Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський

МЕТОДИ РЯДІВ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Методичні вказівки до лабораторних робіт
з рівнянь математичної фізики та індивідуальні завдання

Львів
2022

Лопушанська Г. П., Бугрій О. М., Лопушанський А. О. Методи рядів і перетворення Фур'є: методичні вказівки до лабораторних робіт з рівнянь математичної фізики та індивідуальні завдання. - Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. – 59 с.

Викладено основи теорії інтегрального перетворення Фур'є, його застосування до виводу формул розв'язків задач Коші для рівнянь параболічного і гіперболічного типів. Подано загальну схему методу відокремлення змінних для лінійних рівнянь із частинними похідними другого порядку. Наведено приклади із розв'язками і індивідуальні завдання. Для студентів факультету прикладної математики і інформатики, механіко-математичного факультету.

ЗМІСТ

Вступ

Математичні моделі багатьох задач природознавства, економіки, суспільних наук – це початкові чи крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь чи диференціальних рівнянь із частинними похідними. Мета курсу рівнянь математичної фізики полягає в оволодінні методами дослідження коректності задач для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку і основних властивостей їхніх розв'язків, у вивченні методів розв'язання таких задач.

Ці методичні вказівки є електронним доповненням до викладених у підручниках і методичних вказівках [1,2,5] розділів по застосуванню методів рядів і інтегральних перетворень до побудови розв'язків початково-крайових задач для основних рівнянь математичної фізики і задачі Коші.

Подано рекомендації до виконання лабораторних робіт та індивідуальні завдання для закріплення двох важливих тем курсу.

Розділ 1

Перетворення Фур'є

1.1 Означення і властивості

Функція

$$\widehat{\varphi}(s) = \mathcal{F}[\varphi](s) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,s)} dx, \quad s = \sigma + \tau i \in \mathbb{C}^n \tag{1.1}$$

називається *перетворенням Фур'є* функції φ.

Тут $i^2 = -1$, $(x,s) = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n$ — скалярний добуток векторів x та s.

При $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (тобто, коли $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx < \infty$) інтеграл (1.1) існує та визначає неперервну функцію $\widehat{\varphi}(s)$.

Нехай $n = 1$. Обчислимо

$$\tfrac{d\widehat{\varphi}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \tfrac{\widehat{\varphi}(s+\Delta s) - \widehat{\varphi}(s)}{\Delta s} = i \int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi(x) e^{i(x,s)} dx\,.$$

Якщо $\int\limits_{\mathbb{R}} |x\varphi(x)| dx < \infty$, то функція $\frac{d\widehat{\varphi}}{ds}$ неперервна для всіх $s \in \mathbb{C}$ і тоді $\widehat{\varphi}$ — ціла аналітична функція (аналітична функція на всій комплексній площині). Продовжуючи, знаходимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^m \varphi(x) dx = \widehat{\varphi}^{(m)}(s),$$

якщо $\int\limits_{\mathbb{R}} |x^m \varphi(x)| dx < \infty$, тобто

$$\frac{d^m \mathcal{F}[\varphi]}{ds^m} = \mathcal{F}[(ix)^m \varphi(x)](s), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Для функції $\varphi(x)$, що спадає до нуля на нескінченості разом із похідними до порядку m, обчислимо, інтегруючи частинами,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(x)e^{ixs}dx = -is\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{(m-1)}(x)e^{-ixs}dx = \cdots = (-is)^m \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{ixs}dx\,,$$

тобто

$$\mathcal{F}[\varphi^{(m)}(x)](s) = (-is)^m\mathcal{F}[\varphi](s), \quad s\in\mathbb{C}. \tag{1.3}$$

Обернене перетворення Фур'є для $\widehat{\varphi}\in Z$ має вигляд

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}](x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\sigma)e^{-i(x,\sigma)}d\sigma, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Порівнюючи формули (1.1) і (1.4), одержуємо зв'язок між прямим і оберненим перетвореннями тої самої функції

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[\varphi](-\sigma).$$

З'ясуємо ще деякі властивості перетворення Фур'є. За формулою (1.1) знайдемо

$$\mathcal{F}[\varphi(x-x_0)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-x_0)e^{i(x,s)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)e^{i(y,s)}dy\cdot e^{i(x_0,s)},$$

звідки

$$\mathcal{F}[\varphi(x-x_0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)]\cdot e^{i(x_0,s)}.$$

Подібно

$$\mathcal{F}[\varphi(x)\cdot e^{i(x,s_0)}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{i(x,s+s_0)}dx = \mathcal{F}[\varphi(x)](s+s_0).$$

Означення. Згорткою функцій φ,ψ називається функція

$$(\varphi*\psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)dy.$$

Якщо $\varphi,\psi\in L_1(\mathbb{R}^n)$, то існує $\varphi*\psi\in L_1(\mathbb{R}^n)$ і ця згортка комутативна: $\varphi*\psi=\psi*\varphi$, формула диференціювання згортки (за умови її існування):

$$(\varphi*\psi)'(x) = (\varphi'*\psi)(x) = (\varphi*\psi')(x)\,.$$

Якщо $\varphi,\psi\in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $\varphi(x)=0$ при $x<0$ і $\psi(x)=0$ при $x<0$, то $\varphi*\psi$ існує, виражається формулою

$$(\varphi*\psi)(x) = \int\limits_0^x \varphi(y)\psi(x-y)dy$$

і $(\varphi * \psi)(x) = 0 \;\; x < 0$.

Доведемо, що

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi] \quad \forall \varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi * \psi] &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)dy \Big) e^{i(x,s)}dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)e^{i(x,s)}dx \Big) dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(z)e^{i(y+z,s)}dz \Big) dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(z)e^{i(z,s)}dz \Big) e^{i(y,s)}dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(z)e^{i(z,s)}dz \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)e^{i(y,s)}dy. \end{aligned}$$

Позначивши $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j \in \mathbb{Z}_+$, $D^\gamma \varphi(x) = \frac{\partial^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}}$, $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\gamma_n}$, випишемо властивості перетворення Фур'є функцій декількох аргументів:

1) $\mathcal{F}[D^\gamma \varphi(x)](s) = (-is)^\gamma \mathcal{F}[\varphi], \quad s \in \mathbb{C}^n$;

2) $\mathcal{F}[(ix)^\gamma \varphi(x)](s) = D^\gamma \mathcal{F}[\varphi](s), \quad s \in \mathbb{C}^n$;

3) $\mathcal{F}[\varphi(x - x_0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)] \cdot e^{i(x_0,s)}$;

4) $\mathcal{F}[\varphi(x) \cdot e^{i(x,s_0)}] = \mathcal{F}[\varphi(x)](s + s_0)$;

5) $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]$;

6) $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[\varphi](-\sigma)$.

Приклади: 1) $\mathcal{F}[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$ ($n = 1$);

$$\mathcal{F}[e^{-a^2x^2}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} e^{ix\xi} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 + ix\xi} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-[a^2x^2 - 2ax\frac{i\xi}{2a}]} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax - \frac{i\xi}{2a})^2 - \frac{\xi^2}{4a^2}} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax - \frac{i\xi}{2a})^2} dx \; e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} = [ax - \tfrac{i\xi}{2a} = \eta, \; adx = d\eta] =$$

$$= \frac{1}{a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \; e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}};$$

2) $\mathcal{F}[\theta(a-|x|)] = \int\limits_{-a}^{a} e^{ix\xi}dx = \frac{e^{ia\xi}-e^{-ia\xi}}{i\xi} = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$ (тут $\theta(a-|x|)=1$ при $|x|<a$, $\theta(a-|x|)=0$ поза $[-a,a]$);

3) знайдемо $\mathcal{F}[\delta_R(x)]$, де $\delta_R(x)=1$ на сфері $|x|=R$ в $\mathbb{R}^3$ і нулю поза нею;

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \int\limits_{|x|=R} e^{i(x,\xi)}dS = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} e^{i|x||\xi|\cos\beta}\sin\beta d\beta =$$

$$= -2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} e^{iR|\xi|\cos\beta}d(\cos\beta) =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_{-1}^{1} e^{iR|\xi|\eta}d\eta = 2\pi R\frac{e^{iR|\xi|}-e^{-iR|\xi|}}{i|\xi|},$$

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \frac{4\pi R\sin(R|\xi|)}{|\xi|};$$

4) $\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\xi|^{\frac{n}{2}-1}}\int\limits_0^{\infty} g(r)r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)dr$, $n=1,2,3,\ldots$, де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя 1-го роду порядку ν, зокрема,

$\mathcal{F}[g(|x|)] = 2\int\limits_0^{\infty} g(r)\cos(r|\xi|)dr, \quad n=1$,

$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} g(r)rJ_0(r|\xi|)dr, \quad n=2$,

$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^{\infty} g(r)r\sin(r|\xi|)dr, \quad n=3$;

5) використовуючи наведені формули перетворення Фур'є сферично-симетричних функцій, знаходимо

$\mathcal{F}[e^{-p|x|}] = 2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{p}{(p^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$,

зокрема,

$\mathcal{F}[e^{-|x|}] = \frac{2}{1+\xi^2}$ у випадку $n=1$;

$\frac{\mathcal{F}[|x|^p]}{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} = 2^{n+p}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{|\xi|^{-p-n}}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}$.

За формулою (1.1) не можемо знайти, наприклад, $\mathcal{F}[1], \mathcal{F}[x^m]$, $m>0$ (інтеграли у формулі не існують). Треба вийти у простір узагальнених функцій.

Узагальнені функції

Функція $f(x)$ називається *фінітною*, якщо існує компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, поза яким $f(x) \equiv 0$, множина $supp f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ називається *носієм* функції $f(x)$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$, зокрема, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ — простір нескінченно диференційовних фінітних функцій у Ω (*простір основних функцій*). Функція

$$\varphi(x,a) := \begin{cases} C_a e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases},$$

де $a > 0$, C_a — додатна стала, належить простору $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Далі вважатимемо C_a такою, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,a)dx = 1$.

Для довільних обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *та компакта* $B \subset \Omega$ *існує така функція* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *що* $0 \leq \psi(x) \leq 1$ *та* $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$.

Кажемо, що послідовність $\varphi_k \to 0$ (при $k \to \infty$) у просторі $\mathcal{D}(\Omega)$, якщо:

а) існує компакт $K \subset \Omega$, такий що $\varphi_k(x) \equiv 0$ поза K для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $supp \varphi_k \subset K$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;

б) для довільного мультиіндексу γ $D^\gamma \varphi_k \to 0$ рівномірно (на K).

Це дуже сильна топологія.

$\mathcal{D}(\Omega)$ *є прикладом локально-опуклого топологічного простору*.

Значення функціонала f на основній функції φ позначаємо через (f,φ).

Відображення $f : \Phi \to \mathbb{R}$ називається функціоналом на множині Φ.

Функціонал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ називається *лінійним*, якщо для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ і довільних дійсних (або комплексних) чисел C_1, C_2

$$(f, C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1(f,\varphi_1) + C_2(f,\varphi_2).$$

Функціонал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ називається *неперервним*, якщо зі збіжності до нуля у просторі $\mathcal{D}(\Omega)$ послідовності φ_k при $k \to \infty$ випливає, що числова послідовність $(f,\varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Узагальненою функцією (розподілом) в Ω називається лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}(\Omega)$. Сукупність узагальнених функцій утворює векторний простір, який позначають $\mathcal{D}'(\Omega)$ і наділяють його слабкою топологією: $f_k \to 0$ $(k \to \infty)$ у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$, якщо для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(f_k, \varphi) \to 0,\ k \to \infty$.

Приклади узагальнених функцій:

1) δ — функція Дірака: $(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2) Кожна *звичайна* (локально інтегровна) в Ω функція $f(x)$ визначає узагальнену функцію f

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.6}$$

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \overline{f(x)}\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.7}$$

де $\overline{f(x)}$ — комплексно спряжений вираз до $f(x)$, якщо функції f, φ комплексно-значні. Далі клас звичайних функцій в Ω позначатимемо через $L_{1,loc}(\Omega)$.

3) $(P\frac{1}{x}, \varphi(x)) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

4) Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^n$, $\mu \in C(S)$, то рівністю

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_{S} \mu\varphi dS \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

визначено узагальнену функцію $\mu\delta_S$ — простий шар на поверхні S.

Узагальнена функція f, для якої існує звичайна функція $f(x)$, така що виконується рівність (1.6) або (1.7), називається *регулярною узагальненою функцією*, а всяка інша — *сингулярною узагальненою функцією.* Функції $\delta(x)$, $\delta(x - x_0)$, $P\frac{1}{x}$, $\mu\delta_S(x)$ є сингулярними узагальненими функціями.

Дві узагальнені функції f_1, f_2 називаються рівними ($f_1 = f_2$) у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$, якщо для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$.

Між простором звичайних і регулярних узагальнених функцій є взаємо-однозначна відповідність: кожна звичайна функція $f(x)$ визначає узагальнену функцію f (за формулою (1.6) або (1.7)) і для кожної регулярної узагальненої функції f існує тільки одна звичайна функція $f(x)$ така, що дорівнює f у просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$. Це випливає з такої леми.

Лема 1 (Дюбуа-Реймона). *Якщо $f(x)$ — звичайна функція в Ω, то $f(x) = 0$ майже всюди в Ω тоді і тільки тоді, коли*

$$\int\limits_{\Omega} \overline{f(x)}\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Основні дії у просторах узагальнених функцій.

Оскільки клас $\mathcal{D}'$ узагальнених функцій є розширенням класу звичайних функцій, то бажано визначити операції у $\mathcal{D}'$ так, щоб вони переходили у відомі операції для звичайних функцій.

1. *Додавання узагальнених функцій і множення на числа.* Якщо $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$, C_1, C_2 — комплексні числа, то $C_1 f_1 + C_2 f_2$ — така узагальнена функція із $\mathcal{D}'$, що

$$(C_1 f_1 + {}_2 f_2, \varphi) = \overline{C_1}(f_1, \varphi) + \overline{C_2}(f_2, \varphi) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

2. *Множення узагальненої функції на нескінченно диференційовну.* Якщо $f \in \mathcal{D}'$, $a \in C^\infty$, то рівністю

$$(af, \varphi) = (f(x), \overline{a(x)}\varphi(x)) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}$$

визначено $af \in \mathcal{D}'$, оскільки $a\varphi \in \mathcal{D}$.

Приклади:

1) $(x\delta(x), \varphi) = (\delta(x), x\varphi) = 0 = (0, \varphi) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}$, тому за означенням рівності узагальнених функцій $x\delta(x) = 0$ у просторі $\mathcal{D}'$;

2) $(xP\frac{1}{x}, \varphi(x)) = (P\frac{1}{x}, x\varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = (1, \varphi) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}$, тому $xP\frac{1}{x} = 1$;

3) для $a \in C^\infty$, $\varphi \in \mathcal{D}$ маємо

$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x)) =$
$= (a(0)\delta(x), \varphi(x))$, а отже, $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

3. *Диференціювання узагальнених функцій.* Якщо $f \in \mathcal{D}'$, то рівністю

$$(D^\gamma f, \varphi) = (-1)^{|\gamma|}(f(x), D^\gamma\varphi(x)) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}$$

визначено $D^\gamma f \in \mathcal{D}'$, так що кожна узагальнена функція нескінченно диференційовна (у визначеному вище сенсі).

Приклади.

1) Нехай $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Це звичайна функція (а отже, породжує регулярну узагальнену функцію з $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), яку називають *одиничною функцією Хевісайда*. За означенням похідної для довільної $\varphi \in \mathcal{D}$ матимемо

$$(\theta'(x),\varphi(x)) = -(\theta(x),\varphi'(x)) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta,\varphi)\,,\ \text{отже,}\ \theta' = \delta\,.$$

2) Якщо $f(x)$ — кусково абсолютно неперервна функція з розривами першого роду у точках $x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}$, то

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_{k=1}^{m} h_k\delta(x-x_k)\,,$$

де $\{f'(x)\}$ — похідна функції $f(x)$ у звичайному розумінні (визначена майже всюди в $\mathbb{R}$), $h_k = f(x_k+0) - f(x_k-0)$ — стрибок функції $f(x)$ у точці x_k. Наприклад,

$$f(x) = x_+^2 := \begin{cases} x^2, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} => \ f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} = 2x_+\,,$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} => f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} + \delta(x) = 2x_+ + \delta(x)\,.$$

Асоціативний добуток не визначено для довільних узагальнених функцій. Справді, з наведених вище прикладів отримуємо

$$\big(P\frac{1}{x}\cdot x\big)\cdot\delta(x) = \big(x\cdot P\frac{1}{x}\big)\cdot\delta(x) = 1\cdot\delta(x) = \delta(x)$$

однак $P\frac{1}{x}\cdot\big(x\cdot\delta(x)\big) = P\frac{1}{x}\cdot 0 = 0$.

Використовують також інші простори узагальнених функцій, вибираючи за простори основних функцій, наприклад, $C^\infty(\Omega)$ — простір нескінченно диференційовних функцій в Ω,

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta D^\gamma\varphi(x)| < +\infty \quad \forall\beta,\gamma\}\,.$$

Функція $e^{-|x|^2}$ належить простору $S(\mathbb{R}^n)$ і не належить до $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (оскільки не є фінітною).

Послідовність $\varphi_k\to 0$ ($k\to\infty$) у просторі $C^\infty(\Omega)$, якщо для довільного мультиіндексу γ $\quad D^\gamma\varphi_k(x)\to 0$ рівномірно на довільному компакті $K\subset\Omega$.

Послідовність $\varphi_k\to 0$ ($k\to\infty$) у просторі $\mathcal{S} = S(\mathbb{R}^n)$, якщо:

а) для довільних мультиіндексів β, γ існує додатна стала $C_{\beta,\gamma}$ така, що для кожного $k\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta D^\gamma\varphi_k(x)| \le C_{\beta,\gamma}\,;$$

б) для довільного мультиіндексу γ рівномірно $D^\gamma\varphi_k(x)\to 0$ ($k\to\infty$).

Позначаємо:

$\mathcal{E}'(\Omega) = (C^\infty(\Omega))'$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $C^\infty(\Omega)$,

$S' = S'(\mathbb{R}^n)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $S(\mathbb{R}^n)$.

Простір $S(\mathbb{R}^n)$ називається простором *швидко спадаючих на безмежності* гладких функцій, а простір $S'(\mathbb{R}^n)$ — простором *повільно зростаючих на безмежності* узагальнених функцій.

Прикладом регулярної узагальненої функції із S' є функціонал

$$g : (g, \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \quad \forall\psi \in Z,$$

де $g(\sigma)$ росте не швидше полінома (такі функції називаються *повільно зростаючими на безмежності*).

Для введених просторів основних та узагальнених функцій правильні такі включення:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) = L_2'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Перетворення Фур'є $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Справді, використовуючи властивості 1 та 2, для довільних $\varphi \in \mathcal{S}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, мультиіндексів β, γ одержуємо

$$\sigma^\beta D^\gamma \mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \sigma^\beta \mathcal{F}[(ix)^\gamma \varphi(x)](\sigma) = i^{|\beta|}(-i\sigma)^\beta \mathcal{F}[(ix)^\gamma \varphi(x)](\sigma) =$$
$$= i^{|\beta|}\mathcal{F}[D^\beta\big((ix)^\gamma\varphi(x)\big)](\sigma) = i^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\beta\big((ix)^\gamma\varphi(x)\big)e^{i(x,\sigma)}dx$$

і такі інтеграли рівномірно збігаються.

Якщо $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}[f] \in S(\mathbb{R}^n)$ і для довільної $\varphi \in S$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(x,\sigma)}dx\Big)\varphi(\sigma)d\sigma =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\sigma)e^{i(x,\sigma)}d\sigma\Big)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

Означення. Перетворенням Фур'є функції $f \in S'$ називається функція $g = \mathcal{F}[f] \in S'$, визначена рівністю

$$(\mathcal{F}[f], \varphi) = (f, \mathcal{F}[\varphi]) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S},$$

обернене перетворення Фур'є функції $g \in S'$:

$$(\mathcal{F}^{-1}[g], \psi) = (g, \mathcal{F}^{-1}[\psi]) \qquad \forall\psi \in S.$$

Введене перетворення Фур'є узагальнених функцій є лінійною й неперервною операцією. Для нього виконуються всі властивості, що й для перетворення Фур'є основних функцій (із S). З'ясуємо це на прикладі формули (1.2). Для $f \in S'$, кожної $\varphi \in S$ за означенням отримаємо

$$(\mathcal{F}[D^\gamma f], \varphi) = (D^\gamma f, \mathcal{F}[\varphi]) = (f, (-1)^{|\gamma|} D^\gamma \mathcal{F}[\varphi]) =$$

$$= (f(s), \mathcal{F}[(-ix)^\gamma \varphi(x)]) = (\mathcal{F}[f](x), (-ix)^\gamma \varphi(x)) =$$

$$((-ix)^\gamma \mathcal{F}[f](x), \varphi(x)),$$

а отже,

$$\mathcal{F}[D^\gamma f] = (-ix)^\gamma \mathcal{F}[f] \qquad \forall f \in \mathcal{S}'.$$

Приклади.

1) $(\mathcal{F}[\delta], \varphi) = (\delta, \mathcal{F}[\varphi]) = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(s) e^{i(s,0)} ds = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi ds = (1, \varphi)$ для кожної $\varphi \in \mathcal{S}$, звідки $\mathcal{F}[\delta] = 1$.

2) $(\mathcal{F}[1], \varphi) = (1, \mathcal{F}[\varphi]) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(s) ds = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(s) e^{i(s,0)} ds = (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n (\delta, \varphi)$ для кожної $\varphi \in \mathcal{S}$, звідки $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n \delta$.

3) $\mathcal{F}[x^m] = (-i)^m \mathcal{F}[(ix)^m \cdot 1] = (-i)^m \frac{d^m}{ds^m} \mathcal{F}[1] = 2\pi (-i)^m \delta^{(m)}(s)$. Тут ми використали властивість 2 перетворення Фур'є.

4) $\mathcal{F}[e^{ax}] = \mathcal{F}[e^{i(axi)} \cdot 1] = \mathcal{F}[1](s + axi) = 2\pi \delta(s + axi)$.

5) Нехай $\mathcal{F}[\frac{1}{x}] = g(\sigma)$. Позаяк $\mathcal{F}[x \cdot \frac{1}{x}] = \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\sigma)$, а за властивістю перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}[x \cdot \tfrac{1}{x}] = -i\mathcal{F}[ix \cdot \tfrac{1}{x}] = -i\tfrac{d}{d\sigma}\mathcal{F}[\tfrac{1}{x}] = -i\tfrac{dg}{d\sigma},$$

тоді $-i\frac{dg}{d\sigma} = 2\pi\delta(\sigma)$, звідки $g(\sigma) = 2\pi i \theta(\sigma) + C$, де C – довільна стала.

Для однозначності визначення функції g використаємо таку властивість: *перетворенням Фур'є парної функції є парна функція, а непарної — непарна.* Отримаємо

$g(-\sigma) = -g(\sigma)$, а отже, $2\pi i \theta(-\sigma) + C = -2\pi i \theta(\sigma) - C$, звідки

$C = -\pi i[\theta(\sigma) + \theta(-\sigma)] = -\pi i$. Отже,

$g(\sigma) = 2\pi i \theta(\sigma) - \pi i = 2\pi i[\theta(\sigma) - \frac{1}{2}]$,

$\mathcal{F}[\frac{1}{x}] = \pi i sign(\sigma)$.

6) $\mathcal{F}[\theta(R - |x|)(R^2 - |x|^2)^{-1/2}](\sigma) = 2\pi \frac{\sin(R|\sigma|)}{|\sigma|}$, $n = 2$.

Справді, $\mathcal{F}[\theta(R-|x|)(R^2-|x|^2)^{-1/2}](\sigma)=$

$$=\int\limits_{|x|<R}(R^2-|x|^2)^{-1/2}e^{i(x,\sigma)}dx=\int\limits_0^R(R^2-r^2)^{-1/2}rdr\int\limits_0^{2\pi}e^{iR|\sigma|\cos\beta}d\beta=$$

$$=\int\limits_0^R(R^2-r^2)^{-1/2}rJ_0(r|\sigma|)dr=$$

$$=2\pi R\int\limits_0^1(1-t^2)^{-1/2}tJ_0(Rt|\sigma|)dt=2\pi\frac{\sin(R|\sigma|)}{|\sigma|}.$$

Ми використали формулу:

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{iR|\sigma|\cos\beta}d\beta=2\pi J_0(r|\sigma|),$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Можна довести, що:

1) $\mathcal{F}[P\frac{1}{x^2}]=-\pi|s|$, де $(P\frac{1}{x^2},\varphi)=v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$ для кожної $\varphi\in\mathcal{S}$ (інтеграл у сенсі головного значення), також $P\frac{1}{x^2}=-(P\frac{1}{x})'$;

2) $\mathcal{F}[signx]=2iP\frac{1}{\sigma}$;

3) $\mathcal{F}[x\theta(x)]=-\pi\delta'(\sigma)-P\frac{1}{\sigma^2}$.

1.2 Вивід формули розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння

Нехай $\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$.

Розглянемо задачу Коші для хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad t>0,\qquad(1.8)$$

Позначимо через

$$v(\xi,t)=\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)]=\int\limits_{\mathbb{R}^3}u(x,t)e^{i(x,\xi)}dx$$

перетворення Фур'є функції $u(x,t)$ за змінними $x=(x_1,x_2,x_3)$ для кожного $t\geq 0$ і нехай $\widehat{\psi}(\xi)=(\mathcal{F}\psi)(x)$. За властивістю 1 перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_{x_jx_j}(x,t)]=(-i\xi_j)^2v(\xi,t),$$

і тоді

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[\Delta u(x,t)]=[(-i\xi_1)^2+(-i\xi_2)^2+(-i\xi_3)^2]v(\xi,t)=$$

$$=-(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)v(\xi,t)=-|\xi|^2v(\xi,t).$$

Також $\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_{tt}(x,t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)] = \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2}$.

Діючи оператором перетворення Фур'є на рівняння задачі, одержуємо

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_{tt}(x,t)] = a^2\mathcal{F}_{x\to\xi}[\Delta u(x,t)] \iff v_{tt}(\xi,t) = -a^2|\xi|^2 v(\xi,t),$$

а з початкових умов

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,0)] = 0, \iff \lim_{t\to 0}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)] = 0 \iff v(\xi,0) = 0,$$

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_t(x,0)] = \mathcal{F}[\psi(x)], \iff \lim_{t\to 0}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_t(x,t)] = \widehat{\psi}(\xi) \iff$$
$$v_t(\xi,0) = \widehat{\psi}(\xi).$$

Для кожного фіксованого значення $\xi \in \mathbb{R}^3$ отримали задачу Коші

$$\frac{d^2v}{dt^2} + a^2|\xi|^2 v = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \widehat{\psi}(\xi). \tag{1.9}$$

Її розв'язок $v(\xi,t) = \frac{\widehat{\psi}(\xi)\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$. Справді,

$p^2 + a^2|\xi|^2 = 0,\ v = C_1\cos(a|\xi|t) + C_2\sin(a|\xi|t)$,
$v(\xi,0) = C_1 = 0,\ v_t(\xi,0) = C_2 a|\xi| = \widehat{\psi}(\xi),\ C_2 = \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{a|\xi|}$.

Використовуючи властивість 5 перетворення Фур'є, знаходимо

$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[v(\xi,t)] = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\frac{\widehat{\psi}(\xi)\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}] =$
$= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\psi}(\xi)] * \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}] = \psi(x) * \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}]$.

Використаємо приклад при $R = at$:

$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \frac{4\pi R\sin(R|\xi|)}{|\xi|}$. Тоді

$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}] = \frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[4\pi at\frac{\sin(at|\xi|)}{|\xi|}] = \frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{at}(x)$.

Отже, $u(x,t) = \psi(x) * \frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{at}(x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(0)}\psi(z-x)dS$,

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x)}\psi(y)dS,$$

де $S_{at}(x) = \{\xi :\ |\xi - x| = at\}$ – сфера радіуса at з центром у точці x.

Методом перетворення Фур'є ми знайшли формальний розв'язок задачі Коші (1.8). Можна показати, що він є класичним (із $C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$), якщо $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, класу $C^3(t>0)$, якщо $\psi \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

Це краще видно, якщо перейти у формулі від інтегрування за $S_{at}(x)$ до інтегрування за сферою радіуса 1 з центром у початку координат $S_1(0) = S_1$ (тоді $dS = a^2t^2dS_1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – біжучі координати точки на S_1). Одержуємо

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{S_1} \psi(x + at\alpha)\, dS_1.$$

1.3 Задача Коші для хвильового рівняння. Загальний випадок

Класичним розв'язком задачі Коші для хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \ \ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \qquad (1.10)$$

називається функція $u = u(x,t)$, двічі неперервно диференційовна в $Q := \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, неперервно диференційовна в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ (клас таких функцій позначатимемо через $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$), підставляючи яку у рівняння й початкові умови одержуємо тотожності відповідно в $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ та $\mathbb{R}^3$.

Розв'язок задачі (1.10) шукаємо у вигляді суми

$$u = u_1 + u_2 + u_3.$$

де u_1, u_2, u_3 – розв'язки відповідно задач

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \qquad (1.11)$$

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \qquad (1.12)$$

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \qquad (1.13)$$

Було знайдено

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS. \qquad (1.14)$$

Розв'язки задач (1.12) і (1.13) можна записати, знаючи розв'язок задачі (1.11), а саме:

а) якщо $u_1 = v(x,t,\varphi)$ – розв'язок задачі (1.11) класу $C^3(t > 0) \cap C^2(t \geq 0)$ при $\psi = \varphi$, то $u_2 = v_t(x,t,\varphi)$ – розв'язок задачі (1.12);

б) якщо $u_1 = w(x,t,\tau,f)$ – розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=\tau} = 0, \quad u_t|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

тобто розв'язок задачі вигляду (1.11) (при заміні t на $t-\tau$), то

$$u_3(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t,\tau,f(x,\tau))\, d\tau$$

– розв'язок задачі (1.13).

Використовуючи твердження а, б, одержуємо *формулу Кіргофа* розв'язку задачі (1.10)

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{t}\, dS$$

$$+ \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(\xi,\tau)\, dS \Big)\, d\tau.$$

Останній доданок у формулі можна подати також у вигляді

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a})}{|\xi - x|} d\xi.$$

Справді, при заміні $a(t-\tau) = r$, $\tau = t - \frac{r}{a}$ $(ad\tau = -dr)$ маємо

$$\int\limits_0^{at} \Big(\frac{1}{4\pi a^2\, r} \int\limits_{S_r(x)} f(\xi, t - \tfrac{r}{a})\, dS \Big)\, dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{at} dr \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{f(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a})}{|\xi - x|}\, dS_\xi = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a})}{|\xi - x|} d\xi..$$

Якщо $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^2(t > 0)$, то існує класичний розв'язок задачі (1.10) і формулу розв'язку ще можна подати так:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{t}\, dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a})}{|\xi - x|}\, d\xi.$$

1.4 Розв'язок задачі Коші для рівняння коливань мембрани

Так само або використовуючи метод спуску, знаходимо, що розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + f(x_1, x_2, t),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

має вигляд

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|\xi - x| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \, d\xi_1 d\xi_2.$$

і при $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^2(t > 0)$ він є її класичним розв'язком.

1.5 Розв'язок задачі Коші для рівняння коливань струни

Класичним розв'язком задачі Коші для рівняння коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \;\; x \in R, \;\; t > 0,$$

називається функція $u = u(x, t)$, двічі неперервно диференційовна в $R \times (0, \infty)$, неперервно диференційовна в $R \times [0, \infty)$ (клас таких функцій позначатимемо через $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$), підставляючи яку у рівняння й початкові умови одержуємо тотожності відповідно в $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ та $\mathbb{R}$.

Використовуючи метод характеристик, або також за допомогою перетворення Фур'є, показуємо, що розв'язок задачі

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz,$$

$u \in C^2(t>0) \cap C^1(t \ge 0)$, якщо $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(t>0)$.

Ця формула називається *формулою Даламбера.*

1.6 Формула розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності

Нехай, як вище, Q – півпростір $\{(x,t):\ x \in \mathbb{R}^n,\ t>0\} = \{t>0\}$, $C^{2,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \ge 0)$ – клас функцій, двічі неперервно диференційовних за x та неперервно диференційовних за t в Q, неперервних, охоплюючи й гіперплощину $t=0$.

Формулювання задачі Коші. Знайти розв'язок $u(x,t)$ рівняння

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \tag{1.15}$$

який належить класу $C^{2,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \ge 0)$, *обмежений* і задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$

Розв'язок задачі (1.15), (1.16) шукаємо у вигляді суми $u = v + w$, де v та w – розв'язки відповідно задач

$$u_t = a^2\Delta u,\ (x,t) \in Q, \quad u|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t),\ (x,t) \in Q, \quad u|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

Як і у випадку задачі Коші для хвильового рівняння, можна перевірити таке: якщо $v = v(x,t,\varphi(x))$ є розв'язком задачі (1.17), то функція

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x, t-\tau, f(x,\tau))\, d\tau$$

буде розв'язком задачі (1.18).

Теорема. Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна й обмежена в $\mathbb{R}^n$, то існує єдиний розв'язок задачі (1.17) класу $C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0)$ і обмежений в Q. Він виражається формулою

$$v(x,t)=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy. \tag{1.19}$$

Ця формула називається *формулою Пуассона* або *інтегралом Пуассона.*

Враховуючи зауваження, одержуємо, що функція

$$w(x,t)=\int\limits_0^t\Big[\frac{1}{(2a)^n\pi^{\frac{n}{2}}(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)\,dy\Big]\,d\tau$$

є розв'язком задачі (1.18). Отже, розв'язок задачі (1.15), (1.16) виражається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)\,dy$$

$$+\int\limits_0^t\Big[\frac{1}{(2a)^n\pi^{\frac{n}{2}}(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)\,dy\Big]\,d\tau,\ (x,t)\in Q.$$

Виведемо формулу (1.19). Позначимо через

$$v(\xi,t)=\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)]=\int\limits_{\mathbb{R}^3}u(x,t)e^{i(x,\xi)}dx$$

перетворення Фур'є функції $u(x,t)$ за змінними $x=(x_1,x_2,x_3)$ для кожного $t\geq 0$ і нехай $\widehat{\varphi}(\xi)=\mathcal{F}[\varphi(x)]$. За властивістю 1 перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[\Delta u(x,t)]=[(-i\xi_1)^2+(-i\xi_2)^2+(-i\xi_3)^2]v(\xi,t)=$$

$$=-(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)v(\xi,t)=-|\xi|^2v(\xi,t).$$

Також $\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_t(x,t)]=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)]=\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}$.

Діючи оператором перетворення Фур'є на рівняння задачі, одержуємо

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u_t(x,t)]=a^2\mathcal{F}_{x\to\xi}[\Delta u(x,t)]\ <=>\ v_t(\xi,t)=-a^2|\xi|^2v(\xi,t),$$

а з початкової умови

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,0)]=0,\ <=>\ \lim_{t\to 0}\mathcal{F}_{x\to\xi}[u(x,t)]=\widehat{\varphi}(\xi)\ <=>\ v(\xi,0)=\widehat{\varphi}(\xi).$$

Для кожного фіксованого значення $\xi \in \mathbb{R}^3$ отримали задачу Коші

$$\frac{dv}{dt} + a^2|\xi|^2 v = 0, \quad v|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Її розв'язок $v(\xi,t) = \widehat{\psi}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t}$

$$(\, p + a^2|\xi|^2 = 0,\ v = Ce^{-a^2|\xi|^2 t},\ v(\xi,0) = C = \widehat{\varphi}(\xi)\,).$$

Використовуючи властивість 5 перетворення Фур'є, знаходимо

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[v(\xi,t)] = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t}] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\xi)] * \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[e^{-a^2|\xi|^2 t}] = \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[e^{-a^2|\xi|^2 t}]\,.$$

Використаємо приклад: $\mathcal{F}[e^{-b^2\xi^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\frac{x^2}{4b^2}}$. Звідси

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-b^2\xi^2}] = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[e^{-b^2\xi^2}](-x) = \tfrac{1}{2b\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4b^2}}\,;$$

$$e^{-a^2|\xi|^2 t} = e^{-a^2[\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2]t} = e^{-a^2\xi_1^2 t}\cdot\ldots\cdot e^{-a^2\xi_n^2 t}\,,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2}] = \tfrac{1}{(2\pi)^n}\Pi_{j=1}^n \mathcal{F}[e^{-a^2\xi_j^2 t}](-x_j) = \tfrac{1}{(2\pi)^n}\Pi_{j=1}^n\ \tfrac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x_j^2}{4a^2 t}} =$$

$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi\ t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$. Звідси одержуємо формальний розв'язок (1.19).

1.7 Завдання на використання формул

1. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|<t}\frac{\sin(y_2)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt} = u_{x_1x_1}\,,\ (x_1,t)\in R\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_2)\,;$

2) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_2)\,;$

3) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_2)\,;$

4) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0} = \sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

5) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0} = \sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,.$

2. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|<t}\frac{\cos(y_1)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt}=u_{x_1x_1}\,,\ (x_1,t)\in R\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\cos(x_1)\,;$

2) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\cos(x_1)\,;$

3) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\cos(x_1)\,;$

4) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=\cos(x_1)\,,\ u_{t|_{t=0}}=0\,;$

5) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=\cos(x_1)\,,\ u_{t|_{t=0}}=0\,.$

3. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y-x|<t}\frac{\sin(y_2)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt}=u_{x_1x_1}\,,\ (x_1,t)\in R\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\sin(x_2)\,;$

2) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\sin(x_2)\,;$

3) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\sin(x_2)\,;$

4) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}\,,\ (x,t)\in R^3\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=\sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}}=0\,;$

5) $u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\,,\ (x,t)\in R^2\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=\sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}}=0\,.$

4. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y-x|<t}\frac{\sin(y_1)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt}=u_{x_1x_1}\,,\ (x_1,t)\in R\times(0,+\infty)\,,$
$u|_{t=0}=0\,,\ u_{t|_{t=0}}=\sin(x_1)\,;$

2) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_1)\,;$

3) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_1)\,;$

4) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = \sin(x_1)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

5) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = \sin(x_1)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,.$

5. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} e^{y_1} dy$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + e^{x_1}\,,\ (x_1,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

2) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = e^{x_1}\,;$

3) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = e^{x_1}\,;$

4) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = e^{x_1}\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0;$

5) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = e^{x_1}\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,.$

6. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{R} y_1 e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + x_1\,,\ (x_1,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

2) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = x_1\,;$

3) $u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = x_1\,;$

4) $u_t = u_{x_1x_1}\,,\ (x,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$

$u|_{t=0} = x_1\,;$

5) $u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + x_1\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,.$

7. Розв'язком якої задачі є функція
$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_R e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - y_1} dy$? Вкажіть варіант відповіді.

Варіанти відповідей:

1) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + e^{-x_1}\,,\ (x_1,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

2) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = e^{-x_1}\,;$

3) $u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = e^{-x_1}\,;$

4) $u_t = u_{x_1x_1}\,,\ (x,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = e^{-x_1}\,;$

5) $u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + e^{-x_1}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,.$

8. Записати вигляд розв'язку кожної з задач:

а) $u_{tt} = u_{x_1x_1}\,,\ (x_1,t) \in R \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_1)\,;$

б) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_2)\,;$

в) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = 0\,,\ u_{t|_{t=0}} = \sin(x_2)\,;$

г) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}\,,\ (x,t) \in R^3 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = \sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

д) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = \sin(x_2)\,,\ u_{t|_{t=0}} = 0\,;$

е) $u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\,,\ (x,t) \in R^2 \times (0,+\infty)\,,$
$\quad u|_{t=0} = \sin(x_2)\,.$

Розділ 2

Метод рядів Фур'є

2.1 Загальна схема

Розглянемо мішану задачу для рівняння коливання струни

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T := (0,l) \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi(x)\,, \quad x \in [0,l]\,, \\ a_1 u_x(0,t) + b_1 u(0,t) = \mu_1(t)\,, \\ a_2 u_x(l,t) + b_2 u(l,t) = \mu_2(t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \end{gathered}$$

Деталізуємо основну схему її розв'язання методом рядів Фур'є.

1-й крок. Якщо хоч одна з функцій $\mu_1(t), \mu_2(t)$ у крайових умовах відмінна від нуля, то треба звести задачу до іншої, з нульовими крайовими умовами. Для цього розв'язок шукаємо у вигляді

$$u = u_1 + u_2,$$

де u_2 задовольняє крайові умови задачі. Таку функцію завжди можна знайти у вигляді

$$u_2 = A(t)x + B(t)$$

крім випадку $b_1 = b_2 = 0$. В останньому випадку шукаємо u_2 у вигляді

$$u_2 = A(t)x^2 + B(t)x + C(t).$$

Знайшовши $A(t), B(t), C(t)$, підставляємо $u = u_1 + u_2$ зі знайденою $u_2(x,t)$ у (2.1).

Для функції u_1 одержуємо задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + f_1(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi_1(x)\,, \quad x \in (0,l)\,,$$

$$a_1 u_{1_x}(0,t) + b_1 u_1(0,t) = 0, \ \ a_2 u_{1_x}(l,t) + b_2 u_1(l,t) = 0\,, \quad t \in [0,T]$$

з нульовими крайовими умовами.

2-й крок. Розв'язок одержаної задачі (2.2) шукаємо у вигляді

$$u_1 = v + w$$

де v – розв'язок задачі

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.3}$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x), \ v_t|_{t=0} = \psi_1(x)\,,$$
$$a_1 v_x(0,t) + b_1 v(0,t) = 0, \ \ a_2 v_x(l,t) + b_2 v(l,t) = 0\,,$$

а w – розв'язок задачі

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f_1(x,t), \quad x \in (0,l), \ t > 0, \tag{2.4}$$

$$w|_{t=0} = 0, \ \ w_t|_{t=0} = 0\,,$$
$$a_1 w(0,t) + b_1 w(0,t) = 0, \ \ a_2 w(l,t) + b_2 w(l,t) = 0\,.$$

3-й крок. Спочатку завжди розв'язуємо задачу для v (задачу (2.3)) методом Фур'є, тобто у вигляді

$$v(x,t) = T(t)X(x).$$

Навіть, якщо $\varphi_1(x) = \psi_1(x) \equiv 0$ (тоді за єдиністю розв'язку $v(x,t) \equiv 0$), цю задачу потрібно почати, щоб знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \ x \in (0,l), \ \ a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \ \ a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0. \tag{2.5}$$

Примітка. У пропонованих задачах завжди власні значення $\lambda_k > 0$. Винятком є випадок $b_1 = b_2 = 0$, у якому ще додатково є власне число $\lambda_0 = 0$, а відповідна йому власна функція $X_0(x) = 1$.

4-й крок. Розв'язок задачі для w, тобто задачі (2.4), шукаємо у вигляді ряду

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t)X_k(x) \tag{2.6}$$

з невідомими $G_k(t)$, де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувіля, що відповідають власним значенням λ_k (знайдені при розв'язуванні задачі для v). Кожний член цього розвинення задовольняє крайові умови задачі. Тому для знаходження $G_k(t)$ підставляємо (2.6) у рівняння та початкові умови задачі для w. Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}[G_k''(t)+\lambda_k^2G_k(t)]X_k(x)=f_1(x,t),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}G_k(0)X_k(x)=0,\ \ \sum_{k=1}^{\infty}G_k'(0)X_k(x)=0,\ \ x\in[0,l].$$

Звідси знаходимо

$$G_k''(t)+\lambda_k^2G_k(t)=f_{1k}(t),\ \ t\in[0,T],\ \ G_k(0)=0,\ \ G_k'(0)=0, \tag{2.7}$$

де $f_{1k}(t)=\frac{\int_0^l f(\xi,t)X_k(\xi)d\xi}{\int_0^l X_k^2(\xi)d\xi}$ – коефіцієнти розвинення Фур'є функції $f_1(x,t)$ за системою $X_k(x)$ для кожного $t\in[0,T]$.

Отже, $G_k(t)$ – розв'язок задачі Коші (2.7) для кожного $k=1,2,\ldots$. Це задача Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Її розв'язуємо відомим методом.

Для прикладу згадаємо, як розв'язати задачу Коші

$$y''+q^2y=2t+3,\ \ y(0)=0,y'(0)=0. \tag{2.8}$$

Загальний розв'язок рівняння

$$y(t)=a\cos(qt)+b\sin(qt)+\tilde{y}(t),$$

де a,b – довільні сталі, $\tilde{y}(t)$ – частинний розв'язок цього рівняння. Його щукаємо за методом невизначених коефіцієнтів (бо справа квазіполіном) як $\tilde{y}(t)=ct+d$. Щоб знайти невідомі коефіцієнти c,d, підставляємо $\tilde{y}(t)$ у рівняння:

$$(ct+d)'' + q^2(ct+d) \equiv 2t+3 \;<=>\; q^2 d \equiv 2t+3 \;<=>$$
$$q^2 c = 2,\; q^2 d = 3 \;=>\; c = 2q^{-2},\; d = 3q^{-2}\,.$$

Тепер

$$\tilde{y}(t) = 2q^{-2}t + 3q^{-2}\,,$$
$$y(t) = a\cos(qt) + b\sin(qt) + 2q^{-2}t + 3q^{-2}\,.$$

Щоб знайти сталі a, b, підставляємо знайдений загальний розв'язок рівняння у початкові умови задачі (2.8). Маємо

$$y(0) = a + 3q^{-2} = 0\,,\; y'(0) = bq + 2q^{-2} = 0\,.$$

Звідси знаходимо $a = -3q^{-2}$, $b = -2q^{-3}$,

$$y(t) = -3q^{-2}\cos(qt) - 2q^{-3}\sin(qt) + 2q^{-2}t + 3q^{-3}\,.$$

Задача (2.7) відрізняється від задачі (2.8) тільки тим, що замість $y(t)$ є невідома функція $G_k(t)$, яка залежить від параметра k, $q^2 = \lambda_k^2$ і $f_{1k}(t)$ також залежить від параметра k.

Зокрема, якщо $f_{1k}(t) = M_k t + N_k$ (M_k, N_k – відомі сталі), то матимемо загальний розв'язок рівняння у задачі (2.7)

$$G_k(t) = a_k\cos(\lambda_k t) + b_k\sin(\lambda_k t) + \tilde{G}_k(t),$$

де a_k, b_k – довільні сталі, $\tilde{G}_k(t)$ – частинний розв'язок цього рівняння,

$$\tilde{G}_k(t) = c_k t + d_k,$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти c_k, d_k, підставляємо $\tilde{G}_k(t)$ у рівняння:

$$(c_k t + d_k)'' + \lambda_k^2(c_k t + d_k) \equiv M_k t + N_k \;<=>$$
$$\lambda_k^2 c_k t + \lambda_k^2 d_k \equiv M_k t + N_k \;<=>$$
$$\lambda_k^2 c_k = M_k,\; \lambda_k^2 d_k = N_k \;=> c_k = M_k\lambda_k^{-2},\; d_k = N_k\lambda_k^{-2}\,.$$

Тепер

$$\tilde{G}_k(t) = M_k\lambda_k^{-2}t + N_k\lambda_k^{-2}\,,$$
$$G_k(t) = a_k\cos(\lambda_k t) + b_k\sin(\lambda_k t) + M_k\lambda_k^{-2}t + N_k\lambda_k^{-2}\,.$$

Щоб знайти сталі a_k, b_k, підставляємо знайдений загальний розв'язок рівняння у початкові умови задачі (2.7). Маємо

$$G_k(0) = a_k + N_k\lambda_k^{-2} = 0\,,\; G_k'(0) = b_k\lambda_k + M_k\lambda_k^{-2} = 0\,.$$

Звідси знаходимо

$$a_k = -N_k\lambda_k^{-2}\,,\ b_k = -M_k\lambda_k^{-3}\,,$$

$$G_k(t) = -N_k\lambda_k^{-2}\cos(\lambda_k t) - M_k\lambda_k^{-3}\sin(\lambda_k t) + M_k\lambda_k^{-2}t + N_k\lambda_k^{-2}\,,$$

тобто

$$G_k(t) = M_k\lambda_k^{-2}\big(t - \tfrac{1}{\lambda_k}\sin(\lambda_k t)\big) + N_k\lambda_k^{-2}\big(1 - \cos(\lambda_k t)\big)\,.$$

Примітка: Задачу (2.2) можна не розбивати на дві. Але спочатку за допомогою допоміжної задачі (як для v) знайти власні значення λ_k і власні функції $X_k(x)$. Тоді розв'язуємо задачу для u_1 як для w (тобто у вигляді (2.6)), але для знаходження $G_k(t)$ замість (2.7) одержуємо задачу

$$G_k''(t) + \lambda_k^2 G_k(t) = f_{1k}(t),\ \ t\in[0,T],\ \ G_k(0) = T_{1k},\ \ G_k'(0) = T_{2k}, \tag{2.9}$$

де T_{1k}, T_{2k} – коефіцієнти розвинення Фур'є відповідно функцій $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ за системою $X_k(x)$.

За такою ж схемою розв'язуємо мішані задачі для рівнянь вигляду

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + bu_x + cu_t + f(x,t), \quad (x,t)\in\Pi_T.$$

2.2 Приклади розв'язання мішаних задач для рівняння коливань струни

Задача 1. Знайти вільні коливання струни $(0,l)$, правий кінець якої закріплений, а лівий вільний. У початковий момент струна мала форму $l^2 - x^2$ і була нерухома.

Математична модель

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad (x,t)\in\Pi_T, \tag{2.10}$$

$$u_x(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0\,, \quad t\in[0,T]\,,$$
$$u(x,0) = l^2 - x^2\,,\ u_t(x,0) = 0\,, \quad x\in(0,l)\,.$$

Це мішана задача для однорідного рівняння при однорідних крайових умовах. Тому її розв'язок шукатимемо *методом відокремлення змінних (методом Фур'є)*, тобто у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Підставляючи цю функцію у рівняння (2.12), одержуємо

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t),$$

звідки

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ліва частина одержаної тотожності залежить від x, а права – від t, тому рівність можлива лише, коли вирази праворуч та ліворуч сталі. Отже,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

λ– сталий параметр. Одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in (0,l),\ \ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,\ t > 0.$$

Із крайових умов

$$X'(0)T(t) = 0\,,\ X(l)T(t) = 0\,,\ \forall t > 0\,.$$

Звідси $X'(0) = 0$ і $X(l) = 0$. Одержали задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Розв'язуємо її. Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,x),$$

де C_1, C_2– довільні сталі. Підставляємо його в крайові умови

$$X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0\ \ => \ C_2 = 0\,,\ X(l) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 0\,.$$

При $C_1 = 0$ одержали б $X(x) \equiv 0$, тому $\cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$. Звідси знаходимо власні значення задачі

$$\sqrt{\lambda}\,l = \tfrac{\pi(2k+1)}{2}\,,\ \lambda_k = [\tfrac{\pi(2k+1)}{2l}]^2\,,\ k = 0,1,2,\dots\,,$$

власні функції $$X_k(x) = \cos\tfrac{\pi(2k+1)x}{2l}\,.$$

Підставляємо знайдені власні значення у рівняння для $T(t)$, одержуємо послідовність рівнянь

$$T_k''(t) + [\frac{a(2k+1)\pi}{2l}]^2T_k(t) = 0, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Їхні загальні розв'язки

$$T_k(t) = A_k \cos(\frac{a(2k+1)\pi}{2l}t) + B_k \sin(\frac{a(2k+1)\pi}{2l}t),$$

A_k, B_k – довільні сталі, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ функції $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ задовольняють рівняння і крайові умови задачі (2.12). Записуємо ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \cos(\frac{a(2k+1)\pi}{2l}t) + \tag{2.11}$$

$$+B_k \sin(\frac{a(2k+1)\pi}{2l}t)] \cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l}.$$

Підставляємо його в початкові умови. Одержуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l} = l^2 - x^2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{a\pi(2k+1)}{2l} \cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l} = 0, \ x \in [0, l].$$

Звідси знаходимо невідомі сталі A_k, B_k як коефіцієнти Фур'є функцій у правих частинах попередніх рівностей:

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l (l^2 - x^2)\cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l}dx}{\int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi(2k+1)x}{2l}dx} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (l^2 - x^2)\cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l}dx := \tilde{A}_k,$$

$$B_k = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Підставляючи знайдені сталі в (2.13), одержуємо шуканий розв'язок задачі

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k \cos\frac{a\pi(2k+1)}{2l}t \cos\frac{\pi(2k+1)x}{2l}.$$

$$\tilde{A}_k = \tfrac{2\cdot 2l}{l\pi(2k+1)}\left[(l^2 - x^2)\sin\tfrac{\pi(2k+1)x}{2l}\Big|_0^l + \int\limits_0^l 2x \sin\tfrac{\pi(2k+1)x}{2l}dx\right] =$$

$$= -\tfrac{8}{\pi(2k+1)}\tfrac{2l}{\pi(2k+1)}\left[x\cos\tfrac{\pi(2k+1)x}{2l}dx\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\tfrac{\pi(2k+1)x}{2l}dx\right] =$$

$= \frac{32l^2}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l} |_0^l = \frac{32l^2}{\pi^3(2k+1)^3} \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} = \frac{32l^2(-1)^k}{\pi^3(2k+1)^3}$,

$$u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cos \frac{a\pi(2k+1)}{2l} t \cos \frac{\pi(2k+1)x}{2l}.$$

Задача 2. Знайти вільні коливання стержня $(0,l)$, лівий кінець якого закріплений, а правий закріплений пружно.

Математична модель

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.12}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) + hu(l,t) = 0\,, \quad t \in [0,T]\,,$$
$$u(x,0) = \phi(x)\,, \; u_t(x,0) = \psi(x)\,, \quad x \in [0,l]\,.$$

Це мішана задача для однорідного рівняння при однорідних крайових умовах. Тому її розв'язок шукатимемо *методом відокремлення змінних (методом Фур'є)*, тобто у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Підставляючи цю функцію у рівняння (2.12), одержуємо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

звідки

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ліва частина одержаної тотожності залежить від x, а права – від t, тому рівність можлива лише, коли вирази праворуч та ліворуч сталі. Отже,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

λ – сталий параметр. Одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in (0,l), \;\; T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \; t > 0.$$

Із крайових умов

$$X(0)T(t) = 0\,, \; [X'(l) + hX(l)]T(t) = 0\,, \; \forall t > 0\,.$$

Звідси $X(0) = 0$ і $X'(l) + hX(l) = 0$. Одержали задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0.$$

Розв'язуємо її. Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Підставляємо його в крайові умови

$$X(0) = C_1 = 0\,,\ X'(l) + hX(l) = C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, l) + hC_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0\,.$$

При $C_2 = 0$ одержали б $X(x) \equiv 0$, тому

$$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h\sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 <=> tg(\sqrt{\lambda}\, l) = -\tfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$$
$$<=> tg(\mu) = -\tfrac{\mu}{hl}\,, \text{ де } \mu = \sqrt{\lambda}\, l\,.$$

Одержане рівняння має додатні корені $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Звідси знаходимо власні значення задачі $\lambda_k = [\frac{\mu_k}{l}]^2$, $k = 1, 2, \ldots$, власні функції $X_k(x) = \sin \frac{\mu_k x}{l}$.

Підставляємо знайдені власні значення у рівняння для $T(t)$, одержуємо послідовність рівнянь

$$T_k''(t) + [\frac{a\mu_k}{l}]^2 T_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Їхні загальні розв'язки

$$T_k(t) = A_k \cos(\frac{a\mu_k t}{l}) + B_k \sin(\frac{a\mu_k t}{l}),$$

A_k, B_k – довільні сталі, $k = 1, 2, \ldots$.

При всіх $k = 1, 2, \ldots$ функції $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ задовольняють рівняння і крайові умови задачі. Записуємо ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\frac{a\mu_k t}{l}) + \qquad (2.13)$$
$$+ B_k \sin(\frac{a\mu_k t}{l})] \sin \frac{\mu_k x}{l}.$$

Підставляємо його в початкові умови. Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\mu_k x}{l} = \varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{a\mu_k}{l} \sin \frac{\mu_k x}{l} = \psi(x),\ x \in [0, l].$$

Звідси знаходимо невідомі сталі A_k, B_k як коефіцієнти Фур'є функцій у правих частинах попередніх рівностей:

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\mu_k x}{l}dx}{\int\limits_0^l \sin^2\frac{\mu_k x}{l}dx} := \tilde{A}_k,$$

$$B_k = \frac{l}{a\mu_k}\frac{\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\mu_k x}{l}dx}{\int\limits_0^l \sin^2\frac{\mu_k x}{l}dx} := \tilde{B}_k,, \ k = 1, 2, \dots .$$

Підставляючи знайдені сталі в ряд, одержуємо шуканий розв'язок задачі

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\tilde{A}_k\cos\frac{a\mu_k t}{l} + \tilde{B}_k\sin\frac{a\mu_k t}{l}\right]\ \sin\frac{\mu_k x}{l},$$

$$||X_k||^2 = \int\limits_0^l \sin^2\frac{\mu_k x}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [1-\cos\frac{2\mu_k x}{l}]dx = \frac{1}{2}[l - \frac{l}{2\mu_k}\sin(2\mu_k)]\,,$$

$$tg(\mu_k) = -\frac{\mu_k}{hl}\,,\ \sin(2\mu_k) = \frac{2tg(\mu_k)}{1+tg^2(\mu_k)}\,,\ \cos(2\mu_k) = \frac{1-tg^2(\mu_k)}{1+tg^2(\mu_k)}\,,$$

$$||X_k||^2 = \frac{l}{2}\big[1 - \frac{tg\mu_k}{\mu_k(1+tg^2(\mu_k))}\big] = \frac{l}{2}\big[1 + \frac{1}{hl(1+\frac{\mu_k^2}{h^2l^2})}\big] = \frac{l}{2}\big[1 + \frac{hl}{h^2l^2+\mu_k^2}\big] = \frac{l}{2}\frac{h^2l^2+\mu_k^2+hl}{h^2l^2+\mu_k^2}\,.$$

Задача 3. Розв'язати задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 5, \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.14}$$

$$u_x(0,t) - u(0,t) = 0,\ \ u_x(2,t) = t^2\,, \quad t \in [0,T]\,,$$
$$u(x,0) = 0\,,\ u_t(x,0) = 0\,, \quad x \in (0,l)\,.$$

Крайові умови ненульові, тому розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$u = u_1 + u_2\,,$$

де u_2 задовольняє крайові умови задачі, тобто

$$(u_2)_x(0,t) - u_2(0,t) = 0,\ \ (u_2)_x(2,t) = t^2, \qquad t \in [0,T].$$

Таку функцію знаходимо у вигляді $u_2 = A(t)x + B(t)$. Маємо

$(u_2)_x(0,t) - u_2(0,t) = A(t) - B(t) = 0,\ \ (u_2)_x(2,t) = A(t) = t^2$, звідки

$B(t) = A(t) = t^2$ і тепер $u_2(x,t) = t^2(x+1)$, $u = u_1 + t^2(x+1)$.

Для функції u_1 одержуємо задачу

$$(u_1)_{tt} + 2(x+1) = (u_1)_{xx} - 5 <=> (u_1)_{tt} = (u_1)_{xx} - (2x+7), \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.15}$$

$$u_1(x,0) = 0\,,\ (u_1)_t(x,0) = 0\,, \quad x \in (0,2)\,,$$

$$u_{1_x}(0,t) - u_1(0,t) = 0,\ \ u_{1_x}(2,t) = 0\,, \quad t \in [0,T]$$

з нульовими крайовими умовами. Її розв'язок шукаємо у вигляді $u_1 = v + w$, де v – розв'язок задачі

$$v_{tt} = v_{xx}, \quad x \in (0,2), \quad t > 0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v_x(0,t) - v(0,t) = 0, \quad v_x(2,t) = 0,$$

а w – розв'язок задачі

$$w_{tt} = w_{xx} - (2x+7), \quad x \in (0,2), \quad t > 0,$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0, \quad w_x(0,t) - w(0,t) = 0, \quad w_x(2,t) = 0.$$

У нашому випадку (за єдиністю розв'язку мішаної задачі) $v(x,t) \equiv 0$, тому $u_1 = w$. А задачу для v потрібно розв'зувати тільки до моменту знаходження власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувіля. Підставляючи $v(x,t) = T(t)X(x)$ у рівняння і крайові умови, одержуємо таку задачу на власні значення:

$$X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0,2),\ \ X'(0) - X(0) = 0,\ X'(2) = 0.$$

Розв'язуємо її. Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Підставляємо його в крайові умови

$X'(0) - X(0) = C_2\sqrt{\lambda} - C_1 = 0$,
$X'(2) = \sqrt{\lambda}(-C_1 \sin(2\sqrt{\lambda}) + C_2 \cos(\sqrt{2\lambda})) = 0$,

звідки

$C_1 = C_2\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda}C_2(-\sqrt{\lambda}\sin(2\sqrt{\lambda}) + \cos(\sqrt{2\lambda})) = 0$ і $C_2\sqrt{\lambda} \neq 0$.

Отже, для знаходження λ одержали рівняння

$$-\sqrt{\lambda}\sin(2\sqrt{\lambda})+\cos(\sqrt{2\lambda})=0 <=> tg(2\sqrt{\lambda})=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} <=>$$

$$tg\mu=\frac{2}{\mu} \ \ (\mu=2\sqrt{\lambda}),$$

яке має додатні корені $\mu_1,\mu_2,\dots$, і тоді $\lambda_k=(\frac{\mu_k}{2})^2$, $k\in\mathbb{N}$. Відповідні власні функції (при $C_2=1$)

$$X_k(x)=\frac{\mu_k}{2}\cos\frac{\mu_k x}{2}+\sin\frac{\mu_k x}{2}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі для w шукаємо у вигляді

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)X_k(x) \tag{2.16}$$

з невідомими $g_k(t)$, де $X_k(x)=\frac{\mu_k}{2}\cos\frac{\mu_k x}{2}+\sin\frac{\mu_k x}{2}$ – знайдені власні функції задачі Штурма-Ліувіля. Кожний член цього розвинення задовольняє крайові умови задачі. Тому для знаходження $g_k(t)$ підставляємо (2.16) у рівняння та початкові умови задачі для w. Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}[g_k''(t)+(\frac{\mu_k}{2})^2 g_k(t)]X_k(x)=-(2x+7),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(0)X_k(x)=0, \ \ \sum_{k=1}^{\infty}g_k'(0)X_k(x)=0, \ \ x\in[0,l].$$

Звідси знаходимо

$$g_k''(t)+\frac{\mu_k^2}{4}g_k(t)=c_k(t), \ \ t\in[0,T], \ \ g_k(0)=0, \ \ g_k'(0)=0, \tag{2.17}$$

де

$$c_k(t)=-\frac{\int\limits_0^2(2x+7)X_k(x)dx}{\int\limits_0^2 X_k^2(x)dx}:=D_k$$

– коефіцієнти розвинення Фур'є функції $-(2x+7)$ за системою $X_k(x)$. Отже, $g_k(t)$ – розв'язок задачі Коші (2.17). Розв'язуємо її.

Загальний розв'язок рівняння

$$g_k(t)=a_k\cos\frac{\mu_k t}{2}+b_k\sin\frac{\mu_k t}{2}+\tilde{g}_k(t),$$

де a_k, b_k – довільні сталі, $\tilde{g}_k(t)$ – частинний розв'язок рівняння. Він у нашому випадку має вигляд $\tilde{g}_k(t) = \frac{4D_k}{\mu_k^2}$, і тоді

$$g_k(t) = a_k \cos\frac{\mu_k t}{2} + b_k \sin\frac{\mu_k t}{2} + \frac{4D_k}{\mu_k^2}.$$

З початкових умов

$$g_k(0) = a_k + \frac{4D_k}{\mu_k^2} = 0, \quad g_k'(0) = \frac{b_k\mu_k}{2} = 0,$$

звідки знаходимо $a_k = -\frac{4D_k}{\mu_k^2}$, $b_k = 0$, а тоді

$$g_k(t) = -\frac{4D_k}{\mu_k^2}\cos\frac{\mu_k t}{2} + \frac{4D_k}{\mu_k^2} = \frac{4D_k}{\mu_k^2}(1-\cos\frac{\mu_k t}{2}),$$

$$w(x,t) = u_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4D_k}{\mu_k^2}(1-\cos\frac{\mu_k t}{2})(\frac{\mu_k}{2}\cos\frac{\mu_k x}{2} + \sin\frac{\mu_k x}{2}),$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4D_k}{\mu_k^2}(1-\cos\frac{\mu_k t}{2})(\frac{\mu_k}{2}\cos\frac{\mu_k x}{2} + \sin\frac{\mu_k x}{2}) + t^2(x+1).$$

2.3 Розв'язання початково-крайових задач для рівняння поширення тепла у стержні

Такі задачі розв'язуємо за викладеною вище схемою. Різниця буде в тому, що для функції $T(t)$ буде звичайне диференціальне рівняння першого порядку, відповідно потім будуть задачі Коші для рівнянь першого порядку

$$G_k'(t) + \lambda_k^2 G_k(t) = f_{1k}(t), \quad t\in[0,T], \; G_k(0) = \varphi_k, \; k\in\mathbb{N} \tag{2.18}$$

замість задач (2.7).

Задача 4. Знайти температуру в стержні з теплоізольованою бічною поверхнею без внутрішніх джерел тепла, якщо відомо, що на лівому кінці стержня температура дорівнює нулю, а на правому відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого також нуль.

Математична модель задачі:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.19}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) + hu(l,t) = 0\,, \quad t \in [0,T]\,,$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\; x \in (0,l)\,,\; h > 0\,.$$

Це задача для однорідного рівняння при однорідних крайових умовах. Тому її розв'язок шукаємо *методом відокремлення змінних (методом Фур'є)*, тобто у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Підставляючи цю функцію у рівняння задачі, одержуємо

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

звідки

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ліва частина одержаної тотожності залежить від x, а права – від t, тому рівність можлива лише, коли вирази праворуч та ліворуч сталі. Отже,

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

λ– сталий параметр. Одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\; x \in (0,l),\;\; T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0,\; t > 0.$$

Із крайових умов

$$X(0)T(t) = 0\,,$$
$$X'(l)T(t) + hX(l)T(t) = 0 \;\; <=> \;\; (X'(l) + hX(l))T(t) = 0\,,\; \forall t > 0\,.$$

Звідси $X(0) = 0$ і $X'(l) + hX(l) = 0$. Одержали задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\; x \in (0,l), \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0.$$

Розв'язуємо її. Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Підставляємо його в крайові умови

$$X(0) = C_1 = 0\,,\ X'(l) + hX(l) = C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,l) + hC_2\sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0\,.$$

При $C_2 = 0$ одержали б $X(x) \equiv 0$, тому

$$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,l) + h\sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0 <=> tg(\sqrt{\lambda}\,l) = -\tfrac{\sqrt{\lambda}}{h} <=>$$
$$tg(\mu) = -\tfrac{\mu}{hl}\,, \text{ де } \mu = \sqrt{\lambda}\,l\,.$$

Одержане рівняння має додатні корені $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Звідси знаходимо власні значення задачі $\lambda_k = [\frac{\mu_k}{l}]^2$ і власні функції $X_k(x) = \sin\frac{\mu_k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Підставляємо знайдені власні значення у рівняння для $T(t)$, одержуємо послідовність рівнянь

$$T_k'(t) + [\frac{a\mu_k}{l}]^2 T_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Їхні загальні розв'язки

$$T_k(t) = A_k e^{-(\frac{a\mu_k}{l})^2 t},$$

A_k – довільні сталі, $k = 1, 2, \ldots$.

При всіх $k = 1, 2, \ldots$ функції $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ задовольняють рівняння і крайові умови задачі. Записуємо ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\frac{a\mu_k}{l})^2 t}\sin(\frac{\mu_k x}{l}). \tag{2.20}$$

Підставляємо його в початкову умову. Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{\mu_k x}{l}) = \varphi(x).$$

Звідси знаходимо невідомі сталі A_k як коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$:

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(\frac{\mu_k x}{l})dx}{\int\limits_0^l \sin^2\frac{\mu_k x}{l}dx} := \tilde{A}_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Зауважимо, що $\int\limits_0^l \sin^2\frac{\mu_k x}{l}dx \neq l/2$.

Підставляючи знайдені сталі в (2.20), одержуємо шуканий розв'язок задачі

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k e^{-(\frac{a\mu_k}{l})^2 t}\sin(\frac{\mu_k x}{l}).$$

2.4 Розв'язання крайових задач для рівнянь Лапласа і Пуассона у прямокутнику

Розглянемо задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{2.21}$$

$$A_1 u_y(x,0) + B_1 u(x,0) = \varphi_1(x)\,,\ A_2 u_y(x,q) + B_2 u(x,q) = \psi_1(x)\,, \quad x \in (0,p)\,,$$
$$a_1 u_x(0,y) + b_1 u(0,y) = \varphi_2(y),\ \ a_2 u_x(p,y) + b_2 u(p,y) = \psi_2(y)\,, \quad y \in [0,q]\,.$$

Загалом застосовуємо загальну схему, використовуючи крайові умови на яких-небудь паралельних сторонах, як крайові, а на інших паралельних сторонах, як початкові умови в мішаних задачах. Простіше можна розв'язувати задачі в окремих випадках.

Випадок 1. Якщо $f(x,y) \equiv 0$, то задачу (2.25) можна розбити на дві: $u = v + w$, v і w – розв'язки відповідно задач

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{2.22}$$

$$a_1 u_x(0,y) + b_1 u(0,y) = 0,\ \ a_2 u_x(p,y) + b_2 u(p,y) = 0\,, \quad y \in [0,q]\,.$$

$$A_1 u_y(x,0) + B_1 u(x,0) = \varphi_1(x)\,,\ A_2 u_y(x,q) + B_2 u(x,q) = \psi_1(x)\,, \quad x \in (0,p)\,,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{2.23}$$

$$A_1 u_y(x,0) + B_1 u(x,0) = 0\,,\ A_2 u_y(x,q) + B_2 u(x,q) = 0\,, \quad x \in (0,p)\,,$$
$$a_1 u_x(0,y) + b_1 u(0,y) = \varphi_2(y),\ \ a_2 u_x(p,y) + b_2 u(p,y) = \psi_2(y)\,, \quad y \in [0,q]\,.$$

Кожну з цих задач розв'язуємо методом Фур'є. При цьому у задачі (2.22) будуть власні функції $X_k(x)$, а у задачі (2.23) – власні функції $Y_k(y)$.

Випадок 2. Якщо маємо рівняння Пуассона ($f(x,y)$ не дорівнює тотожно нулю) і вдається легко знайти частинний розв'язок $u_0(x,y)$ рівняння, то робимо заміну $u = u_0 + u_1$ і отримуємо попередній випадок – крайову задачу для рівняння Лапласа. Якщо вдається знайти розв'язок $u_0(x,y)$ рівняння, що додатково задовольняє крайові умови задачі на яких-небудь паралельних сторонах прямокутника, то отримуємо тільки одну з задач вигляду (2.22) чи (2.23).

Випадок 3. Якщо у задачі (2.25) для рівняння Пуассона в прямокутнику є нульові крайові умови на яких-небудь паралельних сторонах, наприклад, на обох вертикальних сторонах, тобто при $x=0$ і $x=p$ ($\varphi_2(y)=\psi_2(y)=0$, $y\in[0,q]$), то 1-й крок у загальній схемі пропускаємо, використовуючи дві інші крайові умови (на горизонтальних паралельних сторонах прямокутника, тобто при $y=0$ і $y=q$) у кінці, як початкові у випадку мішаних задач для рівняння коливання струни.

Детальніше, шукаємо розв'язок задачі (2.25) у вигляді

$$u=v+w,$$

$$v_{xx}+v_{yy}=0,\quad x\in(0,p),\ y\in(0,q),$$
$$a_1v_x(0,y)+b_1v(0,y)=0,\ \ a_2v_x(p,y)+b_2v(p,y)=0\,,\quad y\in[0,q]\,,$$
$$A_1v_y(x,0)+B_1v(x,0)=\varphi_1(x)\,,\ A_2v_y(x,q)+B_2v(x,q)=\psi_1(x)\,,\quad x\in(0,p)\,,$$

$$w_{xx}+w_{yy}=f(x,y),\quad x\in(0,p),\ y\in(0,q),$$
$$a_1w_x(0,y)+b_1u(0,y)=0,\ \ a_2w_x(p,y)+b_2u(p,y)=0\,,\quad y\in[0,q]\,.$$
$$A_1w_y(x,0)+B_1w(x,0)=0\,,\ A_2w_y(x,q)+B_2w(x,q)=0\,,\quad x\in(0,p)\,,$$

Задачу для v розв'язуємо методом Фур'є:

$$v(x,y)=X(x)Y(y)\,,$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(x)}{Y(x)}=-\lambda^2\,,$$
$$a_1X'(0)Y(y)+b_1X(0)Y(y)=0\,,\ a_2X'(p)Y(y)+b_2X(p)Y(y)=0\,.$$

Звідси одержуємо задачу Штурма-Ліувілля

$$X''+\lambda^2X=0,\ x\in(0,p),\ \ a_1X'(0)+b_1X(0)=0,\ \ a_2X'(p)+b_2X(p)=0.$$

Далі

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}G_k(y)X_k(x)$$

з невідомими $G_k(y)$, де $X_k(x)$ – знайдені власні функції задачі Штурма-Ліувіля. Далі за схемою одержуємо (уже крайову) задачу для $G_k(y)$:

$$G_k''(y)-\lambda_k^2G_k(y)=f_k(y),\ \ y\in(0,q), \tag{2.24}$$

$$A_1 G_k'(0) + B_1 G_k(0) = 0,\ A_2 G_k'(q) + B_2 G_k(q) = 0,$$

де $f_k(y) = \frac{\int_0^l f(\xi,y) X_k(\xi) d\xi}{\int_0^l X_k^2(\xi) d\xi}$ – коефіцієнти розвинення Фур'є функції $f(x,y)$ за системою $X_k(x)$ для кожного $y \in [0,q]$.

Якщо у задачі (2.25) на двох горизонтальних сторонах є нулі, тобто маємо задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad x \in (0,p),\ y \in (0,q), \tag{2.25}$$

$$A_1 u_y(x,0) + B_1 u(x,0) = 0\,,\ A_2 u_y(x,q) + B_2 u(x,q) = 0\,, \quad x \in (0,p)\,,$$
$$a_1 u_x(0,y) + b_1 u(0,y) = \varphi_2(y),\ \ a_2 u_x(p,y) + b_2 u(p,y) = \psi_2(y)\,, \quad y \in [0,q]\,.$$

то також 1-й крок у загальній схемі пропускаємо. Шукаємо

$$u = v + w,$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad x \in (0,p),\ y \in [0,q],$$

$$A_1 v_y(x,0) + B_1 v(x,0) = 0\,,\ A_2 v_y(x,q) + B_2 v(x,q) = 0\,, \quad x \in (0,p)\,,$$
$$a_1 v_x(0,y) + b_1 v(0,y) = \varphi_2(y),\ \ a_2 v_x(p,y) + b_2 v(p,y) = \psi_2(y)\,, \quad y \in [0,q]\,,$$

$$w_{xx} + w_{yy} = f(x,y), \quad x \in (0,p),\ y \in [0,q],$$

$$A_1 w_y(x,0) + B_1 w(x,0) = 0\,,\ A_2 w_y(x,q) + B_2 w(x,q) = 0\,, \quad x \in (0,p)\,,$$
$$a_1 w_x(0,y) + b_1 w(0,y) = 0,\ \ a_2 w_x(p,y) + b_2 w(p,y) = 0\,, \quad y \in [0,q]\,.$$

Тут буде задача Штурма-Ліувіля

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0,\ y \in (0,q),\ \ A_1 Y'(0) + B_1 Y(0) = 0,\ \ A_2 Y'(q) + B_2 Y(q) = 0.$$

Далі

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x) Y_k(y)$$

з невідомими $G_k(x)$, де $Y_k(y)$ – знайдені власні функції задачі Штурма-Ліувіля, і за схемою одержуємо задачу для $G_k(x)$:

$$G_k''(x) - \lambda_k^2 G_k(x) = f_k(x),\ \ x \in (0,p),$$

$$a_1 G_k'(0) + b_1 G_k(0) = 0,\ a_2 G_k'(q) + b_2 G_k(q) = 0,$$

де $f_k(x) = \frac{\int\limits_0^q f(x,y)Y_k(y)dy}{\int\limits_0^q Y_k^2(y)dy}$ – коефіцієнти розвинення Фур'є функції $f(x,y)$ за системою $Y_k(y)$ для кожного $x \in (0,p)$.

Задача 5.

$$u_{xx} + u_{yy} = -2, \quad x \in (0,a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), \tag{2.26}$$

$$u(0,y) = 0,\ \ u(a,y) = 0\,,\ u(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ u(x, \tfrac{b}{2}) = 0\,.$$

Застосуємо випадок 2. Подаємо $u(x,y) = u_0(x) + u_1(x,y)$, де $u_0(x)$ – частинний розв'язок рівняння, що задовольняє перші дві крайові умови:

$$u_0'' = -2,\ \ u_0(0) = 0,\ \ u_0(a) = 0.$$

Знаходимо

$$u_0(x) = -x^2 + C_1 x + C_2\,,\ u_0(0) = C_2 = 0\,,\ u_0(a) = -a^2 + C_1 a = 0\,,\ C_1 = a\,.$$

Отже, $u_0(x) = -x^2 + ax$ і для u_1 отримуємо задачу

$$(u_1)_{xx} + (u_2)_{yy} = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}),$$

$$u_1(0,y) = 0,\ \ u_1(a,y) = 0\,,\ u_1(x, -\tfrac{b}{2}) = x^2 - ax,\ \ u_1(x, \tfrac{b}{2}) = x^2 - ax\,,$$

яку розв'язуємо методом Фур'є: $u_1(x,y) = X(x)Y(y)$.

Задача 6.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2xy, \quad x \in (0,a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), \tag{2.27}$$

$$u(0,y) = 0,\ \ u(a,y) = 0\,,\ u(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ u(x, \tfrac{b}{2}) = 0\,.$$

Рівняння неоднорідне, але на двох паралельних сторонах прямокутника крайові умови однорідні (тут навіть на обох паралельних сторонах крайові умови однорідні і можна спочатку брати або перші дві умови, або дві останні для одержання задачі Штурма-Ліувілля). Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) g_k(y),$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля, яку одержуємо, розв'язуючи задачу

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}),$$

$$v(0,y) = 0,\ v(a,y) = 0,\ \ v(x, -\frac{b}{2}) = 0,\ v(x, \frac{b}{2}) = 0.$$

Маємо

$$v(x,y) = X(x)Y(y)\,,\ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(x)}{Y(x)} = -\lambda\,,\ X(0)Y(y) = 0\,,\ X(a)Y(y) = 0\,.$$

Звідси одержуємо задачу Штурма-Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0,a),\ \ X(0) = 0,\ X(a) = 0.$$

Знаходимо $\lambda_k = [\frac{k\pi}{a}]^2,\ X_k(x) = \sin(\frac{k\pi x}{a})\,,\ k = 1, 2, \ldots\,.$

Далі задачу для $v(x,y)$ не треба розв'язувати, а шукаємо розв'язок задачі (2.27) у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y) \sin(\frac{k\pi x}{a})$$

з невідомими функціями $g_k(y)$. Підставляючи ряд у рівняння і останні (ще не використані) дві умови задачі (2.27), одержуємо

$$-\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{a})^2 g_k(y) \sin(\frac{k\pi x}{a}) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k''(y) \sin(\frac{k\pi x}{a}) = 2xy,$$

$$<=> \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k''(y) - (\frac{k\pi}{a})^2 g_k(y)\right] \sin(\frac{k\pi x}{a}) = 2xy,$$

також $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(-\frac{b}{2}) \sin(\frac{k\pi x}{a}) = 0\,,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(\frac{b}{2}) \sin(\frac{k\pi x}{a}) = 0\,.$

Одержуємо послідовність крайових задач

$$g_k'' - (\frac{k\pi}{a})^2 g_k = M_k(y),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}),\ \ g_k(-\frac{b}{2}) = 0,\ g_k(\frac{b}{2}) = 0,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

$$M_k(y) = \tfrac{2}{a} \int\limits_0^a (2xy) \sin(\tfrac{k\pi x}{a}) dx = -\tfrac{8y}{ak\pi} \left[x \cos(\tfrac{k\pi x}{a})|_0^a - \int\limits_0^a \cos(\tfrac{k\pi x}{a}) dx\right] =$$
$$= -(-1)^k \tfrac{8y}{k\pi}\,,\ M_k(y) = N_k y\,, \text{ де } N_k = (-1)^{k+1} \tfrac{8}{k\pi}\,,\ k = 1, 2, \ldots$$

Характеристичне рівняння

$$p^2 - (\tfrac{k\pi}{a})^2 = 0$$

має розв'язки $p_1 = \frac{k\pi}{a}$, $p_2 = -\frac{k\pi}{a}$.

Загальний розв'язок рівняння

$$g_k^{''} - (\tfrac{k\pi}{a})^2 g_k = N_k\, y$$

має вигляд

$$g_k(y) = A_k ch(\tfrac{k\pi y}{a}) + B_k sh(\tfrac{k\pi y}{a}) + \tilde{g}_k(y)\,,$$

де A_k, B_k – довільні сталі, а частинний розв'язок $\tilde{g}_k(y)$ лінійного неоднорідного рівняння знаходимо за методом неозначених коефіцієнтів у вигляді $\tilde{g}_k(y) = C_k y + D_k$. Підставляючи його у рівняння, знаходимо невідомі сталі C_k, D_k: $C_k = \frac{a^2 N_k}{k^2\pi^2}$, $D_k = 0$. Тоді

$$g_k(y) = A_k ch\,\tfrac{k\pi y}{a} + B_k sh\,(\tfrac{k\pi y}{a}) + \tfrac{a^2 N_k}{k^2\pi^2} y\,.$$

Для знаходження сталих A_k, B_k використовуємо крайові умови

$$g_k(-\tfrac{b}{2}) = 0,\ g_k(\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

Маємо

$$A_k ch\,(\tfrac{k\pi b}{2a}) - B_k sh\,(\tfrac{k\pi b}{2a}) - \tfrac{a^2 b N_k}{2k^2\pi^2} = 0\,,$$

$$A_k\, ch(\tfrac{k\pi b}{2a}) + B_k sh\,(\tfrac{k\pi b}{2a}) + \tfrac{a^2 b N_k}{2k^2\pi^2} = 0\,.$$

Звідси знаходимо A_k, B_k: $A_k = 0$, $B_k = -\frac{a^2 b N_k}{2k^2\pi^2 sh\,(\frac{k\pi b}{2a})}$,

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8a^2(-1)^k}{k^3\pi^3}\left[\frac{b sh(\frac{k\pi y}{a})}{2sh\,(\frac{k\pi b}{a})} - y\right] \sin(\tfrac{k\pi x}{a})\,.$$

Задача 7.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2xy, \quad x \in (0,a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), \tag{2.28}$$

$$u(0,y) = y,\ \ u(a,y) = 0\,,\ u(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ u(x, \tfrac{b}{2}) = 10\,.$$

Тут на обох паралельних сторонах є ненульові крайові умови. Тому спочатку зведемо задачу до задачі з нульовими крайовими умовами на вертикальних сторонах. Нехай $u = u_1 + u_2$ і u_2 вибираємо так, щоб

$$u_2(0,y) = y,\ \ u_2(a,y) = 0\,.$$

Шукаємо її у вигляді

$$u_2(x,y) = A(y)x + B(y)\,.$$

Тоді $B(y) = y$, $A(y)a + y = 0 \ <=> \ A(y) = -\frac{y}{a}$, $u_2(x,y) = y(1 - \frac{x}{a})$,

$$u = u_1 + y(1 - \tfrac{x}{a})$$

і для u_1 матимемо задачу

$$(u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} = 2xy, \quad x \in (0, a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), \tag{2.29}$$

$$u_1(0, y) = 0,\ \ u_1(a, y) = 0\,,$$
$$u_1(x, -\tfrac{b}{2}) = \tfrac{b}{2}(1 - \tfrac{x}{a}),\ \ u_1(x, \tfrac{b}{2}) = 10 - \tfrac{b}{2}(1 - \tfrac{x}{a})\,,$$

яку розв'язуємо, як задачу 6.

Задача 8.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0, a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}), \tag{2.30}$$
$$u(0, y) = y,\ \ u(a, y) = 0\,,\ u(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ u(x, \tfrac{b}{2}) = 10\,.$$

Цю задачу можна розв'язувати, як попередню, або згідно з випадком 1, розбити на дві з нульовими крайовими умовами на паралельних сторонах: $u = v + w$,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad x \in (0, a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}),$$
$$v(0, y) = 0,\ \ v(a, y) = 0\,,\ v(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ v(x, \tfrac{b}{2}) = 10\,,$$

$$w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad x \in (0, a),\ y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}),$$
$$w(0, y) = y,\ \ w(a, y) = 0\,,\ w(x, -\tfrac{b}{2}) = 0,\ \ w(x, \tfrac{b}{2}) = 0\,,$$

шукаючи розв'язок кожної методом Фур'є (у вигляді добутку $X(x)Y(y)$).

2.5 Розв'язання крайових задач для рівнянь Лапласа і Пуассона у кругових областях

1. Розв'язок задачі Діріхле в крузі

Запишемо оператор Лапласа в полярних координатах

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\varphi, \end{cases} : \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Сформулюємо задачу Діріхле: знайти гармонічну функцію $u = u(r, \varphi)$, $0 \le r < r_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, тобто двічі неперервно диференційовний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

в крузі $r < r_0$, який неперервний на колі $r = r_0$ та задовольняє крайову умову

$$u(r_0, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

(f – задана неперервна функція).

Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді

$$u = R(r)\Phi(\varphi).$$

Підставляючи його у рівняння та відокремлюючи змінні, одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

Оскільки $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$, то

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Ця умова (*умова періодичності*) для розв'язків рівняння забезпечується тільки при $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При цьому

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Підставляємо значення λ у рівняння для $R(r)$, одержуємо

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь

$$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad R_0(r) = c_0 + d_0 \ln\, r.$$

Оскільки гармонічна функція обмежена в крузі, а отже і в його центрі (при $r = 0$), то й $R_n(r)$ повинні бути обмеженими, зокрема, при $r = 0$. Тому $d_n = 0$, $n = 0, 1.2, \ldots$. Тепер маємо

$$u_0 = c_0, \;\; u_n = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = c_n r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Розглянемо
$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi). \tag{2.31}$$

Припустимо, що розвинення (2.31) рівномірно збігається при $r\le r_0$. Задовольняючи крайову умову задачі, одержуємо
$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r_0^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta).$$
Звідси знаходимо
$$A_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\;d\theta,\;\; A_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\;d\theta,\;\; B_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\;d\theta.$$
Розвинення (2.31) мажорується розвиненням
$$\frac{|A_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|r_0^nA_n|+|r_0^nB_n|),$$
яке збігається, якщо функція f двічі неперервно диференційовна (тоді $r_0^nA_n = O(\frac{1}{n^2})$, $r_0^nB_n = O(\frac{1}{n^2})$). Отже, для такої f розвинення (2.31) є рівномірно збіжним.

Послідовності $\{r_0^nA_n\}$ та $\{r_0^nB_n\}$ обмежені, тому розвинення (2.31) мажорується розвиненням
$$\frac{M}{2}+M\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n,$$
збіжним при $\varrho=\frac{r}{r_0}<1$ і його можна диференціювати почленно. Оскільки кожний доданок цього розвинення задовольняє рівняння Лапласа, то й сума (функція $u(r,\varphi)$) задовольняє рівняння Лапласа всюди всередині круга.

Ми довели, що розвинення (2.31) справді є розв'язком задачі Діріхле, якщо функція f двічі неперервно диференційовна. Можна довести, що (2.31) є також розв'язком цієї задачі при довільній тільки неперервній f.

Нехай f_m – послідовність двічі неперервно диференційовних функцій, яка рівномірно збігається до f, u_m – розв'язок задачі Діріхле при крайових даних f_m. За наслідком із принципу максимуму із рівномірної збіжності послідовності f_m випливає рівномірна збіжність у крузі $r\le r_0$ послідовності u_m до неперервної функції u. За побудовою $u|_{r=r_0}=f$. Доведемо, що функцію

u при $r < r_0$ можна подати у вигляді розвинення (2.31) із тими самими коефіцієнтами.

Маємо

$$u_m(r,\varphi) = \frac{A_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n^{(m)} \cos n\varphi + B_n^{(m)} \sin n\varphi).$$

Коефіцієнти $A_n^{(m)}$ та $B_n^{(m)}$ виражаються через f_m так само, як A_n та B_n через f, тому для довільного $\varepsilon > 0$ при досить великих m $|A_n^{(m)} - A_n| < \varepsilon$ і $|B_n^{(m)} - B_n| < \varepsilon$. Звідси

$$|\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - u_m|$$

$$= |\frac{A_0 - A_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [(A_n - A_n^{(m)}) \cos n\varphi + (B_n - B_n^{(m)}) \sin n\varphi]|$$

$$\leq 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n = \frac{2\varepsilon}{1-\varrho}.$$

Перетворимо розвинення (2.31), підставляючи вирази для коефіцієнтів A_n та B_n. Одержуємо

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n [\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta\, \cos n\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta\, \sin n\varphi] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n(\theta - \varphi)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{r_0})^n \cos n(\theta - \varphi)]\, d\theta.$$

Перетворимо вираз у дужках

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \cos n\psi = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n \cos n\psi = -1 + 2\Re e \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n e^{in\psi} =$$

$$= -1 + 2\Re e \frac{1}{1-\varrho e^{i\psi}} = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2 - 2\varrho\cos\psi}.$$

Отже,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{1-(\frac{r}{r_0})^2}{1+(\frac{r}{r_0})^2 - 2\frac{r}{r_0}\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta,$$

тобто

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta. \tag{2.32}$$

Формула (2.32) називається *інтегралом Пуассона* для круга.

2. Приклади

Примітка. Частинний розв'язок рівняння

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = Ar^m\cos(k\varphi)$$

можна знайти у вигляді

$$u = Br^{m+2}\cos(k\varphi),$$

а рівняння

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = Ar^m\sin(k\varphi)$$

– у вигляді

$$u = Br^{m+2}\sin(k\varphi).$$

Задача 9.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = -4, \quad 0 \le r < R, \tag{2.33}$$
$$u(R,\varphi) = 0, \ \ -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u = v + w,$$

де w – частинний розв'язок цього рівняння Пуассона. Згідно з приміткою, $w(r,\varphi) = Br^2$. Для знаходження числа B підставляємо цю функцію у рівняння: $2B + 2B = -4$, $B = -1$.

Тепер $w = -r^2$, $u = v - r^2$ і для v одержуємо задачу

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \le r < R,$$

$$v(R,\varphi) = 0 + R^2, \ \ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

За принципом максимуму $v(r,\varphi) = R^2$, і тоді $u(r,\varphi) = R^2 - r^2$, $0 \le r \le R$.

Задача 10.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = -4, \quad 0 \le r < R, \tag{2.34}$$

$$u(R,\varphi) = 2\cos\varphi - 1, \ \ -\pi \le \varphi \le \pi\,.$$

Використовуємо попередню задачу: $u = v - r^2$ і для v одержуємо задачу

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \le r < R,$$

$$v(R,\varphi) = 2\cos\varphi - 1 + R^2, \ \ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

Її розв'язок має вигляд (2.31)

$$v(r,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \Big(A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi) \Big).$$

Щоб знайти невідомі сталі A_k, B_k, використовуємо крайову умову:

$$v(R,\varphi) \equiv A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \Big(A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi) \Big) = 2\cos\varphi - 1 + R^2.$$

Залишилось прирівняти коефіцієнти Фур'є двох розвинень за системою $1, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi)$ $(k = 1, 2, \dots)$:

$$A_0 = R^2 - 1, \ \ RA_1 = 2, \ R^k A_k = 0, \ \ k = 2, 3, \dots, \ \ R^k B_k = 0, \ \ k = 1, 2, \dots,$$

звідки $A_1 = 2R^{-1}$, $A_k = 0$, $k = 2, 3, \dots$, $B_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Одержали

$$v(r,\varphi) = R^2 - 1 + \frac{2r}{R}\cos(\varphi), \ \ u(r,\varphi) = R^2 - 1 + \frac{2r}{R}\cos(\varphi) - r^2.$$

2.6 Радіальні коливання круглої мембрани

Розглянемо задачу

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, \ \ r \in (0, r_0), \ t > 0,$$

$$|u(0,t)| < +\infty, \ \ u(r_0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r,0)=\varphi(r),\ \ u_t(r,0)=\psi(r),\ \ r\in[0,r_0].$$

Тому що дані задачі не залежать від φ матимемо $u_{\varphi\varphi}=0$ і рівняння

$$u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r,\ \ r\in(0,r_0),\ t>0.$$

Шукаємо розв'язок задачі у вигляді $u(r,t)=T(t)R(r)$. Одержуємо

$$T^{''}(t)R(r)=T(t)[R^{''}(r)+\frac{1}{r}R'(r)],$$

$$\frac{T^{''}(t)}{T(t)}=\frac{R^{''}(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\lambda,$$

$$T^{''}+\lambda T=0,\ \ t>0,$$

$$R^{''}(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0\ <=>\ r^2R^{''}+rR'+\lambda r^2R=0,\ \ r\in(0,r_0),$$

а з крайової умови і умови регулярності

$$R(r_0)=0,\quad |R(0)|<+\infty.$$

Заміною $r\sqrt{\lambda}=x$, $R(r)=X(x)$ (тоді $R'(r)=X'(x)\sqrt{\lambda}$, $R^{''}(r)=X^{''}(x)\lambda$) зводимо рівняння для функції $R(r)$ до такого

$$x^2X^{''}+xX'+x^2X=0. \tag{2.35}$$

Це окремий випадок рівняння Бесселя

$$x^2X^{''}+xX'+(x^2-\nu^2)X=0$$

($\nu=0$). Шукаючи розв'язок рівняння Бесселя у вигляді узагальненого степеневого ряду $X(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\sigma}$, знаходять його загальний розв'язок

$$X(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x),$$

якщо ν – неціле,

$$X(x)=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x),\ \ n\in\mathbb{Z}_+,$$

де $J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$ і $J_{-\nu}(x)$ – функції Бесселя 1-го роду порядку ν і відповідно, $Y_n(x)=\lim\limits_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)(-1)^\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$ – функція Бесселя 2-го роду порядку n ($J_\nu(x)(-1)^\nu=J_{-\nu}(x)$ при $\nu=n$).

Тепер маємо

$$R(r) = C_1 J_n(r\sqrt{\lambda}) + C_2 Y_n(r\sqrt{\lambda}),$$

а враховуючи, що $Y_n(0) = \infty$,

$$R(r) = C_1 J_0(r\sqrt{\lambda}).$$

Підставляючи її в крайову умову, одержуємо $J_0(r_0\sqrt{\lambda}) = 0$.

Відомо, що:

існує зліченна множина нулів J_0 : $J_0(\mu_m) = 0$, $m \in \mathbb{N}$, звідки

$$\lambda_m = (\tfrac{\mu_m}{r_0})^2, \; R_m(r) = J_0(\tfrac{\mu_m r}{r_0}), \;\; m \in \mathbb{N}$$

– власні значення і власні функції задачі Штурма-Ліувіля

$$r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, \;\; r \in (0, r_0), \;\; R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < +\infty,$$

довільну кусково-неперервну функцію $f(r)$, яка задовольняє умови цієї задачі Штурма-Ліувіля можна розкласти в рівномірно збіжний ряд за функціями $J_\nu(\frac{\mu_m r}{r_0})$, $m \in \mathbb{N}$ для кожного фіксованого ν, ортогональними з вагою r:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu(\frac{\mu_m r}{r_0}),$$

$$c_m = \frac{2}{r_0 J_{\nu+1}(\mu_m)} \int_0^{r_0} r f(r) J_\nu(\frac{\mu_m r}{r_0}) dr.$$

Далі задача розв'язується відомим способом:

$$T_m'' + (\frac{\mu_m}{r_0})^2 T_m = 0,$$

$$T_m(t) = A_m \cos(\frac{\mu_m t}{r_0}) + B_m \sin(\frac{\mu_m t}{r_0}),$$

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(\frac{\mu_m t}{r_0}) + B_m \sin(\frac{\mu_m t}{r_0})] J_0(\frac{\mu_m r}{r_0}).$$

Для знаходження A_m, B_m використовуємо початкові умови:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \; J_0(\frac{\mu_m r}{r_0}) = \varphi(r),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\mu_m}{r_0} \; J_0(\frac{\mu_m r}{r_0}) = \psi(r),$$

звідки

$$A_m = \frac{2}{r_0 J_{\nu+1}(\mu_m)} \int\limits_0^{r_0} r\varphi(r) J_\nu(\frac{\mu_m r}{r_0}) dr,$$

$$B_m = \frac{2}{\mu_m \; J_{\nu+1}(\mu_m)} \int\limits_0^{r_0} r\psi(r) J_\nu(\frac{\mu_m r}{r_0}) dr, \quad m \in \mathbb{N}.$$

2.7 Завдання на використання методу рядів Фур'є

Індивідуальне завдання 1.

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t) = A, \; u(l,t) = B, \;\; u(x,0) = \sin(3x/l), \; u_t(x,0) = 10\,;$

2) $u_t = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u_x(0,t) = At^2, \; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = 0\,;$

3) $\Delta u = 0, \; r > 2, \;\; u_{r=2} = \varphi(\theta)\,.$

Індивідуальне завдання 2.

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t) = 0, \; u(l,t) = B, \;\; u(x,0) = \sin(x/l), \; u_t(x,0) = 10\,;$

2) $u_t = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t) = At^2, \; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = 0\,;$

3) $\Delta u = 0, \; r < 3, \;\; u_{r=3} = \varphi(\theta)\,.$

Індивідуальне завдання 3.

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u_x(0,t) = A, \; u(l,t) = B, \;\; u(x,0) = \cos(3x/2l), \; u_t(x,0) = 10\,;$

2) $u_t = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t) = At, \; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = 0\,;$

3) $\Delta u = 0, \; r > 4, \;\; u_{r=4} = \varphi(\theta)\,.$

Індивідуальне завдання 4.

1) $u_{tt} = u_{xx} + At, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = \sin(x/l), \; u_t(x,0) = 10\,;$

2) $u_t = u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$

$u(0,t)=A,\ u_x(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(x/2l)\,;$

3) $\Delta u=0,\ r<2,\ \ u_{r=2}=\sin(x)\,.$

Індивідуальне завдання 5.

1) $u_{tt}=u_{xx}+A\sin t,\ \ x\in(0,l)\,,$

$u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\cos(x/2l),\ u_t(x,0)=10\,;$

2) $u_t=u_{xx},\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=A,\ \ u(x,0)=2\sin(x/2l)\,;$

3) $\Delta u=0,\ r<20,\ \ u_{r=20}=\sin(3x)\,.$

Індивідуальне завдання 6.

1) $u_{tt}=u_{xx}+t^2,\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(5x/l),\ u_t(x,0)=0\,;$

2) $u_t=u_{xx},\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=10,\ \ u(x,0)=5\sin(x/2l)\,;$

3) $\Delta u=0,\ r<3,\ \ u_{r=3}=\sin(3x)\,.$

Індивідуальне завдання 7.

1) $u_{tt}=u_{xx}+\sin(x/l),\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(2x/l),\ u_t(x,0)=0\,;$

2) $u_t=u_{xx},\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=10,\ u_x(l,t)=t,\ \ u(x,0)=\sin(x/2l)\,;$

3) $\Delta u=0,\ r<5,\ \ u_{r=5}=2\sin(x)+\cos(x)\,.$

Індивідуальне завдання 8.

1) $u_{tt}=u_{xx},\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=2t,\ u(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(5x/l),\ u_t(x,0)=0\,;$

2) $u_t=u_{xx}-3t,\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=A,\ u_x(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(x/2l)\,;$

3) $\Delta u=0,\ r>2,\ \ u_{r=2}=2\sin(2x)\,.$

Індивідуальне завдання 9.

1) $u_{tt}=u_{xx},\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=0,\ u(l,t)=t+1,\ \ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin(x/l)\,;$

2) $u_t=u_{xx}+x,\ \ x\in(0,l)\,,$

$u(0,t)=A,\ u_x(l,t)=0,\ \ u(x,0)=\sin(3x/2l)\,;$

3) $\Delta u = 0,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 1\,,$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2} = \sin(2y),\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=1} = 0\,.$$

Індивідуальне завдання 10.

1) $u_{tt} = u_{xx},\ \ x \in (0, 20)\,,$

$$u(0,t) = 10,\ u(20,t) = 1,\ \ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 3\sin(x/20)\,;$$

2) $u_t = u_{xx} + 2x^2,\ \ x \in (0, l)\,,$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ \ u(x,0) = \sin(x/2l)\,;$$

3) $\Delta u = 0,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 1\,,$

$$u|_{x=0} = \sin(y),\ u|_{x=2} = 0,\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=1} = 0\,.$$

Індивідуальне завдання 11.

1) $u_{tt} = u_{xx},\ \ x \in (0, 2)\,,$

$$u(0,t) = 10,\ u(2,t) = 1,\ \ u(x,0) = 2\sin(2x),\ u_t(x,0) = 0\,;$$

2) $u_t = u_{xx} + 2,\ \ x \in (0, l)\,,$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ \ u(x,0) = \sin(x/2l)\,;$$

3) $\Delta u = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\,,$

$$u|_{x=0} = y,\ u|_{x=1} = 0,\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=2} = 0\,.$$

Індивідуальне завдання 12.

1) $u_{tt} = u_{xx},\ \ x \in (0, 2)\,,$

$$u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 1 - t,\ \ u(x,0) = 3x + 2,\ u_t(x,0) = 0\,;$$

2) $u_t = u_{xx} - 2x,\ \ x \in (0, l)\,,$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ \ u(x,0) = 0\,;$$

3) $\Delta u = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\,,$

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=1} = 2y,\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=2} = 0\,.$$

Індивідуальне завдання 13.

1) $u_{tt} = u_{xx} + Ax,\ \ x \in (0, 2)\,,$

$$u_x(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0,\ \ u(x,0) = 5\cos(5x/2),\ u_t(x,0) = 0\,;$$

2) $u_t = u_{xx} - 2x,\ \ x \in (0, l)\,,$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ \ u(x,0) = 10\,;$$

3) $\Delta u = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\,,$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ u|_{y=0} = \sin(2x),\ u|_{y=2} = 0\,.$$

Індивідуальне завдання 14.

1) $u_{tt} = u_{xx} + x - 2, \;\; x \in (0,2)\,,$
$$u(0,t) = 0,\; u_x(2,t) = 0, \;\; u(x,0) = x - 2,\; u_t(x,0) = 0\,;$$
2) $u_t = u_{xx}, \;\; x \in (0,l)\,,$
$$u_x(0,t) = 0,\; u_x(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = \cos(7x)\,;$$
3) $\Delta u = 0,\; 0 < x < 1,\; 0 < y < 1\,,$
$$u|_{x=0} = 0,\; u|_{x=1} = 0,\; u|_{y=0} = 0,\; u|_{y=2} = \sin(2x)\,.$$

Індивідуальне завдання 15.

1) $u_{tt} = 4u_{xx} - 2, \;\; x \in (0,2)\,,$
$$u(0,t) = 0,\; u_x(2,t) = 0, \;\; u(x,0) = 1 - \sin(x/2),\; u_t(x,0) = 0\,;$$
2) $u_t = u_{xx} + 2, \;\; x \in (0,l)\,,$
$$u_x(0,t) = 0,\; u_x(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = 2\cos(x)\,;$$
3) $\Delta u = 0,\; 0 < x < 1,\; 0 < y < 1\,,$
$$u|_{x=0} = 0,\; u|_{x=1} = 0,\; u|_{y=0} = 0,\; u|_{y=2} = \sin(x) + \sin(2x)\,.$$

Список використаних джерел

1. Бобик О.І., Бобик І.О. Практикум з рівнянь математичної фізики. Ч. 1, 2. Львів, 1996.

2. Бугрій О.М. Рівняння математичної фізики: методичні вказівки.– Львів: вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.

3. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Вид. дім “Родовід”, 2015.

4. Іванчов М.І. Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: текст лекцій.–Львів: іада плюс, 2004.

5. Іванчов М.І. Методичні вказівки до контрольних робіт з рівнянь математичної фізики для студентів заочного відділення математичного факультету. – Львів ЛДУ, 1989.

6. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: Навчальний підручник. - Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012 (Серія "Університетська бібліотека").

7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь. – 2001.

8. Піх С.С., Ровенчак А.А., Криницький Ю.С. 1001 задача з математичної фізики. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. Розділ III (III.4. Метод відокремлення змінних).