) випливає, що для довільних $\psi\in X(\bar{Q}_T)$, $(y,\tau)\in Q_{1T}$

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}\tfrac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}G_1(x-y,t-\tau)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt=\tfrac{\partial\psi(y,\tau)}{\partial\nu_y},$$

а отже,

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}\big[\tfrac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}-G_1(x-y,t-\tau)\big](\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt=0.$$

За лемою 3 для кожної $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, існує функція $\psi\in X(\bar{Q}_T)$ така, що $\widehat{L}\psi=\varphi$ in Q_T. Тоді

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}\big[\frac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_y}-G_1(x-y,t-\tau)\big]\varphi(x,t)dxdt=0\quad\forall\varphi\in D(\bar{Q}_T).$$

З леми Дюбуа-Реймона випливає перша формула в лемі 5.

Друга формула доводиться подібно з використанням формул (3.60) і (3.62). Справді, згідно з (3.62) і аналогом теореми Фубіні,

$$\big(f_{1-\beta}(\tau),\psi(y,\tau)\big)=\big(f_{1-\beta}(\tau),(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)\big)$$
$$=\Big(f_{1-\beta}(\tau),\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega}G_0(x-y,t-\tau)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{T} [\int\limits_{0}^{t} f_{1-\beta}(\tau) G_0(x-y, t-\tau) d\tau] (\widehat{L}\psi)(x,t) dx dt$$

$$= \int\limits_{Q_T} \big(f_{1-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big) (\widehat{L}\psi)(x,t) dx dt.$$

Згідно з (3.60),

$$\big(f_{1-\beta}(\tau), \psi(y,\tau)\big) = (\widehat{\mathcal{G}}_2(\widehat{L}\psi))(y) = \int\limits_{Q_T} G_2(x-y,t)(\widehat{L}\psi)(x,t) dx dt.$$

Тоді для кожної $\psi \in \mathcal{X}(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \Big(G_2(x-y,t) - f_{1-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\Big)(\widehat{L}\psi)(x,t) dx dt = 0, \ y \in \bar{\Omega}.$$

За лемою 3, для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \Big(G_2(x-y,t) - f_{1-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\Big)\varphi(x,t) dx dt = 0, \ \ y \in \bar{\Omega},$$

і формула випливає з леми Дюбуа-Реймона.

Лема 6. $\widehat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, $\widehat{\mathcal{G}}_1 : D(\bar{Q}_T) \to D(\bar{Q}_{1T})$, $\widehat{\mathcal{G}}_2 : D(\bar{Q}_T) \to D(\bar{\Omega})$.

Доведення базується на лемах 1-5.

3.2.4 Узагальнений розв'язок першої крайової задачі

Розглянемо першу крайову задачу

$$f_{-\beta}(t) * u(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.64}$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega \tag{3.65}$$

за припущення

(L): $F \in X'(\bar{Q}_T)$, $F_1 \in D'(\bar{Q}_{1T})$, $F_2 \in D'(\bar{\Omega})$.

Позначаємо через $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_N(x))$ орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці $x \in S$.

Грунтуючись на формулі Гріна (3.63), тобто

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\widehat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt +$$
$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_S u(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dS + \int\limits_\Omega u(x,0)dx\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt,$$

вводимо (слабкий) узагальнений розв'язок задачі.

Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, яка задовольняє тотожність

$$(u,\widehat{L}\psi)_0 = (F,\psi)_0 + (F_1,\frac{\partial\psi}{\partial\nu})_1 + (F_2,\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt)_2 \ \ \forall\psi \in X(\bar{Q}_T), \quad (3.66)$$

називається узагальненим розв'язком задачі (3.64), (3.65).

Можемо розглядати задачу (3.64), (3.65) як узагальнення задачі

$$(L^{reg}u)(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t)\in Q_T \qquad (3.67)$$

$$u(x,t) = g_1(x,t),\ (x,t)\in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = g_2(x),\ x\in\Omega \qquad (3.68)$$

з регулярними даними g_0, g_1, g_2. З наступної теореми можна одержати, що при достатньо регулярних $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ розв'язки задач (3.55), (3.56) і (3.67), (3.68) збігаються.

Теорема 7. *За припущення (L) існує єдиний розв'язок $u \in D'(\bar{Q}_T)$ задачі (3.64), (3.65). Він заданий формулою*

$$(u,\varphi)_{Q_T} = (F,\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)_0 + (F_1,\widehat{\mathcal{G}}_1\varphi)_1 + (F_2,\widehat{\mathcal{G}}_2\varphi)_2 \quad \forall\varphi\in D(\bar{Q}_T). \qquad (3.69)$$

Доведення. За лемою 6

$$\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi \in X(\bar{Q}_T), \quad \widehat{\mathcal{G}}_1\varphi \in D(\bar{Q}_{1T}), \quad \widehat{\mathcal{G}}_2\varphi\in D(\bar{\Omega}) \quad \forall\varphi\in D(\bar{Q}_T).$$

Отже, права частина формули (3.69) має сенс і формулою (3.69) визначена функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (3.69) в тотожність (3.66) і використовуючи лему 2, показуємо, що функція (3.69) є розв'язком задачі (3.64), (3.65):

$$(u,\widehat{L}\psi)_{Q_T} = (F,\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))_0 + (F_1,\widehat{\mathcal{G}}_1(\widehat{L}\psi))_1 + (F_2,\widehat{\mathcal{G}}_2(\widehat{L}\psi))_2 =$$

$$= (F,\psi)_0 + (F_1,\tfrac{\partial\psi}{\partial\nu})_1 + (F_2(x),\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt)_2 \qquad \forall\psi\in X(\bar{Q}_T)\,.$$

Якщо u_1,u_2 – два розв'язки задачі (3.64), (3.65), то $u=u_1-u_2$ задовольняє умову

$$(u,\widehat{L}\psi)_{Q_T}=0 \qquad \forall\psi\in X(\bar{Q}_T)\,.$$

За лемою 3 для кожної $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$ існує функція $\psi\in X(\bar{Q}_T)$ така, що $\widehat{L}\psi=\varphi$ в $\bar{Q}_T$. Тоді, згідно з попередньою тотожністю, $(u,\varphi)_{Q_T}=0$ для кожної $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u=0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена.

Розв'язність одної оберненої крайової задачі з даними з простору узагальнених функцій подано, зокрема, в [21].

Опрацювати застосування вектор-функції Гріна до доведення єдиності розв'язку оберненої крайової задачі для півлінійного рівняння з дробовою похідною за часом [45].

3.2.5 Розв'язок задачі Коші у просторах беселевих потенціалів

Використовуємо перетворення Фур'є за частиною змінних і далі символи $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}^{-1}$, якщо не вказано нічого додатково, позначають відповідно оператори перетворення Фур'є та оберненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}[f(x)]=\widehat{f}(\xi)$; $\mathcal{F}^{-1}:\widehat{f}(\xi)\to f(x)$, $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)]=|\lambda|^{\alpha}\mathcal{F}[\psi(x)],$$

$L_p(\mathbb{R}^n)=\Big\{f:\ \|f\|_{L_p}=\big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\big)^{\frac1p}<\infty\Big\},\ 1\le p<\infty,$

$L_\infty(\mathbb{R}^n)=\Big\{f:\ \|f\|_{L_\infty}=\mathrm{vrai}\max_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|<\infty\Big\},$

$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=\Big\{v\in S'(\mathbb{R}^n):\|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}=\big\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}v]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}<\infty\Big\}$ – простір беселевих потенціалів [25] (с. 79),

$C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=\Big\{v:\|v\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}=\max\limits_{t\in[0,T]}\|v(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}<\infty\Big\}$ – простір неперервних функцій v: $[0,T]\ni t\longmapsto v(\cdot,t)\in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,

$C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=\Big\{v\in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big):$
${}^CD_t^{\beta}v,(-\Delta)^{\alpha/2}v\ \in\ C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)\Big\}$ – підпростір з нормою $\|v\|_{C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)}=$

$$=\max\Big\{\|v\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))},\|(-\Delta)^{\alpha/2}v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))},\|{}^CD_t^{\beta}v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\Big\},$$

де $C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))$ – простір неперервних обмежених на $(0,T]$ функцій зі значеннями в $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Примітка. Для натурального числа m розглянемо множину $W_2^m(\Omega)$ тих функцій $f \in L_2(\Omega)$, для яких також $D^\gamma f \in L_2(\Omega)$ для всіх $|\gamma| \le m$ (похідні $D^\gamma f$ розуміють в узагальненому сенсі). $W_2^m(\Omega)$ — повний нормований простір із нормою

$$||f||_m^2 := \sum_{|\gamma|\le m} ||D^\gamma f||_0^2, \qquad ||\cdot||_0 := ||\cdot||_{L_2(\Omega)},$$

гільбертів зі скалярним добутком

$$< f, g >= \int\limits_\Omega \sum_{|\gamma|\le m} \overline{D^\gamma f} D^\gamma g dx.$$

Цей простір називають *простором Соболєва*, а узагальнені похідні $D^\gamma f \in L_2(\Omega)$ — похідними Соболєва функції $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Відомо, що *простір $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ складається з узагальнених функцій f повільного зростання ($f \in \mathcal{S}'$) і таких, що функція $(1+|\sigma|^2)^{m/2}\widehat{f}(\sigma)$ належить $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

У цьому разі норма $||f||_m$ еквівалентна нормі

$$||f||_m' := ||(1+|\sigma|^2)^{m/2}\widehat{f}(\sigma)||_0 = ||(1+|\sigma|^2)^{m/2}\widehat{f}(\sigma)||_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Знайдемо [19] достатні умови існування розв'язку

$$u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

задачі Коші

$$L^{reg}u \equiv^C D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t),\ (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^n, \tag{3.70}$$

для рівняння з регуляризованою похідною порядку $\beta \in (0,1)$ за часовою змінною, а саме, достатні умови існування класичного за часовою змінною зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язку задачі.

Припущення $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$: $\quad \beta \in (0,1), \quad \min\{n,2,\alpha\} > (n-1)/2$, $\alpha \ne \beta$.

Нагадаємо, що існування вектор-функції Гріна за припущення $(L_{\alpha,\beta})$ встановлено в [28], [31].

За припущення існування згорток та при виконанні умови

$$(F_0 * G_0)(x,0) = 0 \tag{3.71}$$

функція

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.72}$$

задовольняє рівняння

$$L^{reg} u = F_0 \tag{3.73}$$

та є єдиним розв'язком задачі (3.70).

За додаткових умов [34] на дані функція (3.72) належить класу $C_{\alpha,\beta}(Q_T)$.

Із врахуванням формули (3.72) одержуємо розв'язність задачі Коші (3.70) у всій шкалі просторів $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ за просторовими змінними.

Лема 7. *Функції*

$$g_j(\xi,t,\varrho) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} \mathcal{F}[G_j](\xi,t), \;\; j=0,1$$

при $\varrho \leq \alpha$, *кожному* $t \in (0,T]$ *неперервні та обмежені за змінними* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Існують такі додатні сталі* $c_j = c_j(p)$, *що для всіх* $p > 1$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left[g_j(\xi,t,\varrho)\mathcal{F}[\varphi] \right] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c_j w_j(t,\varrho) \left\| \varphi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in (0,T], \quad j = 0,1, \tag{3.74}$$

де $w_0(t,\varrho) = t^{\beta-1}\max\left\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\right\}$, $w_1(t,\varrho) = \max\left\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\right\}$ *для кожного* $t \in (0,T]$.

Доведення. Було показано, що

$$\mathcal{F}[G_1](\xi,t) = E_{\beta,1}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right), \qquad \mathcal{F}[G_0](\xi,t) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right),$$

де $E_{\beta,\mu}(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\mu)}$ – функція Міттаг-Леффлера [8].

Функція $E_{\beta,\mu}(-z)$ ($z > 0$) нескінченно диференційовна та компактно монотонна при $\beta \in (0,1)$. При $\mu \geq \beta$: $(-1)^k \left(\frac{d}{dz}\right)^k E_{\beta,\mu}(-z) \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ і правильна оцінка

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) \leq \frac{C}{1 + a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad C = const > 0.$$

Обмеженість функцій $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j=0,1$ за змінними $\xi\in\mathbb{R}^n$ при великих значеннях $|\xi|^\alpha t^\beta$ випливає з обмеженості функції

$$\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2z^\alpha t^\beta}=\frac{z^\varrho\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2z^\alpha t^\beta}\le\frac{M_1t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}v^{\frac{\varrho}{\alpha}}}{1+a^2v}\quad (z=|\xi|, v=z^\alpha t^\beta,\quad M_1=const>0).$$

Згідно з [23] (теорема 1.5 на с. 276), для доведення правильності оцінок (3.74), тобто, що функції $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j=0,1$ є мультиплікаторами в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінннними $\xi\in\mathbb{R}^n$, достатньо показати, що для кожного мультиіндекса $l=(l_1,\dots,l_n)$, компоненти l_i якого набувають значень 0 або 1, для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, $t\in(0,T]$ правильні оцінки

$$\left|\xi^l D_\xi^l g_j(\xi,t,\varrho)\right|\le c_{l,j}w_j(t,\varrho),\quad j=0,1,\tag{3.75}$$

де $\xi^l=\xi_1^{l_1}\cdot\dots\cdot\xi_n^{l_n}$, $D_\xi^l=\frac{\partial^{|l|}}{\partial\xi_1^{l_1}\dots\partial\xi_n^{l_n}}$, $|l|=l_1+\dots+l_n$, $v_j(t,\varrho)$ – деякі функції (що від ξ не залежать), $c_{l,j}$ – додатні сталі, $j=0,1$.

Відоме зображення [36]

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)=H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)(1-\mu,\beta)\end{matrix}\right)$$

через H-функції Фокса. Використовуючи властивості H-функції Фокса, можна переконатись, що функції g_j, $j=0,1$ задовольяють (3.75).

Примітка. Функції $g_0(\xi,t,\varrho)$ для $\varrho<\alpha$, $g_1(\xi,t,\alpha)$ для $\varrho\le\alpha$ при кожному $\xi\in\mathbb{R}^n$ інтегровні на $(0,T)$.

Далі c_i $(i=2,3,\dots)$ – додатні сталі.

Лема 8. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $1<p<\frac{1}{\beta}$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді існує згортка*

$$(G_1*\varphi)(x,t)=\int_0^t G_1(x,t-\tau)*\varphi(x)\,d\tau=\int_0^t G_1(x,t-\tau)\,d\tau*\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

яка належить простору $C\big([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та задовольняє оцінку*

$$\left\|G_1*\varphi\right\|_{C\left([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\le c_2\left\|\varphi\right\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}.\tag{3.76}$$

Доведення. Оцінимо для кожного $t\in[0,T]$ норму

$$\left\|G_1*\varphi\right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\left\|\varphi*G_1\right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi*G_1]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо нерівність Гельдера

$$\int\limits_Q |uv|dx \le \Big(\int\limits_Q |u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_Q |v|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Розглянемо

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]\right]\,d\tau\right|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} dx\int_0^t \left|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]\right]\right|^p d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\big|h(x,t,\tau)\big|^p dx\right\}^{1/p},$$

де

$$h(\cdot,t,\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{F}[G_1](\xi,t-\tau)\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[g_1(\xi,t-\tau,\alpha)\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)]\big]\right].$$

За умовою леми $\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] \in L_p(\mathbb{R}^n)$, а за лемою 7 функція $g_1(\xi,t-\tau,\alpha)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. Тому

$$\big\|h(\cdot,t,\tau)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_1 w_1(t-\tau,\alpha)\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\big]\,\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Із попередніх перетворень

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_1(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\big|h(x,t,\tau)\big|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le c_1 t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\big]\,\big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right\}^{1/p},$$

і при $p < 1/\beta$ (умові існування інтегралу $\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau$) для всіх $t \in [0,T]$, $r \in \mathbb{R}$ одержуємо існування згортки $\int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\,d\tau$ в просторі $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ та оцінку

$$\left\| \int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\,d\tau \right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.77}$$

Отож, $\varphi * G_1 \in C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка (3.76).

Теорема 8. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t)$, $f \in C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Тоді існує єдиний розв'язок

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T \tag{3.78}$$

задачі (3.70), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та наявна нерівність коерцитивності*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le b_0 \|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + b_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.79}$$

де b_0, b_1 *– додатні сталі.*

Доведення. Спочатку покажемо існування згорток із формули (3.72) у просторі $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

За умовою теореми

$$(F_0 * G_0)(x,t) = (f_{1-\beta}(t) * f(x,t)) * G_0(x,t) =$$
$$= f(x,t) * (f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t)) = (f * G_1)(x,t),$$

якщо остання згортка існує. Її існування випливає з леми 8 при $r = s$ та заміні $\varphi \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ функцією $f(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q_T$ класу $C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

В цьому випадку замість нерівностей (3.77) одержуємо нерівності

$$\left\| \int_0^t f(\cdot,\tau) * G_1(\cdot, t-\tau)\,d\tau \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le c_3 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \cdot \|f(\cdot,\tau)\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c_3 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \cdot \max_{\tau\in[0,T]} \|f(\cdot,\tau)\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\leq c_3 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \big\|f\big\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)},$$

звідки для всіх $s \in \mathbb{R}$, $p\beta < 1$ випливає, що $f * G_1 \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінка

$$\big\|f * G_1\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq c_4 \big\|f\big\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \tag{3.80}$$

Як при доведенні леми 8, маємо

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0(\cdot)*G_1(\cdot,t)]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[G_1](\xi,t)\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0](\xi)\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[g_1(\xi,t,0)\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0](\xi)]\big]\right].$$

За умовою теореми $\mathcal{F}^{-1}\big[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0](\xi)\big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$, а за лемою 7 функція $g_1(\xi,t,0)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. Тому

$$\big\|u_0 * G_1\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0(\cdot)*G_1(\cdot,t)]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq c_1 w_1(t,0)\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u_0](\xi)\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = c_1\left\|u_0\right\|_{H^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ми врахували, що $w_1(t,0) = 1$. Із одержаних вище нерівностей для всіх $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $t \in [0,T]$ одержуємо нерівність

$$\big\|u_0 * G_1\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1\left\|u_0\right\|_{H^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

а отже, існування згортки $u_0 * G_1 \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінку

$$\big\|u_0 * G_1\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq c_1\big\|u_0\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.81}$$

З формули (3.72), рівності $F_0 * G_0 = f * G_1$, з урахуванням оцінок (3.80), (3.81), одержуємо існування єдиного розв'язку (3.79) задачі (3.70) в класі $C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінку

$$\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq c_1\big\|u_0\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} + c_4\big\|f\big\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \tag{3.82}$$

Тому що

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}[u]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{|\xi|^{\alpha}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\right],$$

за доведеним $\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \in [0,T]$, а функція $\frac{|\xi|^{\alpha}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ є мультиплікатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$, то для всіх $t \in (0,T]$ маємо

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_5\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ми одержали, що для розв'язку u (класу $C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$) задачі (3.70) також виконана умова $(-\Delta)^{\alpha/2}u \in C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка

$$\big\|(-\Delta)^{\alpha/2}u\big\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le c_6\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \qquad (3.83)$$

Тому що функція $F_0 * G_0 = f * G_1$ задовольняє умову (3.71), за формулою (3.73) одержуємо

$${}^{C}D_t^{\beta}u = -a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u + F_0 \in C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

та оцінку

$$\begin{aligned}&\big\|{}^{C}D_t^{\beta}u\big\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ &\le \big\|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\big\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + \big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le \\ &\le \big\|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\big\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + c_7\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.\end{aligned}$$

Звідси та з оцінок (3.82), (3.83) випливає оцінка (3.79).

Так ми показали, що розв'язок (3.78) задачі (3.70) належить класу $C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Лема 9. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0<\theta<1$, $1<p<\frac{1}{1-\beta\theta}$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi \in H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді існує згортка*

$$(G_0*\varphi)(x,t) = \int_0^t G_0(x,t-\tau)*\varphi(x)\,d\tau = \int_0^t G_0(x,t-\tau)\,d\tau * \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

яка належить простору $C\big([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *і задовольняє оцінку*

$$\big\|G_0*\varphi\big\|_{C\left([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le c_8\big\|\varphi\big\|_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.84)$$

Доведення. Оцінимо для кожного $t\in[0,T]$ норму

$$\big\|G_0*\varphi\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \big\|\varphi*G_0\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\big[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi*G_0]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

З цією метою, як при доведенні попередньої леми 8, розглядаємо

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} dx\int_0^t \left|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right]\right|^p d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\left|h_0(x,t,\tau)\right|^p dx\right\}^{1/p},$$

де

$$h_0(\cdot,t,\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[G_0](\xi,t-\tau)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)]\right]\right].$$

Згідно з лемою 7, функція $g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. За умовою леми $\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому

$$\left\|h_0(\cdot,t,\tau)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_0 w_0(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= c_0 w_0(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\,||\varphi||_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

З попередніх перетворень

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\left|h_0(x,t,\tau)\right|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le c_0 t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t w_0^p(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\,d\tau\right\}^{1/p} ||\varphi||_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)},$$

і при $p(1-\beta\theta)<1$ (умові існування інтегралу $\int_0^t w_0^p(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\,d\tau$) для всіх $t\in[0,T]$, $r\in\mathbb{R}$ одержуємо існування згортки $\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau$ в просторі $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ та оцінку

$$\left\|\int_0^t \varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\leq c_0 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_0^p(t-\tau, \alpha - \alpha\theta)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отож, $\varphi * G_0 \in C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка (3.84).

Теорема 9. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0<\theta<1$ $s\in\mathbb{R}$, $p>1$ *та* $p(1-\beta\theta)<1$, $u_0\in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0\in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T$$

задачі (3.70), причому $u\in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq k_0 \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + k_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

де k_0, k_1 *– додатні сталі.*

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 8 з тою різницею, що для доведення існування згортки $F_0 * G_0$ в просторі $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ використовується лема 9.

Зауважимо, що теорема 9 правильна і для $\beta = 1 < \alpha$. В цьому випадку

$$\mathcal{F}[G_0](\xi,t) = \mathcal{F}[G_1](\xi,t) = E_{1,1}(-a^2|\xi|^\alpha t) = e^{-a^2|\xi|^\alpha t}.$$

3.2.6 Визначення правої частини рівняння дифузії з дробовими похідними

Використовуючи властивості функцій Гріна, у попередньому підрозділі одержано [19] існування і єдиність розв'язку задачі Коші в просторах беселевих потенціалів. Вивчимо тепер обернену задачу Коші для рівняння дифузії з дробовими похідними – задачу про визначення залежної від часу неперервної компоненти правої частини рівняння і розв'язку задачі Коші, класичного за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів [22].

Вивчаємо задачу

$$^C D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2} u = F_0(x) g(t),\ (x,t)\in Q, \tag{3.85}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in R^n, \tag{3.86}$$

$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= \Phi(t), \quad t\in[0,T], \tag{3.87}$$

яка полягає у знаходженні пари функцій (u, g): узагальненого розв'язку u (класичного за часом із значеннями в просторах беселевих потнціалів) задачі (3.85), (3.86) та $g \in C[0, T]$ за додаткової умови – умови перевизначення (3.87). При $v \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_0 \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1)$ маємо $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_{x\to\xi}v\Big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ і

$$< v, \varphi_0 >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_{x\to\xi}[v(x)]\Big]\varphi_0(x)dx.$$

Припущення:

(А) $\beta \in (0, 1]$, $\alpha > \beta$, $\theta \in (0, 1)$, $1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta}$, $s \in \mathbb{R}$, $F_0 \in H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$;

(Б) $\Phi, {}^C D^\beta \Phi \in C[0, T]$, $\varphi_0 \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1)$, $< F_0, \varphi_0 > \neq 0$.

Умова (3.87) набуває вигдялу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(z,t)]\Big]\varphi_0(x)dx = \Phi(t),\ t \in [0, T]. \tag{3.88}$$

Означення. Пара

$$(u, g) \in C_{\alpha,\beta}\big([0, T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \times C[0, T],$$

що задовольняє рівняння (3.85) і умови (3.86), (3.87), називається розв'язком задачі (3.85)–(3.87).

Із (3.86) та (3.87) випливає необхідна умова погодження даних задачі

$$< u_0, \varphi_0 >= \Phi(0). \tag{3.89}$$

З рівняння (3.85) та умови (3.87) одержуємо

$${}^C D^\beta \Phi(t) + a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot) >= g(t) < F_0, \varphi_0 >, \quad t \in [0, T].$$

Нехай

$$r_u(t) = a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot) > .$$

Тоді, враховуючи припущення (Б), з попередньої тотожності знаходимо функцію

$$g(t) = g_u(t) = \frac{{}^C D^\beta \Phi(t) - r_u(t)}{< F_0, \varphi_0 >},\ \ t \in [0, T]. \tag{3.90}$$

Лема 10. *За припущення (Б) для всіх*

$$s \in \mathbb{R}, \;\; p > 1, \;\; u \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

визначена формулою (3.90) функція g_u *неперервна на* $[0,T]$ *і*

$$|g_u(t)| \leq \frac{C_1\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C_2}{|< F_0, \varphi_0 >|}, \quad t \in [0,T],$$

де $C_1 = C_1(\varphi_0) = const > 0$, $C_2 = \|{}^C D^\beta \Phi\|_{C[0,T]}$.

Доведення. Для всіх $t \in [0,T]$, $u \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ маємо

$$a^2| < (-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) > | \leq$$
$$\leq C_3\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^\alpha (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}[u]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\big\|\varphi_0\big\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq C_1\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u](\xi,t)\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$
$$= C_1\big\|u(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

звідки для всіх $t \in [0,T]$

$$|r_u(t)| = a^2| < (-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) > | \leq C_1\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Теорема 10. *За припущень (А), (Б) і (3.89) існує єдиний розв'язок*

$$(u, g) \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \times C[0,T]$$

задачі (3.86)–(3.87): u визначено формулою

$$u(x,t) = \big(F_0(x) g(t)\big) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}, \tag{3.91}$$

$$g(t) = \frac{{}^C D^\beta \Phi(t) - r(t)}{< F_0, \varphi_0 >}, \;\; t \in [0,T], \tag{3.92}$$

де $r(t)$ *– розв'язок рівняння*

$$r(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau) r(\tau) d\tau = R(t), \quad t \in [0,T] \tag{3.93}$$

з інтегровним ядром

$$K(t,\tau) = \frac{a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2}\big(F_0(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\big), \varphi_0(\cdot) >}{< F_0, \varphi_0 >},$$

$$R(t) = a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2} v_0(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) > + \int\limits_0^t K(t,\tau) {}^C D^\beta \Phi(\tau) d\tau,$$

$$v_0(x,t) = u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Доведення. За теоремою 9 існує єдиний розв'язок $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ задачі Коші (3.85), (3.86), визначений формулою (3.91). Підставляючи $g_u(t)$, визначену формулою (3.90) та неперервну за лемою 10, у (3.91) замість $g(t)$, одержуємо

$$u(x,t) = v_0(x,t) - \frac{1}{< F_0, \varphi_0 >}\Big(r_u(t)F_0(x)\Big) * G_0(y,t) +$$
$$+ \frac{1}{< F_0, \varphi_0 >}\Big({}^C D^\beta \Phi(t) F_0(x)\Big) * G_0(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}.$$

Тоді

$$r_u(t) = a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2} u(x,t), \varphi_0(x) >= a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2} v_0(x,t), \varphi_0(x) > +$$
$$+a^2 \int\limits_0^t < (-\Delta)^{\alpha/2}\big(F_0(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\big), \varphi_0(x) > \ \frac{\big[{}^C D^\beta \Phi(\tau) - r_u(\tau)\big]}{< F_0, \varphi_0 >} d\tau,$$

тобто

$$r_u(t) = -\int\limits_0^t K(t,\tau) r_u(\tau) d\tau + R(t), \ t \in [0,T].$$

Одержали лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду (3.93) відносно невідомої $r(t) = r_u(t)$. Враховуючи теорему 9 і лему 9, одержуємо, що за припущень цієї теореми функція $R \in C[0,T]$ і ядро $K(t,\tau)$ інтегровне. Тому існує єдиний неперервний розв'язок $r(t)$ рівняння (3.93). Маючи $r(t)$, знаходимо $g \in C[0,T]$ за формулою (3.92) та $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ за формулою (3.91).

Якщо (u_1, g_1), (u_2, g_2) – два розв'язки задачі (3.85)–(3.87), то при $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$ маємо задачу

$$(Lu)(x,t) = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= 0, \quad t \in [0,T].$$

Як вище, знаходимо

$$g(t) = -\frac{r(t)}{< F_0, \varphi_0 >}, \quad t \in [0,T], \tag{3.94}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{< F_0, \varphi_0 >} \int\limits_0^t F_0(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau) r(\tau) d\tau, \qquad (3.95)$$

де $r(t)$ – розв'язок лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$r(t) = -\int\limits_0^t K(t,\tau) r(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T].$$

За єдиністю розв'язку цього рівняння $r(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Тоді $g(t) = 0$, $t \in [0,T]$ (за формулою (3.94)) та $u = 0$ в $\bar{Q}$ (згідно з (3.95)).

3.3 Про обернені коефіцієнтні крайові задачі

Наводимо формулювання задач і схему доведення їх розв'язності. Обернені задачі з невідомими коефіцієнтами, як правило, є нелінійними задачами в тому сенсі, що їх розв'язання пов'язане з дослідженням чи розв'язанням певних нелінійних операторних рівнянь. Тут використовуватимемо основні методи дослідження операторних рівнянь, наведені у підрозділі 2.6.

3.3.1 Крайова задача з невідомим молодшим коефіцієнтом

У [43] досліджено обернену задачу для лінійного неоднорідного рівняння дифузії з регуляризованою похідною дробового порядку $\beta \in (0,2)$ за часом в обмеженому циліндрі $\Omega_0 \times (0,T]$ – задачу про визначення пари функцій: класичного розв'язку u першої крайової задачі для такого рівняння та невідомого, залежного від часу, неперервного коефіцієнта в молодшому члені рівняння при інтегральній за просторовими змінними умові перевизначення.

Нехай $Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$, $Q_2 = \Omega_0$, $C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ – простори неперервних функцій відповідно на Q_0, $\overline{Q}_0$ і $[0,T]$, $C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$ – простір неперервних функцій на $\bar{\Omega}_0$, які задовольняють умову Гельдера, $C^\gamma(\bar{Q}_0)$ – простір неперервних функцій на $\bar{Q}_0$, які для кожного $t \in (0,T]$ задовольняють умову Гельдера за просторовими змінними,

$C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(Q_0) : \Delta v, {}^C D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$,

$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = C_{2,\beta}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0)$ у випадку $\beta \in (0,1]$,

$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = \{v \in C_{2,\beta}(Q_0) : v, v_t \in C(\bar{Q}_0)\}$ при $\beta \in (1,2)$.

Пара $(u,b)\in\mathcal{M}_\beta(Q_0)=\mathcal{M}_\beta:=C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)\times C[0,T]$ називається розв'язком задачі

$$^{C}D_t^{\beta}u-\Delta u-b(t)u=F_0(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_0\times(0,T], \tag{3.96}$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega_1\times[0,T], \tag{3.97}$$

$$u(x,0)=F_1(x),\quad u_t(x,0)=F_2(x),\quad x\in\overline{\Omega}_0, \tag{3.98}$$

$$\int\limits_{\Omega_0}u(x,t)\varphi_0(x)dx=F(t),\quad t\in[0,T], \tag{3.99}$$

якщо вона задовольняє рівняння (3.96) в області Q_0 та умови (3.97)-(3.99).

Необхідними є умови погодження даних задачі

$$\int\limits_{\Omega_0}F_1(x)\varphi_0(x)dx=F(0),\quad \int\limits_{\Omega_0}F_2(x)\varphi_0(x)dx=F'(0),\quad F_j|_{\Omega_1}=0,\ j=1,2. \tag{3.100}$$

Теорема 11. *Якщо* $g_0\in C^{\gamma}(Q_0)$, $g_j\in C^{\gamma}(\bar{Q}_2)$, $g_j|_{\Omega_1}=0$, $j=1,2$, *то існує єдиний розв'язок* $u\in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ *прямої задачі*

$$^{C}D_t^{\beta}u-\Delta u=g_0(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_0\times(0,T],$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega_0\times[0,T],$$

$$u(x,0)=g_1(x),\quad u_t(x,0)=g_2(x),\quad x\in\overline{\Omega}_0.$$

Він визначений формулою

$$u(x,t)=\big(\mathcal{G}_0g_0\big)(x,t)+\big(\mathcal{G}_1g_1\big)(x,t)+\big(\mathcal{G}_2g_2\big)(x,t),\quad (x,t)\in\bar{Q}_0, \tag{3.101}$$

де $\quad(\mathcal{G}_0g_0)(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy$,

$(\mathcal{G}_jg_j)(x,t)=\int\limits_{\Omega_0}G_j(x,t,y,0)g_j(y)dy$, $j=1,2$.

Доведення. Беручи до уваги оцінки компонент вектор-функції Гріна, як при доведенні леми 1, отримуємо

$$\Big|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy\Big|\le k_0t^{\beta}\cdot\|g_0\|_{C(\bar{Q}_0)}\quad\forall(x,t)\in\bar{Q}_0,$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega_0}G_j(x,t,y)g_j(y)dy\Big|\le k_jt^{j-1}||g_j||_{C(\bar{\Omega}_0)},\quad (x,t)\in\bar{Q}_0,\quad j=1,2,$$

де k_0,k_1,k_2 – додатні сталі, $||g_0||_{C(\bar{Q}_0)}:=\max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}_0}|g_0(x,t)|$, $j=0,1$, $||g_j||_{C(\bar{\Omega}_0)}:=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}_0}|g_j(x)|$, $j=1,2$.

Далі, повторюючи міркування [24], можна показати, що функція (3.101) належить до $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ і є розв'язком задачі. При цьому використовуємо гельдеровість компонент вектор-функції Гріна, доведену в [34], а саме, що

$$|G_i(x+\Delta x, t+\Delta t, y, \tau) - G_i(x,t,y,\tau)| \le A_i(x,t,y,\tau)[|\Delta x| + |\Delta t|^{\beta/2}]^\gamma \quad (3.102)$$

$$\forall (x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \bar{Q}_0, (y,\tau) \in \bar{Q}_i, \quad i = 0,1,2,$$

де невід'ємні функції $A_i(x,t,y,\tau)$ мають такого ж вигляду оцінки, як $G_i(x,t,y,\tau)$, $i = 0,1,2$, відповідно, і далі $G_i(x,t,y,\tau) = G_i(x,t,y)$, $A_i(x,t,y,\tau) = A_i(x,t,y)$ при $i = 1,2$, $\gamma \in (0,1)$. Такого ж вигляду оцінки правильні і для похідних компонент вектор-функції Гріна.

Зауважимо, що у випадку крайових задач для класичних параболічних рівнянь другого порядку гельдеровість компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних одержана у [24], а для загальних параболічних задач – у [9].

Єдиність розв'язку задачі випливає з принципу максимуму [46, 34].

Нехай виконуються наступні припущення:

(F0) $\quad F_0 \in C^\gamma(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$,

(F1) $\quad F_1 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$, $\quad F_1|_{\Omega_1} = 0$,

(F2) $\quad F_2 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$, $\quad F_2|_{\Omega_1} = 0$,

(F) $\quad F, {}^C D^\beta F \in C[0,T]$, $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$,

(Φ) $\quad \varphi_0 \in C^2(\bar{\Omega}_0)$, $\quad \varphi_0|_{\Omega_1} = 0$.

З теореми 11 випливає, що за припущень (F0), (F1), (F2) при відомій $b \in C[0,T]$ розв'язок $u \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ першої крайової задачі (3.96)–(3.98) задовольняє інтегральне рівняння

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) b(\tau) u(y,\tau) dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0, \qquad (3.103)$$

де

$$h(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau) dy + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_0} G_j(x,t,y) F_j(y) dy, \quad (3.104)$$

$$(x,t) \in \bar{Q}_0.$$

Крім того, довільний розв'язок $u \in C(\bar{Q}_0)$ інтегрального рівняння (3.103) (з відомим коефіцієнтом $b \in C[0,T]$) належить $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ і є розв'язком задачі (3.96)–(3.98).

З рівняння (3.96) і умов (3.97), (3.98) випливає, що

$$ {}^{C}D_t^{\beta} \int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi_0(x)dx = \int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx + b(t)\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi_0(x)dx + $$
$$ + \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t)\varphi_0(x)dx, \quad t \in [0,T]. $$

За умовою (3.99) отримаємо

$$ {}^{C}D_t^{\beta} F(t) = \int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx + b(t)F(t) + \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t)\varphi_0(x)dx $$

і, враховуючи припущення (F), знаходимо

$$ b(t) = \Big[{}^{C}D_t^{\beta} F(t) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t)\varphi_0(x)dx - \int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx\Big][F(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.105} $$

Зауважимо, що, відповідно до (3.105), $b \in C[0,T]$ при $u \in C(\bar{Q}_0)$. Підставивши праву частину рівняння (3.105) в (3.103) замість b, отримуємо нелінійне інтегральне рівняння відносно невідомої $u \in C(\bar{Q}_0)$

$$ u(x,t) = \int\limits_0^t [F(\tau)]^{-1}d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\Big[{}^{C}D^{\beta}F(\tau) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(z,\tau)\varphi_0(z)dz - $$
$$ - \int\limits_{\Omega_0} u(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz\Big]u(y,\tau)dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0. \tag{3.106} $$

Ми показали, що розв'язок задачі (3.96)–(3.99) задовольняє систему (3.105), (3.106).

Навпаки, якщо функція $u \in C(\bar{Q}_0)$ і є розв'язком інтегрального рівняння (3.106), $b(t)$ визначена згідно з (3.105), то з попередніх міркувань одержуємо, що функція u є розв'язком прямої задачі при відомій $b(t)$ і задовольняє умови погодження даних. Покажемо, що вона задовольняє умову (3.99).

Якщо це не так і $\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi_0(x)dx = F^*(t)$, $t \in [0,T]$, то

$$\int\limits_{\Omega_0} F_1(x)\varphi_0(x)dx = F^*(0), \quad \int\limits_{\Omega_0} F_2(x)\varphi_0(x)dx = F^{*'}(0). \tag{3.107}$$

Як вище, показуємо, що

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx = {}^C D_t^\beta F^*(t) - b(t)F^*(t) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t)\varphi_0(x)dx,$$

а тоді, враховуючи (3.105), отримуємо

$${}^C D_t^\beta [F^*(t) - F(t)] - b(t)[F^*(t) - F(t)] = 0, \quad t \in [0,T],$$

тобто, враховуючи умови (3.100) і (3.107), маємо лінійне однорідне рівняння Вольтерри з інтегровним ядром

$$F^*(t) - F(t) = f_\beta(t) * [b(t)(F^*(t) - F(t))].$$

Його розв'язок $F^*(t) - F(t) = 0$, $t \in [0,T]$, а отже, u задовольняє умову (3.99). Одержали наступний результат.

Лема 11. *За припущень (F0), (F1), (F2), (F), (Φ) і (3.100) пара функцій (u,b) є роз'язком задачі (3.96)-(3.99) тоді і лише тоді, коли функція $u \in C(\bar{Q}_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (3.106), функція $b \in C[0,T]$ визначена згідно з (3.105).*

Теорема 12 (про локальну за часом розв'язність задачі). *За умов (F0), (F1), (F2), (F), (Φ), (3.100) існує $T > 0$ та розв'язок $(u,b) \in \mathcal{M}_\beta(Q_0)$ задачі (3.96)-(3.99): функція u є розв'язком інтегрального рівняння (3.106) у $C(\bar{Q}_0)$, функція b визначена згідно з (3.105).*

Доведення. За лемою 11 достатньо довести розв'язність рівняння (3.106) в $C(\bar{Q}_0)$. Нехай $f = \min\limits_{t\in[0,T]} |F(t)|$, $R = const > 0$,

$$M_R = M_R(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) : \quad ||v||_{C(\bar{Q}_0)} \le R\}.$$

Застосуємо принцип Шаудера (див. підрозділ 2.6). Введемо оператор

$$(Pv)(x,t) := \int\limits_0^t [F(\tau)]^{-1}d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\big[{}^C D^\beta F(\tau) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(z,\tau)\varphi_0(z)dz$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} v(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz\big]v(y,\tau)dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0, \quad v \in M_R,$$

де функція $h(x,t)$ визначена як (3.104).

Спочатку покажемо існування $R>0$, $T^*>0$ таких, що $P: M_R^* \to M_R^*$, де $M_R^* = M_R(\bar{\Omega}_0 \times [0,T^*])$.

Використовуючи одержані при доведенні теореми 11 оцінки $\big(\mathcal{G}_j g_j)(x,t)$, $j=0,1,2$, отримуємо

$$|(Pv)(x,t)| \leq \frac{k_0}{f} t^\beta (c_1 R + c_2 R^2) + |h(x,t)|,$$
$$|h(x,t)| \leq k_0 t^\beta \|F_0\|_{C(\bar{Q}_0)} + k_1 \|F_1\|_{C(\bar{\Omega}_0)} + k_2 t \|F_2\|_{C(\bar{\Omega}_0)} := B_0(t),$$
$$(x,t) \in \bar{Q}_0, v \in M_R$$

де $c_1 = \|{}^C D^\beta F - \int\limits_{\Omega_0} F_0(z,\cdot)\varphi_0(z)dz\|_{C[0,T]}$, $c_2 = \int\limits_{\Omega_0} |\Delta\varphi_0(z)|dz$, $\beta \in (0,\beta)$.

В результаті маємо

$$|(Pv)(x,t)| \leq \tfrac{k_0}{f} t^\beta (c_1 R + c_2 R^2) + B_0(t) \quad \forall t \in [0,T],\ v \in M_R.$$

Щоб справджувалась нерівність

$$d_0 t^\beta R^2 + B_0(t) \leq R \quad \forall t \in [0,T^*] \tag{3.108}$$

для деяких $T^*>0$, $R \geq 1$ із $d_0 = kk_0$ і $k = \frac{c_1+c_2}{f}$, виберемо $R^* = \max\{2\max\limits_{t\in[0,T]} B_0(t), 1\}$. Так як $B_0(t) \leq R^*/2$, $t \in [0,T]$, то необідна нерівність (3.108) випливає з нерівності

$$d_0 t^\beta R^{*2} \leq R^*/2 \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Остання ж виконується, якщо $t^* = [2d_0R^*]^{-1/\beta}$. Ми довели існування чисел $R^* \geq 1$, $T^* = \min\{t^*,T\} > 0$ таких, що $P: M_{R^*}^* \to M_{R^*}^*$.

Оператор P неперервний на $M_{R^*}^*$. Справді, для $v_1, v_2 \in M_{R^*}^*$

$$||Pv_1 - Pv_2||_{C(\bar{Q}_0^*)} =$$

$$= \max_{(x,t)\in\bar{Q}_0^*} \Big| \int\limits_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) \Big[\int\limits_{\Omega_0} v_2(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz[v_2(y,\tau) - v_1(z,\tau)]$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} [v_1(z,\tau) - v_2(z,\tau)]\Delta\varphi_0(z)dz \cdot v_1(y,\tau)\Big] dy \Big| \leq$$

$$\leq c_2 \sup_{(x,t)\in Q_0^*} \int_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)dy \cdot \left[\|v_1\|_{C(Q_0^*)} + \|v_2\|_{C(Q_0^*)}\right] \times$$

$$\times \|v_1 - v_2\|_{C(Q_0^*)} \leq \frac{2k_0 c_2 (T^*)^\beta R^*}{f} \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_0^*)}.$$

Аналогічно отримуємо, що оператор P компактний на $M_{R^*}^*$: встановлено, що $||Pv||_{C(\bar{Q}_0^*)} \leq R^*$, на додаток, із гельдеровості компонент вектор-функції Гріна випливає, що для віх $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $(x,t) \in \bar{Q}_0^*$, $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta t| < \delta$ і для всіх $v \in M_{R^*}^*$

$$\max_{(x,t)\in \bar{Q}_0^*} |(Pv)(x+\Delta x, t+\Delta t) - (Pv)(x,t)|$$

$$\leq \tfrac{c_1 R + c_2 R^2}{f} \max_{(x,t)\in \bar{Q}_0^*} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} |G_0(x+\Delta x, t+\Delta t, z, \tau) - G_0(x,t,z,\tau)| dz$$

$$+ \max_{(x,t)\in Q_0^*} |h(x+\Delta x, t+\Delta t) - h(x,t)|$$

$$\leq \left[\tfrac{(c_1 R + c_2 R^2) c_3 (T^*)^\beta}{f} + B_1(T^*)\right] \cdot \left[|\Delta x| + |\Delta t|^{\beta/2}\right]^\gamma < \varepsilon,$$

де $\quad B_1(t) = c_3 t^\beta ||F_0||_{C(\bar{Q}_0)} + c_4 ||F_1||_{C(\bar{\Omega}_0)} + c_5 ||F_2||_{C(\bar{\Omega}_0)}$,

$$c_3 = \sup_{(x,t)\in Q_0} t^{-\beta} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} A_0(x,t,y,\tau)dy, \quad c_4 = \sup_{(x,t)\in Q_0} \int_{\Omega_0} A_1(x,t,y)dy,$$

$c_5 = \sup_{(x,t)\in Q_0} t \int_{\Omega_0} A_2(x,t,y)dy$, A_0, A_1, A_2 визначені в формулі (3.102).

За лемою Арцела оператор P цілком неперервний на $M_{R^*}^*$. Згідно з принципом Шаудера існує розв'язок $u \in M_{R^*}^*$ рівняння (3.106).

Теорема 13. *Якщо* $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, *то розв'язок* $(u,b) \in \mathcal{M}_\beta(Q_0)$ *задачі (3.96)-(3.99) єдиний.*

Доведення. Візьмемо два розв'язки $(u_1,b_1), (u_2,b_2) \in \mathcal{M}_\beta(Q_0)$ задачі і підставимо їх у рівняння (3.96). Для $u = u_1 - u_2$, $b = b_1 - b_2$ отримуємо

$$D_t^\beta u = \Delta u + b_2 u + b u_1, \quad (x,t) \in Q_0,$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_1, \quad t \in [0,T]$$

$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0.$$

Тоді, за торемою 11, функція $u(x,t)$ задовольняє рівняння

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)[b_2(\tau)u(y,\tau)+b(\tau)u_1(y,\tau)]dx,\quad (x,t)\in\bar{Q}_0$$

і належить до $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$.

З умови перевизначення (3.99) і з (3.105) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx=-b(t)F(t),\quad t\in[0,T]. \tag{3.109}$$

Тоді $u(x,t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\Big(b_2(\tau)u(y,\tau)-\frac{u_1(y,\tau)\int\limits_{\Omega_0}u(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz}{F(\tau)}\Big)d\tau,$$

тобто лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}\big[G_0(x,t,z,\tau)b_2(\tau)-$$

$$-\frac{1}{F(\tau)}\Big(\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)u_1(y,\tau)dy\Big)\Delta\varphi_0(z)\big]u(z,\tau)dz,\quad (x,t)\in\bar{Q}_0.$$

з інтегровним ядром. За єдиністю його розв'язку отримуємо $u(x,t)=0$, $(x,t)\in\bar{Q}_0$. Тоді з (3.109)

$$b(t)F(t)=0,\ t\in[0,T].$$

Так як $F(t)\neq 0$ на $[0,T]$ (за припущенням теореми), то

$$b(t)\equiv 0,\ t\in[0,T].$$

Примітка. Отриманий результат є правильним у випадку $\beta\in(0,1]$ (без другої початкової умови $u_t(x,0)=F_2(x)$, $x\in\bar{\Omega}_0$), якщо у всіх формулах ми вважатимемо $F_2(x)\equiv 0$, $x\in\bar{\Omega}_0$.

У [41] одержано теореми про існування та єдиність класичного розв'язку $(u,r)\in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)\times C[0,T]$ оберненої крайової задачі

$${}^CD_t^{\alpha}u+r(t){}^CD_t^{\beta}u-\Delta u=F_0(x,t,u,{}^CD_t^{\beta}u),\quad (x,t)\in Q_0, \tag{3.110}$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\bar{Q}_1, \tag{3.111}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0, \tag{3.112}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0, \tag{3.113}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi_0(x)dx = F(t), \quad t \in [0,T] \tag{3.114}$$

для півлінійного телеграфного рівняння з регуляризованими дробовими похідними при $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in (0,1)$.

3.3.2 Крайова задача з невідомим старшим коефіцієнтом

У [18] при $\beta \in (0,1]$, а у [20] при $\beta \in (1,2)$ доведено теореми про існування та єдиність розв'язку (u,a) оберненої крайової задачі

$${}^C D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F_0(x,t), \ \ (x,t) \in Q_0 := (0,l) \times (0,T], \tag{3.115}$$

$$a(t) > 0, \ \ t \in [0,T],$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.116}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l] \tag{3.117}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{3.118}$$

$$a(t)u_x(0,t) = F_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.119}$$

де F_0-F_3 – задані функції, умова (3.118) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Нехай $C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ – класи неперервних відповідно в Q_0, $\overline{Q}_0$ та на $[0,T]$ функцій, $C_+[0,T]$ – клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій,

$C_\beta(0,T] = \{v \in C(0,T] : \quad t^\beta v \in C[0,T], \quad \inf\limits_{t\in(0,T]} t^\beta |v(t)| > 0\}$,

$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) \, : \, v_{xx}, \, {}^C D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$.

Розв'язком задачі (3.115)-(3.119) називається пара функцій

$$(u,a) \in \mathcal{M}_\beta := C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) \times C_+[0,T],$$

що задовольняє рівняння (3.115) в Q_0 та умови (3.116)-(3.119).

Для доведення розв'язності задачі (3.115)-(3.119) використовуємо метод функції Гріна.

Введемо оператори

$L: \qquad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t), \ (x,t) \in Q_0$,

$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv^C D_t^{\beta} v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q_0\,,$
$\widehat{L}: \qquad (\widehat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}\widehat{*}v(x,t) - a(t)v_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q_0\,,\ v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$
та функційний простір

$$X(\overline{Q}_0) = \{v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0):\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]\}\,.$$

Для $v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)\,,\ \psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0} v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_{Q_0} (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau +$$
$$+\int\limits_0^l v(y,0)dy\int\limits_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau + \int\limits_0^l v_\tau(y,0)dy\int\limits_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau\,.$$

Вектор-функція $\big(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y,\tau)\big)$, така що при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$\begin{gathered} v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \\ + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_0^l G_j(x,t,y,0)g_j(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0 \end{gathered} \tag{3.120}$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$) розв'язком першої крайової задачі

$$^{C}D_t^{\beta}u - a(t)u_{xx} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{3.121}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad x \in [0,l], t \in [0,T], \tag{3.122}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \ \ u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{3.123}$$

(з відомою функцією $a(t)$), називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y, t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0\,,$

$G_j(0,t,y,\tau) = G_j(l,t,y,\tau) = 0\,,\ y \in (0,l)\,,\ t,\tau \in (0,T]\,,\ j = 0,1,2\,,$

$G_1(x,0,y,0) = \delta(x-y)\,,\ \frac{\partial}{\partial t}G_2(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad x,y \in (0,l),$
$G_j(x,t,y,0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x,t,y,0), \quad (x,t) \in Q_0, \quad y \in (0,l), \qquad j = 1,2.$

Із принципу максимуму випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau)$, $G_1(x,t,y,0)$, $G_2(x,t,y,0)$, $(x,t),(y,\tau) \in Q_0$, а звідси додатність $\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_1(0,t,y,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_2(0,t,y,0)}{\partial x}$, $y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$.

Лема 12 [20]. *При $a \in C_+[0,T]$ вектор-функція Гріна першої крайової задачі (3.115)–(3.118) існує.*

Використовуємо також позначення $G_j(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_j(x,t,y,\tau)$, $j=0,1,2$.

Нехай $[a(t)]^{-1} \le R$ для всіх $t \in [0,T]$. Використовуючи властивості H-функцій Фокса і метод Леві [24], знаходимо оцінки

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big| \le C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}, \quad |x-y|^2 < 4(t-\tau)^\beta/R,$$

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big| \le \frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^{k+1}}, \quad |x-y|^2 > 4(t-\tau)^\beta/R, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_j(x,t,y,0,a)\big| \le C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}, \quad |x-y|^2 < 4t^\beta/R,$$

$$\big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_j(x,t,y,0,a)\big| \le \frac{\widehat{C}_{jk}t^{j-1}}{|x-y|}\big(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\big)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}} e^{-c\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le$$

$$\le C_{jk} R^{-\frac{1}{2-\beta}} |x-y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}} t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}},$$

$$|x-y|^2 > 4t^\beta/R, \quad j=1,2, \quad c=(2-\beta)\beta^{\beta(2-\beta)},$$

$C_k, C_k^*, C_{jk}, C_{jk}^*, \widehat{C}_{jk}$, та далі $c_k, c_k^*, \widehat{c}_k, c_{jk}, c_{jk}^*$ ($j=1,2$, $k \in \mathbb{Z}_+$) – додатні сталі.

Нехай виконуються умови

(F0): $F_0 \in C(\overline{Q}_0)$ та для кожного $t \in (0,T]$ локально гельдерова за змінною x,

$$F_i \in C[0,l], \quad i=1,2, \quad F_1(0)=F_1(l)=0.$$

Із наведеного вище та принципу максимуму, як у [24], випливає правильність наступної теореми (аналога теореми 11).

Теорема 14. *За умов (F0), при відомій $a \in C_+[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\beta}(Q_0)$ задачі (3.115)–(3.118), він визначений формулою*

$$u(x,t) = \big(\mathcal{G}_0F_0\big)(x,t) + \big(\mathcal{G}_1F_1\big)(x,t) + \big(\mathcal{G}_2F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad (3.124)$$

де

$$\big(\mathcal{G}_0F_0\big)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)F_0(y,\tau)dy,$$

$$\big(\mathcal{G}_j F_j\big)(x,t) = \int\limits_0^l G_j(x,t,y,0,a)F_j(y)dy\,,\ j=1,2\,.$$

Теореми про існування та єдиність розв'язку оберненої крайової задачі. Нехай виконуються умови (F0) та умови

(F): $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ та позначаємо $\inf\limits_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}|F_3(t)| = b_0\ (>0)$,

$F_0(x,t) > 0\,,\ (x,t)\in Q_0\,,\ F_i(x)\geq 0\,,\ x\in[0,l]\,,\ i=1,2\,,\ t^{\beta/2}F_3(t)>0, t\in[0,T]$,

або

$F_0(x,t) < 0\,,\ (x,t)\in Q_0\,,\ F_i(x)\leq 0\,,\ x\in[0,l]\,,\ i=1,2\,,\ t^{\beta/2}F_3(t)<0, t\in[0,T]$.

Підставимо функцію (3.120) в умову (3.119). Одержуємо

$$a(t)\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\mathcal{G}_0F_0\big)(0,t)+\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)+\big(\mathcal{G}_2F_2\big)(0,t)\Big] = F_3(t), \quad t\in[0,T]$$

або, враховуючи припущення (F),

$$h(t) = t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\mathcal{G}_0F_0\big)(0,t)+\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)+\big(\mathcal{G}_2F_2\big)(0,t)\Big]\cdot[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}, \quad (3.125)$$

$t\in[0,T]$, де $h(t) = [a(t)]^{-1}$.

Зауважимо, що права частина (3.125) є нелінійною функцією від $h(t)$.

Результатом теореми 14, додатності функцій $\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_1(0,t,y,0,a)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_2(0,t,y,0,a)}{\partial x}$, $y\in[0,l]$, $0\leq\tau<t\leq T$ та наведених міркувань є наступна теорема.

Теорема 15. *За припущень (F0), (F) пара функцій $(u,a)\in\mathcal{M}_\beta$ є розв'язком задачі (3.115)-(3.119) тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція $h(t) = 1/a(t)$, $t\in[0,T]$ є розв'язком рівняння (3.125), функція $u(x,t)$ визначена формулою (3.124).*

Теорема 16. *За припущень (F0), (F) розв'язок $(u,a)\in\mathcal{M}_\beta$ задачі (3.115)-(3.119) існує: функція $u(x,t)$ визначена формулою (3.124), $a(t) = [h(t)]^{-1}$, де $h(t)$ – розв'язок операторного рівняння (3.125).*

Доведення. Враховуючи теорему 15, залишається довести розв'язність рівняння (3.125) у класі додатних неперервних функцій на $[0,T]$. Доводимо спочатку розв'язність рівняння (3.125) у класі

$$M_R = \{h\in C[0,T]: \quad ||h||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]}|h(t)|\leq R\}$$

при деякому $R>0$. Для цього використаємо принцип Шаудера. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := t^{\beta/2}\Big[\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_0F_0\big)(0,t)+$$
$$+\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)+\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_2F_2\big)(0,t)\Big]\cdot[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1},\ t\in[0,T].$$

Покажемо спочатку, що $P: M_R \to M_R$.

На підставі знайдених оцінок операторів Гріна та їхніх похідних, при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ матимемо

$$|(Ph)(t)| \le b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h)}{\partial x}\cdot|F_0(y,\tau)|dy+$$

$$+\int\limits_0^l \frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h)}{\partial x}\cdot|F_1(y)|dy+\int\limits_0^l \frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h)}{\partial x}\cdot|F_2(y)|dy\Big]\le$$

$$\le b_0^{-1}\Big[\sqrt{R}c_0^*t^{\beta}||F_0||_{C(\bar{Q})}+c_1^*\Big(\sqrt{R}+t^{\beta/2}\Big)||F_1||_{C[0,l]}+c_2^*t\sqrt{R}||F_2||_{C[0,l]}\le$$
$$\le c_1\sqrt{R}+c_2,$$

де $||F_0||_{C(\bar{Q})} := \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}}|F_0(x,t)|$, $c_i^*(i=0,1,2), c_1, c_2$ – додатні числа.

За властивістю функції $c_1\sqrt{R}+c_2$ при довільних додатних числах c_1, c_2 існує таке $R_0 = R_0(c_1,c_2) > 0$, що для всіх $R > R_0$ виконується

$$c_1\sqrt{R}+c_2 < R.$$

Тоді при $h \in M_R$ для всіх $R > R_0$ матимемо $||Ph||_{C[0,T]} < R$, а отже, $P:\ M_R \to M_R$.

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1, h_2 \in M_R$, $t\in[0,T]$

$$(Ph_1)(t)-(Ph_2)(t)=$$
$$=t^{\beta/2}[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\Big[\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_1)}{\partial x}-$$
$$-\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_0(y,\tau)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^l t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x}-\frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_1(y)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^l t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x}-\frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_2(y)dy.$$

Підінтегральні вирази інтегровні та дорівнюють нулю при $h_1(t)=h_2(t)$. Тому значення $|(Ph_1)(t)-(Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t\in[0,T]$ при малих значеннях $h_1(t)-h_2(t)$, $t\in[0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було встановлено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t),\ t\in[0,T]\}$ при $h\in M_R$, крім того, із властивостей операторів Гріна випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)$, таке що при $|\Delta t|<\delta$ для довільних $h\in M_R$, $t\in[0,T]$

$$|(Ph)(t+\Delta t)-(Ph)(t)|<\varepsilon,$$

а отже, множина $\{(Ph)(t),\ t\in[0,T]\}$ при $h\in M_R$ одностайно неперервна.

Згідно з принципом Шаудера, існує розв'язок $h\in M_R$ рівняння (3.125).

Було показано скінченість правої частини в (3.125) для всіх $t\in[0,T]$. Тоді за умов на задані функції маємо:

$$t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)>0\,,\qquad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_iF_i\big)(0,t)\ge 0\,,\ i=0,2\,,\qquad t\in[0,T]$$

або $$t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)<0\,,\qquad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_iF_i\big)(0,t)\le 0\,,\ i=0,2\,,\qquad t\in[0,T]\,.$$

Звідси, враховуючи також умови щодо функції F_3, одержуємо, що $(Ph)(t)>0$ для всіх $t\in[0,T]$, $h\in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (3.125), додатність розв'язку $h(t)$ на $[0,T]$ забезпечується умовами (F0) і (F).

Примітка. З доведення теореми 16 випливає існування розв'язку задачі (3.115)-(3.119) і тоді, коли неперервність функції $F_0(x,t)$ на $\overline{Q}_0$ замінити слабшою умовою – неперервністю функції $t^{\beta/2}F_0(x,t)$ на $\overline{Q}_0$.

Теорема 17. *За умов (F) щодо функції F_3 розв'язок $(u,a)\in\mathcal{M}_\beta$ задачі (3.115)-(3.119) єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2)\in\mathcal{M}_\beta$ – два розв'язки задачі, $v=u_1-u_2$, $a=a_1-a_2$, то

$$ {}^{C}D_t^{\beta}v-a_1(t)v_{xx}=a(t)u_{2_{xx}},\quad (x,t)\in Q, \tag{3.126}$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0,\quad v_{|t=0}=0, \tag{3.127}$$

$$a_1(t)\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t), \quad t \in (0,T] \tag{3.128}$$

і для функції v правильне зображення

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a_1)\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy, \quad (x,t)\in \bar{Q}_0. \tag{3.129}$$

Підставляючи функцію (3.129) в умову (3.128), матимемо

$$a_1(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t),$$

тобто

$$a(t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy = 0, \quad t\in[0,T].$$

Одержали, що за припущення теореми функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром, а отже, $a(t)=0$ на $[0,T]$. Тоді з (3.129) одержуємо $v(x,t)=0$, $(x,t)\in\bar{Q}_0$.

Контрольні запитання і завдання.

1. Сформулювати крайову задачу для рівняння з дробовою похідною і описати ідею застосування до неї методу рядів Фур'є.

2. Дати означення вектор-функції Гріна задачі Коші для рівняння дробової дифузії.

3. Який зв'язок між компонентами вектор-функції Гріна задачі Коші? Як одержати його?

4. Дати означення вектор-функції Гріна першої крайової задачі для рівняння дробової дифузії.

5. Який зв'язок між компонентами вектор-функції Гріна першої крайової задачі для рівняння дробової дифузії і як одержати його?

6. Як побудувати фундаментальну функцію рівняння дробової дифузії за допомогою перетворення Фур'є?

7. Навести приклади обернених задач для рівняння дробової дифузії і вказати методи їх розв'язання.

8. Яка ідея доведення теореми існування розв'язку задачі Коші для рівняння дробової дифузії у просторах Соболєва (беселевих потенціалів)?

9. Навести формулу розв'язку першої крайової задачі за допомогою вектор-функції Гріна.

10. Яка ідея доведення теореми існування розв'язку першої крайової задачі для рівняння дробової дифузії у просторах узагальнених функцій?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] *Бахрушин В.Є.* Математичні основи моделювання систем: навчальний посібник для студентів / В.Є. Бахрушин - Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2009. - 224 с.

[2] *Березанский Ю.М.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач / Ю.М. Березанский, Я.А. Ройтберг // Укр. мат. журн. – 1967. – Т. 19, 5. – С. 3 – 32.

[3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров – М.: Наука, 1981. – 512 с.

[4] *Гончаренко В.М.* Основы теории уравнений с частными производными / В.М. Гончаренко – К.: Вища шк., 1985. – 311 с.

[5] *Городецький В.В.* Узагальнені функції. Методи розв'язування задач. Ч.1. Навч.посібник / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь, М.І. Нагнибіда – – Чернівці: Книги - XXI, 2010. – 242 с.

[6] *Городецький В.В.* Узагальнені функції. Методи розв'язування задач. Ч.2. Навч.посібник / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь, М.І. Нагнибіда - Чернівці: Книги - XXI, 2010. – 216 с.

[7] *Гупало Г.-В.С.* Елементарна теорія узагальнених функцій та деякі її застосування / Г.-В.С. Гупало, Г.П. Лопушанська. – К.: НМК ВО, 1992. – 123 с.

[8] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян – М.: Наука, 1999. – 671 с.

[9] *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / С.Д. Ивасишен – К.: Вища школа, 1990. – 200 с.

[10] *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26, 4. – С. 660 – 670.

[11] *Лопатинский Я.Б.* Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа / Я.Б. Лопатинский // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 78, 5. – С. 865 – 867.

[12] *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн. – Т.51, №1. – 1999. – С. 48 – 59.

[13] *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': монографія / Г.П. Лопушанська – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 287 с.

[14] *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський // Укр. матем. журн.–2012.– Т. 64, № 8. – С. 1067-1080.

Переклад: Lopushanska H.P., Lopushanskyj A.O., Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions. *Ukrainian Math. J.* (2013) **64**, 8, 1215-1230. doi: 10.1007/s11253-013-0711-z (translaited from Ukr. Mat. Zhurn. (2012) **64**, №8, 1067-1080)

[15] *Лопушанська Г.П.* Перетворення Фур'є та Лапласа: узагальнення, застосування. Навч.-метод. посіник / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус - Вид-во Львів. ун-ту, 2014 – 153 с.

[16] *Лопушанська Г.П.* Відновлення правої частини рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / Г.П. Лопушанська // Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер. "Фіз.-мат. науки". – 2017, no 871. – С. 88-92.

[17] *Лопушанська Г.П.* Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус // Мат. студії. – 2015. – 44, no 2. – С. 215-220.

[18] *Лопушанський А.О.* Розв'язність оберненої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2014. – Вип. 79.– С. 97-110.

[19] *Лопушанский А.О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселевых потенциалов / А.О. Лопушанский // Сиб. матем. ж. – 2014. – 55, №6.–С. 1089-1097.

[20] *Лопушанський А.О.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, 5. – С. 655-667. Переклад: Lopushanskyi, A.O.,Lopushanska, H.P. One inverse problem for the diffusion-wave equation in bounded domain// Ukrainian Mathematical Journal, 2014, 66 (5) ,pp.743-754.

[21] *Лопушанський А.О.* Обернена задача у просторі узагальнених функцій / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська, В.Р. Рапіта // Укр. матем. журн.– 2016. – Т. 68, №2. – С. 241-253. [Англійський переклад: A. Lopushans'kyi, H. Lopushans'ka, V. Rapita, Inverse Problem in the Space of Generalized Functions, Ukrainian Mathematical Journal, July 2016, Volume 68, Issue 2, pp 269–282. First Online: 19 October 2016. https://link.springer.com/article/10.1007/s11253-016-1223-4]

[22] *Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П.* Визначення правої частини рівняння дифузії з дробовими похідними // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, no 3. – С. 240-252.

[23] *Титчмарш Е.* Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980.—464 с.

[24] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман – М.: Мир, 1968. – 427 с.

[25] Функциональный анализ / СМБ: под общей ред. Крейна С.Г. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[26] *Хусеїнов Д.Я.* Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник / Д.Я. Хусеїнов, І.І. Харченко, А.В. Шатирко – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010. – 130 с.

[27] *Чикрий А.А.* Об аналоге формулы Коши для линейныз систем произвольного дробного порядка / А.А. Чикрий, И.И. Матичин // Доповіді Національної академії наук України. – 2007, **1**.– 50-55.

[28] *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / V.V. Anh and N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics. – 2001. – 104(5/6): 1349-1387.

[29] *Anh V.V.* Dynamics model of long-memory processes driven by Levy noise / V.V. Anh, C.C. Heyde and N.N. Leonenko // 2nd NaPhySto Levy conference. – Aarhus, January, 2002. – 22-32.

[30] *Damor R.S.* Solution of fractional bioheat equation in terms of Fox's H-function / R.S. Damor, S. Kumar, A.K. Shukla // Damor et al. SpringerPlus (2016) 5:111 DOI 10.1186/s40064-016-1743-2

[31] *Duan J. Sh.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phis. – 2005. – 46 (013504). https://doi.org/10.1063/1.1819524.

[32] *Hanyga A.* Multi-dimensionnal solutions of space-time-fractional diffusion equations / A. Hanyga // Proc. R. Soc. Lond A. – 2002. – **458**. – P. 429-450.

[33] *Hu X.* Fractional Sobolev space on time scales and its application to a fractional boundary value problem on time scales / X. Hu, Y. Li // Journal of Function Spaces. – 2022. – 1-20.

[34] *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. – 390p. Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

[35] *Kian Y.* On existence and uniqueness of solutions for semilinear fraction wave equations / Y. Kian, M. Yamamoto // arXiv:1510.03478v1[math.AP]12 Oct2015.

[36] *Kilbas A.A.* H-Transforms / A.A. Kilbas, M. Sajgo. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC. – 2004. – 401 p.

[37] *Kilbas A.A.* Theory and Applications of fractional differential equations / Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. – Elsevier: Amsterdam. – 2006.

[38] Kochubei A. Fractional-parabolic systems, *arXiv*:1009.4996v2[math.AP] 18 Jun2011

[39] *Kochubei A.* The Vladimirov-Taibleson operator: Inequalities, Dirichlet Problem, Boundary Hцlder Regularity / A. Kochubei // arXiv:2209.07998 [math.AP].– 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.07998

[40] *Li Z.* Uniqueness in inverse boundary value problems for fractional diffusion equations / Li Z., Imanuyilov O.Y., Yamamoto M . – Preprint, arXiv:1404.7024.

[41] *Lopushanska H.* Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation / H. Lopushanska, V. Rapita // EJDE. – 2015. – V. 2015, №153. – P. 1-13. http://ejde.math.txstate.edu/2015/153.

[42] *Lopushanska H.* Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation / H. Lopushanska, A. Lopushansky, O. Myaus // Electronic J. Diff. Equ. – 2016 (2016). – no 14. – p. 1-9. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu/2016/14.

[43] *Lopushanska H.* Inverse problem to fractional diffusion equation with unknown young coefficient / H. Lopushanska, V. Rapita // Visnyk Lviv. Un-ty. – Ser. Mech.-Mat. – 2015, Issue 80.–P. 88-99.

[44] *Лопушанська Г.П.* Відновлення початкових даних у задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / Г. П. Лопушанська, О. М. М'яус // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 68–77. Translation: Lopushans'ka H. P., M'yaus O. M. Restoration of the initial data in the problem for a diffusion equation with fractional derivative with respect to time // J. Math. Sci. – 2018. – 229, No. 2. – P. 187–199. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3670-y

[45] *Lopushans'ka H.* Inverse source problem for semilinear time fractional equation / H. Lopushans'ka, O. Myaus // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2019. – Issue 87. – P. 109-121.

[46] *Luchko Yu.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation / Yu. Luchko // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – Vol. 351. – P. 409-422.

[47] *Luchko Yu.* General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems / Yu Luchko, M. Yamamoto // Fract. Calc. Appl. Anal.– 2016. – **19**. – P. 675–695.

[48] *Luchko Yu.* Comperison principles for the linear and semilinear time-fractional diffusion equations with the Robin boundary condition / Yu Luchko, M. Yamamoto // *arXiv*: 2208.04606v1[math.AP] 9 Aug 2022.

[49] *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation / F. Minardi // Appl. Math. Lett. – 1996. – **9** (6). – P. 23-28.

[50] *Mainardi F.* The fundamental solution of the space-time-fractional diffusion equation / F. Mainardi, Yu. Luchko, G. Pagnini // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2001. – **4**. – P. 153-192.

[51] *Palani M.* Successive approximations of solutions to the Caputo fractional differential equations / M. Palani and A. Usachev // FDC. – – 2020.–V. 10, no 2. – 153-167.

[52] *Podlubny I.* Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineearing / I. Podlubny – Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1993.

[53] *Povstenko Y.* Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers / Y. Povstenko – New York: Birkhauser, 2015. – xiv+460 p.

[54] *Sagar T. Sutar.* Global existence and uniqueness for implicit differential equation of arbitrary order / Sagar T. Sutar, Kishor D. Kucche // FDC. – 2015.–V. 5, no 2. – 199-208.

[55] *Shich T.-T.* On a new class of fractional partial differential equations / T.-T. Shich, D.E. Spector // arXiv: 1403.7942v2 [math.AP] 1 Sept 2016 – 1-26.

[56] *Stanislavsky A.A.* Nonlinear reaction with fraction dynamics / A.A. Stanislavsky //arXiv:1111.3203v1 [nlin S1] 14 Nov 2011.

[57] *Zauderer E.* Partial Differential Equations of Applied Mathematics / E. Zauderer – New-York, 1985. – 449 p.

Навчальне видання

Лопушанська Галина Петрівна,
Лопушанський Андрій Олегович,
М'яус Ольга Миколаївна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Навчальний посібник

Редактор Н.Й. Плиса
Комп'ютерний набір і верстка Г.П. Лопушанська
Технічний редактор С.З. Сеник