Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г. П. Лопушанська, А.О. Лопушанський

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

Львів

2023

УДК 517.9(075.8)
Л77

Р е ц е н з е н т и :

д-р фіз.-мат. наук, доцент **І. П. Мединський**

(Національний університет "Львівська політехніка");

д-р фіз.-мат. наук, професор **Н. П. Процах**

(Національний лісотехнічний університет України);

д-р фіз.-мат. наук, професор **С. В. Шарин**

(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Рекомендовано до друку Вченою радою

Львівського національного університету імені Івана Франка.

Протокол №45/3 від 30 березня 2023 р.

Лопушанська Г. П.

Л77 Інтегральні рівняння та їх застосування: навч. посібник / Г. П. Лопушанська, А. О. Лопушанський. – Електрон. вид. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 116 с.

ISBN 978-617-10-0788-8

Викладено основи теорії лінійних і окремих класів нелінійних інтегральних рівнянь, інтегральних рівнянь теорії потенціалу та деяких задач природознавства, методи їх розв'язання, зокрема з застосуванням інтегральних перетворень (Фур'є і Лапласа). Наведено приклади із розв'язками і рекомендовані до розв'язання для закріплення теоретичного матеріалу. Для студентів і аспірантів механіко-математичного факультету.

УДК 517.9(075.8)

ISBN 978-617-10-0788-8 (електрон. вид.)

ЗМІСТ

ВСТУП

У дослідженні моделей природознавства, економіки і суспільних наук виникають різні задачі для диференціальних рівнянь (звичайних і з частинними похідними), інтегральні рівняння, рівняння у згортках. Останнім часом активно проводять дослідження рівнянь із дробовими похідними, які також можна записувати як інтегральні чи інтегро-диференціальні рівняння і які описують процеси в сильно неоднорідних середовищах чи процеси з пам'яттю.

У посібнику викладено основи теорії лінійних і окремих класів нелінійних інтегральних рівнянь, основні методи їх вивчення та розв'язання, наведено приклади математичних моделей, дослідження яких проводиться за допомогою інтегральних рівнянь.

Наведено приклади з розв'язками і рекомендовані для закріплення теоретичного матеріалу, опорні контрольні запитання. Подано варіанти двох контрольних робіт. Окремі теми з посібника та журнальні статті запропоновано на самостійне опрацювання з доповідями і аналізом на семінарських заняттях.

Розділ 1

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Інтегральні та диференціальні рівняння

Вивчатимемо інтегральні рівняння, які трапляються, зокрема, і при розв'язуванні диференціальних рівнянь і задач для них:

інтегральне рівняння Урисона

$$\int\limits_{\Omega} K(x,y,u(y))dy = f(x), \;\; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \; n \in \mathbb{N},$$

інтегральне рівняння Гаммерштейна

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)f(u(y))dy + g(x), \;\; x \in \Omega,$$

лінійне інтегральне рівняння другого роду

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy + f(x), \;\; x \in \Omega,$$

лінійне інтегральне рівняння першого роду

$$\int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy = f(x), \;\; x \in \Omega.$$

Ці рівняння називаються рівняннями Фредгольма, якщо Ω – фіксована область, рівняннями Вольтерри, якщо $\Omega = \Omega(x), \quad x \in \Omega'$. Функція $K(x,y)$ називається *ядром* інтегрального рівняння.

Нехай $\Omega = (a,b)$, рівняння

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x), \;\; x \in [a,b]$$

є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду,

$$\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \;\; x \in [a,b]$$

– лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду,

$$u(x) = \int\limits_a^x K(x,y)u(y)dy + f(x), \;\; x \in [a,b]$$

– лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду,

$$\int\limits_a^x K(x,y)u(y)dy = f(x), \;\; x \in [a,b]$$

– лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри першого роду.

Також при $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ рівняння

$$u(x_1,x_2) = \int\limits_a^{x_1} \int\limits_c^d K(x_1,x_2,y_1,y_2)u(y_1,y_2)dy_1dy_2 + f(x_1,x_2),$$

$$x = (x_1,x_2) \in [a,b] \times [c,d]$$

– це лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду,

$$\int\limits_a^{x_1} \int\limits_c^d K(x_1,x_2,y_1,y_2)u(y_1,y_2)dy_1dy_2 = f(x_1,x_2)$$

– лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду.

Мають важливі застосування парні інтегральні рівняння

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(x,y)u(y)dy + f(x), \;\; x < 0,$$

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x > 0\,.$$

Між інтегральними та диференціальними рівняннями є зв'язок.

Приклади:

1) задача Коші

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad u(x_0) = u_0$$

еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(y, u(y))dy + u_0\,;$$

2) часто використовують функцію

$$f_\lambda(t) = \tfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція, її властивості, зокрема [4] (с. 87)

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}\,,$$

звідки

$$f_\alpha * f_{-\alpha} = f_{-\alpha} * f_\alpha = \delta\,.$$

Зауважимо, що $f_1(t) = \theta(t)$, $f_0(t) = \delta(t)$, $f_{-1}(t) = f'_0(t) = \delta'(t)$, $f_{-n}(t) = f_0^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t)$ при $n \in \mathbb{N}$, і тоді $f_{-n}(t) * u(t) = (\delta^{(n)} * u)(t) = u^{(n)}(t)$. Тому природно введено поняття похідної Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u^{(\alpha)} = f_{-\alpha} * u,$$

а рівняння з дробовою похідною

$$u^{(\alpha)} + au = g(x)$$

можна записати у вигляді інтегрального рівняння

$$f_{-\alpha} * u + au = g(x) \;\; <=> \;\; u + af_\alpha * u = f_\alpha * g \;\; <=>$$
$$u(x) + \tfrac{a}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)dt = (f_\alpha * g)(x)\,;$$

3) крайова задача

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^2u}{dt^2} + p_1(t)\tfrac{du}{dt} + p_2(t)u = f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, t_1)\,, \\ &u(t_0) = 0, \; u(t_1) = 0 \end{aligned}$$

еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s,u(s)) ds\,,$$

де $G(t,s)$ – функція Гріна задачі;

4) перетворення Фур'є функції $u(x)$

$$\widehat{u}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{ixy} dy$$

має вигляд інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, його розв'язок

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y) e^{-ixy} dy\,.$$

Розглянемо детальніше зв'язок між диференціальними й інтегральними рівняннями.

1. Повернемось до прикладу 3. Маємо крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p_1(t)\frac{du}{dt} + p_2(t)u = f(t,u(t)), \;\; t \in (t_0, t_1)\,,$$
$$u(t_0) = u_0, \; u(t_1) = u_1.$$

Завжди заміною $u(t) = At + B + y(t)$ можна зробити нульовими крайові умови. Тоді

$$y'' + p_1(t)(y' + A) + p_2(t)(y + At + B) = g(t,y) <=>$$
$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = g_1(t,y)\,,$$
$$u(t_0) = At_0 + B + y(t_0) = u_0\,, \; u(t_1) = At_1 + B + y(t_1) = u_1\,,$$

і якщо вибрати A, B так, що $At_0 + B = u_0$ і $At_1 + B = u_1$, то матимемо крайову задачу

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = g_1(t,y)\,, \; y(t_0) = 0, \;\; y(t_1) = 0\,.$$

Її розв'язок є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t,s) g_1(s,u(s)) ds.$$

Функція Гріна $G(t,s)$ є розв'язом рівняння

$$G_{tt} + p_1(t)G_t + p_2(t)G = \delta(t-s)$$

за змінною t для кожного $s \in [t_0, t_1]$ (тобто фундаментальним розв'язком), який задавольняє нульові крайові умови задачі

$$G(t_0, s) = 0\,, \; G(t_1, s) = 0\,.$$

Для задачі

$$y'' + y = g_1(t,y)\,,\ y(0)=0,\ \ y(\pi/2)=0$$

функція Гріна є розв'язом задачі

$$G_{tt} + G = \delta(t-s)\,,\ G(0,s)=0\,,\ G(\pi/2,s)=0\,.$$

Тому що коефіцієнти рівняння сталі, можна спочатку знайти розв'язок рівняння

$$z'' + z = \delta(t)\,,$$

а потім замінити t на $t-s$.

Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$z = C_1 cos(t) + C_2 sin(t)\,.$$

За методом варіації сталих шукаємо фундаментальний розв'язок у вигляді

$$z = C_1(t)cos(t) + C_2(t)sin(t)\,.$$

Підставляючи в рівняння, одержуємо систему

$$\begin{aligned} C_1'(t)cos(t) + C_2'(t)sin(t) &= 0\,,\\ -C_1'(t)sin(t) + C_2'(t)cos(t) &= \delta(t)\,. \end{aligned}$$

Розв'язуємо її

$$\begin{aligned} &C_1'(t) = -sin(t)\delta(t) = 0\,,\\ &C_2'(t) = cos(t)\delta(t) = \delta(t)\,,\\ &C_1(t) = D_1\,,\ C_2(t) = \theta(t) + D_2\,, \end{aligned}$$

і тоді

$$G(t,s) = D_1 cos(t-s) + (\theta(t-s) + D_2)sin(t-s)\,,$$

а з крайових умов

$$\begin{aligned} &G(0,s) = D_1 cos(s) - D_2 sin(s) = 0 \ \text{(враховуємо, що } \theta(-s)=0\text{)},\\ &G(\pi/2,s) = D_1 cos(\pi/2 - s) + (\theta(\tfrac{\pi}{2} - s) + D_2)sin(\pi/2 - s) = 0 \ <=>\\ &D_1 sin(s) + (1+D_2)cos(s) = 0 \ \text{(врахували, що } \theta(\tfrac{\pi}{2}-s)=1\text{)}. \end{aligned}$$

Знаходимо D_1, D_2

$$\begin{aligned} &D_1 = D_2 tg(s)\,,\ D_2 sin(s)tg(s) + (1+D_2)cos(s) = 0\,,\\ &D_2 = -cos^2(s)\,,\ D_1 = -sin(s)cos(s)\,,\ s \in [0,\pi/2]\,. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} G(t,s) &= -sin(s)cos(s)cos(t-s) + (\theta(t-s) - cos^2(s))sin(t-s) =\\ &= -sin(t)cos(s) + \theta(t-s)sin(t-s)\,, \end{aligned}$$

$$y(t)=\int\limits_0^{\pi/2} G(t,s)g_1(s,y(s))ds\,,$$ тобто

$$y(t)=\int\limits_0^{\pi/2} \big[\theta(t-s)sin(t-s)-sin(t)cos(s)\big]g_1(s,y(s))ds\,,$$

$$y(t)=\int\limits_0^{t} sin(t-s)g_1(s,y(s))ds - sin(t)\int\limits_0^{\pi/2} cos(s)g_1(s,y(s))ds\,.$$

2. Звести до інтегрального рівняння задачу Коші

$$y''+y'+a(x)y=0,\ \ x>0,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1\,.$$

Нехай $y''=u(x) => y'(x)=\int\limits_0^x u(s)ds+C_1\,,\ C_1=y'(0)=1\,,$

$$y(x)=\int\limits_0^x y'(t)dt=\int\limits_0^x\Big[\int\limits_0^t u(s)ds+1\Big]dt+C_2\,,\ C_2=y(0)=0\,,$$

$y(x)=\int\limits_0^x (x-s)u(s)ds+x\,,$ підставляємо в початкове рівняння, маємо

$$u(x)+\int\limits_0^x u(s)ds+1+a(x)\Big(\int\limits_0^x (x-s)u(s)ds+x\Big)=0 <=>$$

$$u(x)+\int\limits_0^x \big(1+a(x)(x-s)\big)u(s)ds+1+xa(x)=0\,.$$

Тут $K(x,s)=1+a(x)(x-s)\,.$

3. Звести до диференціального рівняння і розв'язати

$$y(t)=\cos(t)-t+\int\limits_0^{\pi}(s-t)y(s)ds\,.$$

Диференціюючи, одержуємо

$$y'=-\sin(t)-1-\int\limits_0^{\pi} y(s)ds\,,\ y''=-\cos(t)\,.$$

Розв'язуємо рівняння

$$y'=-\sin(t)+C_1\,,\ y=\cos(t)+C_1t+C_2\,.$$

Щоб знайти C_1, C_2, використовуємо, що

$y(0)=1+\int\limits_0^{\pi} sy(s)ds$ (із рівняння), $y(0)=1+C_2$ (із вигляду розв'язку),

$y'(0)=-1-\int\limits_0^{\pi} y(s)ds$, а з вигляду розв'язку $y'(0)=C_1\,.$

Отже, маємо додатково

$$C_1=-1-\int\limits_0^{\pi} y(s)ds\,,\ C_2=\int\limits_0^{\pi} sy(s)ds\,.$$

Підставляючи у ці рівності розв'язок $y(s)=\cos(s)+C_1s+C_2$ і обчислюючи інтеграли, отримаємо систему алгебричних рівнянь для визначення C_1, C_2.

4. Звести до диференціального рівняння

$$y(t) = \cos(t) - t + \int\limits_0^t (s-t)y(s)ds\,.$$

Використовуємо формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,s)ds = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)ds + \beta'(t)f(t,s)|_{s=\beta(t)} - \alpha'(t)f(t,s)|_{s=\alpha(t)}\,.$$

Маємо $y'(t) = -\sin(t) - 1 - \int\limits_0^t y(s)ds\,,$

$$y'' = -\cos(t) - y \;\; <=> \;\; y'' + y = -\cos(t)$$

і додатково маємо умови Коші $y(0) = 1\,,\; y'(0) = -1\,.$

5. Звести інтегральне рівняння першого роду до інтегрального рівняння другого роду

$$\int\limits_0^t (s+t)y(s)ds = \sin(t) + 1\,.$$

Диференціюючи, знаходимо

$$\int\limits_0^t y(s)ds + 2ty(t) = \cos(t)\,,\; t \neq 0 \quad =>$$

$$y(t) + \frac{1}{2t}\int\limits_0^t y(s)ds = \frac{\cos(t)}{2t}\,.$$

Вправи

Звести до інтегральних рівнянь:

1) $y'' + (t+2)y = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1\,;$
2) $y''' - 3ty'' + y = 1,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0,\; y''(0) = 1\,;$
3) $y'' + 4y = g(t,y)\,,\; y(0) = 0,\;\; y'(\pi) = 0\,.$

Звести до диференціальних рівнянь і розв'язати:

1) $y(t) = \sin(t) - t + \int\limits_0^{2t} (s-t)y(s)ds\,;$
2) $y(t) = \sin(t) + \lambda\int\limits_0^t (s-t)y(s)ds\,.$

Звести до інтегрального рівняння другого роду

$$\int\limits_0^t (2s+t^2)y(s)ds = \cos(t) + 1\,.$$

1.2 Лінійні інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами. Характеристичні значення та власні функції

1. Лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b] \tag{1.1}$$

має *вироджене ядро*, якщо

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x) b_j(y).$$

Тоді рівняння (1.1) має вигляд

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \int\limits_a^b b_j(y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Вважаємо функції $a_j(x), b_j(x)$ неперервними на $[a,b]$. Робимо заміну

$$v_j = \int\limits_a^b b_j(y)u(y)dy\,.$$

Рівняння (1.2) множимо на $b_k(x)$ і інтегруємо,

$$\int\limits_a^b b_k(x)u(x)dx = \lambda \sum_{j=1}^{m} \int\limits_a^b b_k(x)a_j(x)dx v_j + \int\limits_a^b b_k(x)f(x)dx \;\; <=>$$

$$v_k = \lambda \sum_{j=1}^{m} C_{kj}\; v_j + g_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.3}$$

Тут

$$C_{kj} = \int\limits_a^b b_k(x)a_j(x)dx\,, \qquad g_k = \int\limits_a^b b_k(x)f(x)dx\,,\; k = 1, \ldots, m\,.$$

Це відомі числа, а (1.3) – лінійна алгебрична система рівнянь щодо невідомих v_k, $k = \overline{1,m}$. Розв'язавши систему, матимемо

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} a_j(x) v_j + f(x) \;\; <=>$$

$$u(x) = \int\limits_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x). \tag{1.4}$$

Функція $R(x, y, \lambda)$ називається *резольвентою* інтегрального рівняння (1.2).

Алгебрична система (1.3), матриця C якої має елементи C_{kj}, має єдиний розв'язок, якщо визначник

$$D(\lambda) = det(E - \lambda C) \neq 0.$$

Ті значення λ, за яких $D(\lambda) = 0$ називаються *характеристичними числами* інтегрального рівняння (1.1) (ядра $K(x, y)$), $1/\lambda$ – *власними числами ядра* $K(x, y)$ або *власними числами* інтегрального оператора

$$\mathcal{K}: \ (\mathcal{K}u)(x) = \int\limits_a^b K(x, y) u(y) dy, \quad u \in C([a, b])$$

(тоді $\mathcal{K}u = \frac{1}{\lambda} u$).

2. Доведемо теореми Фредгольма.

Для рівняння (1.1) відповідне лінійне однорідне інтегральне рівняння має вигляд

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, y) u(y) dy, \quad x \in [a, b]. \tag{1.5}$$

Означення. Оператор $\mathcal{K}^*$ називається *спряженим* до оператора $\mathcal{K}$, якщо

$$(\mathcal{K}u, v) = (u, \mathcal{K}^* v) \ \ \forall u, v \in C([a, b]) \ <=>$$

$$\int\limits_a^b (\mathcal{K}u)(x) \bar{v}(x) dx = \int\limits_a^b u(x) \overline{(\mathcal{K}^* v)}(x) dx.$$

Для довільних $u, v \in C([a, b])$ маємо

$$(\mathcal{K}u, v) = \int\limits_a^b (\mathcal{K}u)(x) \bar{v}(x) dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b K(x, y) u(y) dy \Big) \bar{v}(x) dx =$$
$$= \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b K(x, y) \bar{v}(x) dx \Big) u(y) dy = \int\limits_a^b u(y) \overline{\mathcal{K}^* v}(y) dy = (u, \mathcal{K}^* v).$$

Отже, $\overline{\mathcal{K}^* v}(y) = \overline{\int\limits_a^b K(x, y) \bar{v}(x) dx} = \int\limits_a^b \overline{K(x, y)} v(x) dx$,

$$\overline{\mathcal{K}^* v}(x) = \int\limits_a^b \overline{K(y, x)} v(y) dy,$$

так що ядро спряженого оператора $K^*(x,y)=\overline{K(y,x)}$.

Транспоновані (спряжені в дійсній області) рівняння

$$\psi(x)=\lambda\int\limits_a^b K^*(x,y)\psi(y)dy+f(x),\ \ x\in[a,b] \tag{1.6}$$

і відповідне йому лінійне однорідне

$$\psi(x)=\lambda\int\limits_a^b K^*(x,y)\psi(y)dy,\ \ x\in[a,b]. \tag{1.7}$$

Скорочено в операторній формі ці рівняння записують так:

$$u-\lambda\mathcal{K}u=f,\qquad \psi-\lambda\mathcal{K}^*\psi=f.$$

Якщо для рівняння (1.2)

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^m a_j(x)b_j(y),$$

то $K^*(x,y)=K(y,x)=\sum\limits_{j=1}^m a_j(y)b_j(x)$, а $C_{kj}=\int\limits_a^b b_k(x)a_j(x)dx$ треба замінити на $\int\limits_a^b b_j(x)a_k(x)dx=C_{jk}$ – елементи транспонованої матриці.

Система алгебричних рівнянь для спряженого інтегрального рівняння є системою з транспонованою матрицею.

Ті значення параметра λ, за яких однорідне інтегральне рівняння має ненульові розв'язки, називаються *характеристичними числами ядра* $K(x,y)$, а відповідні розв'язки – *власними функціями ядра.* Зауважимо, що характеристичні числа ядра $K(x,y)$ та власні значення оператора K взаємно обернені, а власні функції збігаються.

Нехай ядро інтегрального оператора вироджене. З наведеного і властивостей лінійних алгебричних систем одержуємо такі теореми.

- *Якщо інтегральне рівняння (1.2) розв'язне у* $C([a,b])$ *для довільної* $f\in C([a,b])$, *то спряжене рівняння (1.6) розв'язне у* $C([a,b])$ *для довільної* $f\in C([a,b])$. *Розв'язки визначаються однозначно (перша теорема Фредгольма).*

Як наслідок, відповідні лінійні однорідні рівняння мають тільки тривіальні розв'язки.

- *Якщо рівняння (1.2) розв'язне у* $C[a,b]$ *не для довільної* $f \in C([a,b])$, *то*:

1) *відповідні (1.2) і (1.6) однорідні інтегральні рівняння мають однакову (скінченну) кількість лінійно незалежних розв'язків (друга теорема Фредгольма); тут використовуємо, що ранги транспонованих матриць однакові*;

2) *для розв'язності рівняння (1.2) необхідно і достатньо, щоб функція* f *була ортогональною до будь-якого розв'язку спряженого однорідного рівняння (третя теорема Фредгольма).*

Пояснимо цю теорему. З теорії лінійних алгебричних систем для розв'язності алгебричної системи (1.3) необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{j=1}^{s} g_j v_j^* = 0, \tag{1.8}$$

де $s = m - r$, r – ранг матриці (C_{kj}) (транспонованої до матриці у системі (1.3)), v_j^* – розв'язок лінійної однорідної алгебричної системи рівнянь

$$v_k^* - \lambda \sum_{j=1}^{m} C_{jk}\, v_j^* = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Справді, запишемо лінійну алгебричну систему рівнянь у вигляді

$$Av = g$$

і нехай v^* – розв'язок лінійної однорідної алгебричної системи рівнянь

$$A^T v^* = \bar{0}$$

із транспонованою матрицею A^T (таких лінійно незалежних розв'язків є s), а отже,

$$v^{*T}(A^T)^T = \bar{0} \;<=>\; v^{*T} A = \bar{0},$$

звідки $v^{*T}\, g = v^{*T}\,(Av) = (v^{*T}\, A)v = 0$, тобто $v^{*T}\, g = 0$, тобто (1.8).

Відповідно є s лінійно незалежних розв'язків спряженого лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$\psi_j^*(x) = \lambda_j^* \int\limits_a^b K^*(x,y)\psi_j^*(y)dy \ <=>$$

$$\psi_j^*(x) = \lambda_j^* \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \int\limits_a^b a_k(y)\psi_j^*(y)dy,$$

і можна перевірити, що умова (1.8) набуває вигляду

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j^*(x)\, dx = 0, \ \ j = 1, \ldots, s. \tag{1.9}$$

Справді, $g_j = \int\limits_a^b b_j(x)f(x)dx$, і тоді (1.8) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{s} \int\limits_a^b b_j(x)f(x)dx \ v_j^* = 0 \ <=> \ \int\limits_a^b \big(\sum_{j=1}^{s} b_j(x)v_j^* \big) f(x)dx = 0,$$

тобто (1.9).

Перевіримо безпосередньо виконання умови (1.9) для розв'язності рівняння (1.2). Якщо існує розв'язок $u(x)$ рівняння (1.2) при $\lambda = \lambda_j$ ($D(\lambda_j) = 0$), то

$$u(x) \equiv \lambda_j \sum_{k=1}^{m} a_k(x) \int\limits_a^b b_k(y)u(y)dy + f(x), \ \ x \in [a,b].$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\int\limits_a^b f(x)\psi_j^*(x)\, dx = \\
&\quad = \int\limits_a^b \Big[u(x) - \lambda_j \sum_{k=1}^{m} a_k(x) \int\limits_a^b b_k(y)u(y)dy \Big] \psi_j^*(x)\, dx = \\
&\quad = \int\limits_a^b u(y)\psi_j^*(y)dy - \lambda_j \sum_{k=1}^{m} \int\limits_a^b b_k(y) \Big[\int\limits_a^b a_k(x)\psi_j^*(x)dx \Big] u(y)dy = \\
&\quad = \int\limits_a^b u(y) \Big[\psi_j^*(y) - \lambda_j \sum_{k=1}^{m} b_k(y) \int\limits_a^b a_k(z)\psi_j^*(z)dz \Big] dy = 0,
\end{aligned}$$

$j = 1, \ldots, s$, оскільки $\lambda_j^* = \lambda_j$ (власні значення транспонованих матриць однакові для дійснозначного ядра), і вираз у квадратних дужках тотожно дорівнює нулю. Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j^*(x)\, dx = 0\,,\ j = 1, \ldots, s\,.$$

У цьому випадку множина всіх розв'язків рівняння (1.1) при $\lambda = \lambda_j$ буде

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \sum_{i=1}^{s_j} d_{ij}\varphi_{ij}(x),$$

де $\tilde{u}(x)$ – якийсь один розв'язок рівняння (1.1), $\varphi_{ij}(x)$ – лінійно незалежні власні функції відповідного однорідного інтегрального рівняння для характеристичного числа $\lambda = \lambda_j$, d_{ij} – довільні сталі.

- *У кожному крузі $|\lambda| < R$ є лише скінченна кількість характеристичних чисел ядра $K(x, y)$ (четверта теорема Фредгольма).*

Наслідком доведених теорем є альтернатива Фредгольма.

Альтернатива Фредгольма. *Якщо лінійне однорідне інтегральне рівняння з виродженим ядром має тільки тривіальний розв'язок, то відповідне лінійне неоднорідне інтегральне рівняння має єдиний розв'язок для довільного вільного члена $f(x)$. Якщо лінійне однорідне інтегральне рівняння з виродженим ядром має нетривіальний розв'язок, то відповідне лінійне неоднорідне інтегральне рівняння (залежно від вільного члена $f(x)$) або не має розв'язку, або має нескінченну кількість розв'язків.*

Такі ж теореми правильні і для загальніших ядер. Доведемо це потім.

Приклади:

1) $y(t) = 3t + \int\limits_0^1 t^3 sy(s)ds \iff y(t) = 3t + t^3 \int\limits_0^1 sy(s)ds\,.$

Вводимо $V := \int\limits_0^1 sy(s)ds$, тоді з початкового рівняння $y(t) = 3t + Vt^3$ і підставляємо цю функцію в вираз для V

$$V = \int\limits_0^1 s[3s + Vs^3]ds \iff V = [s^3 + V\tfrac{s^4}{4}]\,\big|_0^1 \iff$$

$$V = 1 + \tfrac{V}{4}\,,\ \tfrac{3}{4}V = 1\,,\ V = \tfrac{4}{3}\,,\ y(t) = 3t + \tfrac{4}{3}t^3\,;$$

2) $y(t) = 3t^2 + 4 + \int\limits_0^1 [t^3 s + ts^3]y(s)ds \iff$

$$y(t) = 3t^2 + 4 + t^3 \int\limits_0^1 sy(s)ds + t \int\limits_0^1 s^3 y(s)ds\,.$$

Вводимо $V_1 := \int\limits_0^1 sy(s)ds\,,\ V_2 := \int\limits_0^1 s^3 y(s)ds\,,$
тоді з початкового рівняння $y(t) = 3t^2 + 4 + V_1 t^3 + V_2 t$ і підставляємо цю функцію в вирази для V_1, V_2

$$V_1 = \int\limits_0^1 s[3s^2 + 4 + V_1 s^3 + V_2 s]ds\,, \qquad V_2 = \int\limits_0^1 s^3[3s^2 + 4 + V_1 s^3 + V_2 s]ds\,.$$

Отримали алгебричну систему рівнянь

$$\frac{V_1}{5} - \frac{V_2}{3} = \frac{11}{4}\,,$$
$$-\frac{V_1}{7} + \frac{4V_2}{5} = \frac{3}{2}\,.$$

Знайшовши V_1, V_2, матимемо розв'язок $y(t) = 3t^2 + 4 + V_1 t^3 + V_2 t$.

Вправи

Розв'язати рівняння з виродженими ядрами:

1) $y(x) = 1 + 2 \int\limits_{-2}^1 sy(s)ds\,;$

2) $y(x) = x + \int\limits_0^1 (xs + x^2 + s^2) y(s)ds\,;$

3) $y(x) = x + \int\limits_0^\pi \sin(x + s) y(s)ds\,.$

3. Таким самим методом можемо розв'язувати лінійні та нелінійні інтегро-диференціальні рівняння з виродженими ядрами, системи інтегральних рівнянь [20].

Приклади:

1) розв'язати рівняння Гаммерштейна

$$y(x) = x^3 + \int\limits_0^1 x^2 s y^2(s)ds\,.$$

Маємо $y(x) = x^3 + x^2 \int\limits_0^1 sy^2(s)ds$ і нехай $V = \int\limits_0^1 sy^2(s)ds$, а отже,

$$y(x) = x^3 + Vx^2\,.\ \text{Тоді}$$

$$V = \int\limits_0^1 s(s^3 + Vs^2)^2 ds \iff V = \int\limits_0^1 s(s^6 + 2Vs^5 + V^2 s^4)ds \iff$$

$$V = \int\limits_0^1 (s^7 + 2Vs^6 + V^2 s^5)ds \iff V = \frac{1}{8} + \frac{2V}{7} + \frac{V^2}{6} \iff$$

$V^2 - \frac{30V}{7} + \frac{3}{4} = 0$, звідки $V_1 = \frac{15 - \sqrt{78}}{7}\,,\ V_2 = \frac{15 + \sqrt{78}}{7}\,,$

$$y_1(x) = x^3 + V_1 x^2, \;\; y_2(x) = x^3 + V_2 x^2 \,;$$

2) розв'язати інтегро-диференціальне рівняння

$u' = 1 + \int_0^1 [u(t) + 2xu'(t)]dt \,,\; u(0) = 1 \,.$

Вводимо $V_1 := \int\limits_0^1 u(t)dt \,,\; V_2 := \int\limits_0^1 u'(t)dt$. Тоді з початкового рівняння

$u'(t) = 1 + V_1 + 2V_2 t$, звідки $u(t) = (1+V_1)t + V_2 t^2 + C_1$.

Враховуючи початкову умову, матимемо $1 = C_1$, а отже,

$u(t) = (1+V_1)t + V_2 t^2 + 1$, і підставляємо u та u' в вирази для V_1, V_2

$V_1 = \int\limits_0^1 [(1+V_1)t + V_2 t^2 + 1]dt \,,\; V_2 = \int\limits_0^1 [1 + V_1 + 2V_2 t]dt$, тобто

$V_1 = (1+V_1)/2 + V_2/3 + 1 \,,\; V_2 = 1 + V_1 + V_2$, тобто

$V_1 - 2V_2/3 = 3 \,,\; V_1 = -1$, а отже, $V_2 = -6$. Одержали розв'язок

$u(x) = -6x^2 + 1 \,;$

3) розв'язати нелінійне інтегро-диференціальне рівняння

$u' = \int_0^2 xtu(t)u'(t)dt \,,\; u(0) = 1 \,.$

Вводимо $V := \int\limits_0^2 tu(t)u'(t)dt$. Тоді з початкового рівняння $u'(x) = Vx$, звідки $u(x) = Vx^2/2 + C_1$. Враховуючи початкову умову, матимемо $1 = C_1$, а отже, $u(x) = Vx^2/2 + 1$, і підставляємо цю функцію в вираз для V. Одержуємо

$V = \int\limits_0^2 t(Vt^2/2 + 1)Vtdt \;\; <=> \;\; V = V\int\limits_0^2 (Vt^4/2 + t^2)dt$, звідки

$V_1 = 0, \;\; 1 = 16V_2 + 8/3 \;\; => \;\; V_2 = -\frac{5}{48}$. Одержали розв'язки

$u_1(x) = 1, \;\; u_2(x) = -\frac{5}{96}x^2 + 1 \,;$

4) розв'язати систему інтегральних рівнянь з виродженими ядрами

$$u_1(x) = x - \tfrac{5}{18} + \tfrac{1}{3}\int\limits_0^1 [u_1(t) + u_2(t)]dt \,,$$

$$u_2(x) = x^2 - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{3}\int\limits_0^1 [u_1^2(t) + u_2(t)]dt \,.$$

Вводимо $V_1 := \int\limits_0^1 u_1(t)dt \,,\; V_2 := \int\limits_0^1 u_2(t)dt \,,\; V_3 := \int\limits_0^1 u_1^2(t)dt$.

Тоді $u_1(x) = x - \frac{5}{18} + \frac{1}{3}(V_1 + V_2) \,,\; u_2(x) = x^2 - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(V_3 + V_2)$.

Тепер $V_1 = \int\limits_0^1 \left[t - \frac{5}{18} + \frac{1}{3}(V_1 + V_2)\right]dt \,,\; V_2 = \int\limits_0^1 \left[t^2 - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(V_3 + V_2)\right]dt \,,$

$$V_3 = \int\limits_0^1 \left[t - \tfrac{5}{18} + \tfrac{1}{3}(V_1 + V_2)\right]^2 dt \,,$$

тобто

$V_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} + \frac{1}{3}(V_1 + V_2)\,,$
$V_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(V_3 + V_2)\,,$
$V_3 = \frac{1}{4} + \frac{25}{244} + \frac{1}{9}(V_1 + V_2)^2 - \frac{5}{18} + \frac{1}{3}(V_1 + V_2) - \frac{10}{54}(V_1 + V_2)\,,$

тобто

$4V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\,,$
$2V_2 - V_3 = \frac{1}{3}\,,$
$V_1 + V_2 + \frac{27}{4}V_3 = \frac{23 \cdot 27}{4 \cdot 244} + \frac{3}{4}(V_1 + V_2)^2\,.$

Розв'язавши систему, знаходимо

$u_1 = x\,,\ u_2 = x^2$ і другий розв'язок $u_1 = x + 3\,,\ u_2 = x^2 + 6\,.$

Вправи

Розв'язати нелінійні інтегральні рівняння:

1) $u(x) = \int\limits_0^2 \frac{(x+s)u(s)}{1+u(s)}ds;$ відповідь $u(x) = x + \frac{1}{2}\, ln\frac{7}{3}(x - \frac{3}{4})\,;$

2) $u(x) = x^3 + \int\limits_0^x x^2 s u^3(s) ds\,;$ відповідь $u(x) = -3 + (10x + 65) ln|\frac{x+11}{x+10}|\,.$

Розв'язати інтегро-диференціальні рівняння з виродженими ядрами:

1) $u'' - u' = \int\limits_0^1 [xtu(t) - u'(t)]dt\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 0\,;$

2) $u'' = -2 + e^x + \int\limits_{-1}^1 e^{-4t} u^2(t)(u'(t))^2 dt\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 1,\ \ (u = e^x)\,;$

3) $u'' - u = \int_0^1 [u(t) + 2x^2 t u'(t)]dt\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 0\,.$

Розв'язати систему інтегральних рівнянь з виродженими ядрами

$u_1(x) = -x - \frac{1}{4}e^{-x} + \int\limits_0^1 e^{-x} u_1(t) u_2(x) dt\,,$

$u_2(x) = x^2 - \frac{1}{5}e^{-x} + \int\limits_0^1 e^{-x} u_1^2(t) u_2(x) dt\,.$

1.3 Лінійні інтегральні рівняння з неперервними ядрами. Метод послідовних наближень

Нехай лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y) u(y) dy + f(x),\quad x \in [a,b] \tag{1.10}$$

має *неперервне ядро*: $K \in C([a,b] \times [a,b])$.

1. Властивості інтегрального оператора

Розглянемо інтегральний оператор

$$\mathcal{K}: \ (\mathcal{K}u)(x) = \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy, \ \ x \in [a,b], \ \ u \in C([a,b])$$

і вивчимо його властивості.

Лема 1. *Якщо ядро оператора $\mathcal{K}$ неперервне, то*

$\mathcal{K}: \ C([a,b]) \to C([a,b])$ *і правильні оцінки*

$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} \le N||u||_{C([a,b])}$, *де* $N = \max\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(x,y)|dy$,

$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} \le M(b-a)||u||_{C([a,b])}$, *де* $M = \max\limits_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|$.

Доведення. При $u \in C([a,b])$

$$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |(\mathcal{K}u)(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy| \le$$

$$\le \max_{y\in[a,b]} |u(y)| \max_{x\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(x,y)|dy = N||u||_{C([a,b])}.$$

Також

$$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} \le \max_{y\in[a,b]} |u(y)| \max_{x\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(x,y)|dy \le M(b-a)||u||_{C([a,b])}.$$

Лема 2. *Якщо ядро оператора $\mathcal{K}$ неперервне, то*

$\mathcal{K}: \ L_2(a,b) \to C([a,b])$ *і правильна оцінка*

$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} \le M\sqrt{b-a}\ ||u||_{L_2(a,b)}$, *де* $M = \max\limits_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|$.

Доведення. При $u \in L_2(a,b)$

$$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |(\mathcal{K}u)(x)| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy| \le \max_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \int\limits_a^b |u(y)|dy \le$$

$$\le M\sqrt{\int\limits_a^b |u(y)|^2dy}\sqrt{\int\limits_a^b dy} = M\sqrt{b-a}\ ||u||_{L_2(a,b)}.$$

Наслідок 1 (єдиність розв'язку інтегрального рівняння). *При* $|\lambda| < \frac{1}{N}$ *інтегральне рівняння (1.10) має не більше одного розв'язку у просторі* $C([a,b])$, *а при* $|\lambda| < \frac{1}{M\sqrt{b-a}}$ *– у просторі* $L_2(a,b)$.

Доведення. Припускаючи існування двох розв'язків $u_1, u_2 \in C([a,b])$ рівняння (1.10), одержуємо, що $u = u_1 - u_2$ є розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння

$$u(x) - \lambda(\mathcal{K}u)(x) = 0, \quad x \in [a,b].$$

Тоді $||u||_{C([a,b])} = |\lambda| \; ||\mathcal{K}u||_{C([a,b])}$, а використовуючи лему 1, матимемо

$$||u||_{C([a,b])} \leq |\lambda| N \; ||u||_{C([a,b])}.$$

Одержали $||u||_{C([a,b])} = 0$ при $|\lambda| < \frac{1}{N}$.

Другий випадок доводиться з використанням леми 2 так само.

Лема 3. *Якщо ядро оператора $\mathcal{K}$ неперервне, то він переводить всяку обмежену множину функцій із $L_2(a,b)$ у множину, обмежену і одностайно неперервну в $C([a,b])$.*

Доведення. Нехай U – обмежена множина функцій із $L_2(a,b)$. При $u \in U$ маємо $||u||_{L_2(a,b)} \leq A$, а за лемою 2

$$||\mathcal{K}u||_{C([a,b])} \leq M||u||_{L_2(a,b)}\sqrt{b-a} \leq MA\sqrt{b-a},$$

так що множина $\mathcal{K}U$ обмежена в $C([a,b])$. Доведемо, що вона одностайно неперервна в $C([a,b])$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, : \forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta, \;\; \forall u \in U$$
$$|(\mathcal{K}u)(x_1) - (\mathcal{K}u)(x_2)| < \varepsilon.$$

За неперервністю ядра маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, : \forall x_1, x_2, y \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta$$
$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \tfrac{\varepsilon}{MA\sqrt{b-a}}.$$

Тоді

$$|(\mathcal{K}u)(x_1) - (\mathcal{K}u)(x_2)| = |\int_a^b [K(x_1,y) - K(x_2,y)]u(y)dy| \leq$$
$$\leq \max_{y \in [a,b]} |K(x_1,y) - K(x_2,y)| \, M||u||_{L_2(a,b)}\sqrt{b-a} < \tfrac{\varepsilon}{MA\sqrt{b-a}} \, MA\sqrt{b-a} = \varepsilon.$$

Лема 4 (Арцела-Асколі). *Якщо U – обмежена множина функцій із $C([a,b])$ і одностайно неперервна в $C([a,b])$, то з неї можна вибрати збіжну в $C([a,b])$ послідовність (тобто множина U компактна).*

Доведення. Нехай U – обмежена множина функцій $f \in C([a,b])$. Із обмеженої множини точок $x \in [a,b]$ за теоремою Больцано-Вейєрштраса виберемо збіжну послідовність x_k, $k \in \mathbb{N}$, а з обмеженої множини чисел $f(x_k)$,

$f \in U$ – збіжну послідовність $f_n(x_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді діагональна послідовність $f_{k_n}(x_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$ також збігається як підпослідовність збіжної послідовності. Перепозначимо її через $f_n(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ і доведемо, що послідовність функцій $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ *рівномірно* збігається на $[a,b]$. Маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) > 0 \; : \forall n, p, m \in \mathbb{N}, \; n, p \geq N$$
$$|f_n(x_m) - f_p(x_m)| < \varepsilon/3 \,,$$

а за одностайною неперервністю множини функцій $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ при $f \in U$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; : \forall x, x' \in [a,b], |x - x'| < \delta, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$
$$|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon/3 \,.$$

Тепер для довільної $x \in [a,b]$ виберемо $x_m \in [a,b]$ так, що вона належить збіжній послідовності точок і $|x - x_m| < \delta$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) > 0 \; : \forall x \in [a,b], \forall n, p \in \mathbb{N}, \; n, p \geq N$$
$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_p(x_m)| + |f_p(x_m) - f_p(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \,.$$

За критерієм Коші послідовність функцій $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ рівномірно збігається на $[a,b]$.

Лема 4 правильна при заміні $[a,b]$ на компакт $B \in \mathbb{R}^n$.

Оператор називається *компактним*, якщо він переводить всяку обмежену множину в компактну.

За лемою 3 інтегральний оператор з неперервним ядром переводить всяку обмежену множину функцій із $C([a,b])$ у множину, обмежену і одностайно неперервну в $C([a,b])$. Тоді за лемою 4 *інтегральний оператор з неперервним ядром є компактним* із $C([a,b])$ в $C([a,b])$.

Оператор називається *цілком неперервним*, якщо він компактний і неперервний. Лінійний інтегральний оператор з неперервним ядром є неперервним:

$$|(\mathcal{K}u_1)(x) - (\mathcal{K}u_2)(x)| = |\int_a^b K(x,y)[u_1(y) - u_2(y)]dy| \leq$$
$$\leq ||u_1 - u_2||_{C([a,b])} \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x,y)| \, dy = N||u_1 - u_2||_{C([a,b])}.$$

Тепер за лемами 3 і 4 цей оператор є цілком неперервним. Одержали наслідок.

Наслідок 2. *Інтегральний оператор з неперервним ядром цілком неперервний із* $C([a,b])$ *в* $C([a,b])$.

Критерій компактності в $L_p(a,b)$ $(p \geq 1)$ отримуємо з теореми Ріса.

Вважаємо $v(y) = 0$ поза (a,b),

$$v \in L_p(a,b) \iff ||v||_{L_p(a,b)} := [\int\limits_a^b |v(y)|^p dy]^{1/p} < +\infty .$$

Теорема (Ріса). *Для компактності множини* B *функцій із* $L_p(a,b)$ *необхідно і достатньо (н. і д.), щоб ця множина була рівномірно обмеженою в* $L_p(a,b)$ *і неперервною в цілому, тобто:*

1) $\exists M > 0 : \ ||v||_{L_p(a,b)} \leq M \ \ \forall v \in B \subset L_p(a,b)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \forall |y| < \delta, \forall v \in B$

$$||v(x+y) - v(x)||_{L_p(a,b)} \leq \varepsilon \iff \int\limits_a^b |v(x+y) - v(x)|^p dx \leq \varepsilon^p .$$

2. Метод послідовних наближень

$u_0(x) = f(x), \ u_n(x) = \lambda(\mathcal{K}u_{n-1})(x) + f(x), \ n = 1, 2, \ldots$

$u_1(x) = \lambda(\mathcal{K}u_0)(x) + f(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y) f(y) dy + f(x)$,

$u_2(x) = \lambda(\mathcal{K}u_1)(x) + f(x) = \lambda\mathcal{K}\big(\lambda\mathcal{K}f + f\big)(x) + f(x) =$

$\quad = \lambda^2(\mathcal{K}^2 f)(x) + \lambda(\mathcal{K}f)(x) + f(x)$.

За методом математичної індукції

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m (\mathcal{K}^m f)(x),$$

де $(\mathcal{K}^n f)(x)$ називаються *ітераціями* оператора $\mathcal{K}$, а ряд

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (\mathcal{K}^m f)(x) \tag{1.11}$$

– рядом Неймана. Використовуючи лему 1, можемо знайти мажорантний ряд для ряду (1.11) і дослідити його збіжність. Також

$u_2(x) = \lambda(\mathcal{K}u_1)(x) + f(x) =$

$\quad = \lambda \int\limits_a^b K(x,z) \big(\lambda \int\limits_a^b K(z,y) f(y) dy + f(z)\big) dz + f(x) =$

$$= \lambda^2 \int_a^b \Big(\int_a^b K(x,z)K(z,y)dz \Big) f(y)dy + \lambda \int_a^b K(x,z)f(z)dz + f(x)\,,$$

і нехай $K_1(x,y) = K(x,y)$, $M = \max\limits_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|$, $N = \max\limits_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,y)|dy$.

Тоді

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_1(z,y)dz\,,\ |K_2(x,y)| \le MN\,,$$

$$u_2(x) = \lambda^2 \int_a^b K_2(x,y)f(y)dy + \lambda \int_a^b K_1(x,z)f(z)dz + f(x)\,,$$

$$u_3(x) = \lambda(\mathcal{K}u_2)(x) + f(x) =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,z)\Big[\lambda^2 \int_a^b K_2(z,y)f(y)dy +$$

$$+ \lambda \int_a^b K_1(x,z)f(z)dz + f(z)\Big]dz + f(x) =$$

$$= \lambda^3 \int_a^b \Big(\int_a^b K(x,z)K_2(z,y)dz \Big) f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,z)f(z)dz +$$

$$+ \lambda \int_a^b K_1(x,z)f(z)dz + f(x)\,,$$

і нехай

$$K_3(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_2(z,y)dz \text{ (тоді } |K_3(x,y)| \le MN^2\text{)},$$

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz\,.$$

$K_n(x,y)$ називаються *ітерованими ядрами* і

$$|K_n(x,y)| \le MN^{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Також

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(x,y)f(y)dy =$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{m=0}^{n} \Big(\lambda^m \int_a^b K_{m+1}(x,y)f(y)dy\Big)\,,$$

де $\int_a^b K_0(x,y)f(y)dy = f(x)$.

Мажорантним для ряду (1.11) є ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m MN^m\, ||f||_{C([a,b])} = M \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m N^m\, ||f||_{C([a,b])} = \frac{M||f||_{C([a,b])}}{1-|\lambda|N}\,,$$

збіжний при $|\lambda|N < 1 \iff |\lambda| < \frac{1}{N}$.

Висновком є теорема 1.

Теорема 1. *При неперервному ядрі, $f \in C([a,b])$, $|\lambda| < \frac{1}{N}$ існує єдиний розв'язок $u \in C([a,b])$ інтегрального рівняння (1.10), тобто в крузі $|\lambda| < \frac{1}{N}$ існує обмежений обернений оператор $(I - \lambda\mathcal{K})^{-1}$. У цьому випадку*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,y,\lambda) f(y) dy,$$

де

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x,y)$$

– резольвента ядра $K(x,y)$.

Приклад. Побудувати резольвенту ядра інтегрального рівняння

$$u(x) - \lambda \int\limits_0^1 xyu(y)dy = f(x).$$

Тут $K(x,y) = xy = K_1(x,y)$, $\max\limits_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(x,y)|dy = \max\limits_{x\in[0,1]} \frac{xy^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$, тому при $f \in C([a,b])$, $|\lambda| < 2$ існує єдиний розв'язок рівняння.

$K_2(x,y) = \int\limits_0^1 K(x,z)K_1(z,y)dz =$

$= \int\limits_0^1 xz \cdot zydz = xy \int\limits_0^1 z^2 dz = \frac{xy}{3}$,

$K_3(x,y) = \int\limits_0^1 K(x,z)K_2(z,y)dy = \int\limits_0^1 xz\frac{zy}{3}dz =$

$= \frac{xy}{3}\int\limits_0^1 z^2 dz = \frac{xy}{3^2}$, ..., $K_m(x,y) = \frac{xy}{3^{m-1}}$,

$K_{m+1}(x,y) = \frac{xy}{3^m}$, $R(x,y,\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x,y) =$

$= \sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{xy}{3^m} = xy \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{3}\right]^m = \frac{xy}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3xy}{3-\lambda}$ при $\lambda < 3$,

$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 \frac{3xy}{3-\lambda} f(y)dy <=> u(x) = f(x) + \frac{3x\lambda}{3-\lambda}\int\limits_0^1 yf(y)dy$.

3. Інтегральні рівняння Вольтерри другого роду

Розглянемо рівняння

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{1.12}$$

Маємо $|K_1(x,y)| = |K(x,y)| \le M$,

$|K_2(x,y)| = \int\limits_a^x |K(x,z)K(z,y)|dz \le M^2 \int\limits_a^x dz = M^2(x-a)$,

$|K_n(x,y)| \le M^n(x-a)^{n-1}/(n-1)!$,

$|u_n(x)| \le \sum\limits_{m=0}^{n} |\lambda|^m \int\limits_a^x |K_m(x,y)|\,|f(y)|dy \le$

$\le ||f||_{C([a,b])} \sum\limits_{m=0}^{n} |\lambda|^m M^m \int\limits_a^x (y-a)^{m-1}/(m-1)!dy$,

$u(x) = ||f||_{C([a,b])} \sum\limits_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m M^m \frac{(x-a)^m}{m!} = ||f||_{C([a,b])} e^{|\lambda|M(x-a)} \le$

$\le ||f||_{C([a,b])} e^{|\lambda|M(b-a)}$.

Висновком є теорема 2.

Теорема 2. *При неперервному ядрі, $f \in C([a,b])$ існує єдиний розв'язок $u \in C([a,b])$ інтегрального рівняння Вольтерри (1.12) для всіх λ.*

Приклади:

1) $\int\limits_0^x e^{x-y}u(y)dy = sinx$.

Спочатку зведемо рівняння до інтегрального рівняння другого роду:

$\int\limits_0^x e^{x-y}u(y)dy + u(x) = cosx$, $K(x,y) = e^{x-y} = K_1(x,y)$,

тоді

$K_2(x,y) = \int\limits_0^x K(x,z)K_1(z,y)dz =$

$= \int\limits_0^x e^{x-z}e^{z-y}dz = \int\limits_0^x e^{x-y}dz = xe^{x-y}$,

$K_3(x,y) = \int\limits_0^x K(x,z)K_2(z,y)dz = \int\limits_0^x e^{x-z}ze^{z-y}dz = e^{x-y}x^2/2$,

$K_m(x,y) = e^{x-y}x^{m-1}/(m-1)!$, $K_{m+1}(x,y) = e^{x-y}x^m/m!$,

$R(x,y,\lambda)|_{\lambda=1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} K_{m+1}(x,y) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}e^{x-y} = e^{x-y}e^x = e^{2x-y}$,

$u(x) = cosx + e^{2x}\int\limits_0^x e^{-y}cosydy$;

2) розв'язати методом послідовних наближень

$$u(x) + \int\limits_0^x (x-y)u(y)dy = x.$$

Маємо

$u_0(x) = x$, $u_1(x) = x - \int\limits_0^x (x-y)ydy = x - (\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}) = x - \frac{x^3}{3!}$,

$$u_2(x) = x - \int\limits_0^x (x-y)\big(y - \tfrac{y^3}{3!}\big)dy =$$
$$= x - \big(\tfrac{x^3}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{4!} + \tfrac{x^5}{5!}\big) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!}\,,$$
$$u_m(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad u(x) = sin x\,.$$

Вправи

Розв'язати методом послідовних наближень:

1) $u(x) = \int\limits_0^x (x-y)e^{x-y}u(y)dy + e^x\,;$

2) $u(x) = \int\limits_0^1 e^{-x-y}u(y)dy + 1\,;$

3) $u(x) = \int\limits_0^x (x-y+1)u(y)dy - x\,.$

Знайти наближений розв'язок методом послідовних наближень:

1) $u(x) = \int\limits_0^1 (x-y+1)u(y)dy + x\,;$

2) $u(x) = x^3 + \frac{1}{3}\int\limits_x^{x^3} (x+y)u(y)dy\,;$

3) $u(x) = \int\limits_1^x (x-3y+1)u(y)dy + x\,.$

4. Теореми Фредгольма

За теоремою Вейєрштрасса неперервну функцію $K(x,y)$ можна наблизити поліномом $P(x,y) = \sum\limits_{k+l=0}^{m} a_{k,l}x^k y^l:\ |K(x,y) - P(x,y)| < \varepsilon$. Тоді

$$K(x,y) = P(x,y) + Q(x,y), \tag{1.13}$$

де $P(x,y)$ – вироджене ядро, $Q(x,y)$ – мале ($|Q(x,y)| < \varepsilon \quad \forall x,y \in [a,b]$). Інтегральне рівняння (1.10) має вигляд

$$u = \lambda\mathcal{P}u + \lambda\mathcal{Q}u + f. \tag{1.14}$$

За теоремою 1 при $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon(b-a)}$ однозначно визначаємо розв'язок рівняння

$$u - \lambda\mathcal{Q}u = v\,.$$

Маємо

$$u = (I - \lambda\mathcal{Q})^{-1}v = (I + \lambda\mathcal{R})v,$$

де $\mathcal{R}$ – інтегральний оператор, ядром якого є резольвента $R(x,y,\lambda)$ малого ядра $Q(x,y)$. Рівняння (1.14), враховуючи, що $v=\lambda\mathcal{P}u+f$, стає таким:

$$v=\lambda\mathcal{P}(I+\lambda\mathcal{R})v+f \iff v=\lambda\mathcal{T}v+f,$$

де $\mathcal{T}=\mathcal{P}(I+\lambda\mathcal{R})=\mathcal{P}+\lambda\mathcal{P}\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}\mathcal{R}v)(x) &= \int_a^b P(x,z)\big(\mathcal{R}v\big)(z)dz = \\
&= \int_a^b P(x,z)\Big(\int_a^b R(z,y,\lambda)v(y)dy\Big)dz = \\
&= \int_a^b \Big(\int_a^b P(x,z)R(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy = \\
&= \int_a^b \Big(\int_a^b \sum_{k+l=0}^m a_{k,l}x^k z^l R(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy = \\
&= \int_a^b \sum_{k+l=0}^m a_{k,l}x^k\Big(\int_a^b z^l R(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy = \\
&= \int_a^b \Big(\sum_{k+l=0}^m a_{k,l}x^k B_l(y)\Big)v(y)dy\,.
\end{aligned}$$

Ми довели, що оператор $\mathcal{P}\mathcal{R}v$ має вироджене ядро $\sum\limits_{k+l=0}^m a_{k,l}x^k B_l(y)$, а отже, $\mathcal{T}$ – оператор з неперервним виродженим ядром.

Ми звели лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з неперервним виродженим ядром.

Спряжене до (1.10) інтегральне рівняння так само зводимо до рівняння

$$w=\bar{\lambda}\mathcal{T}^*w+g. \tag{1.15}$$

Для таких рівнянь були доведені теореми Фредгольма. З них одержуємо відповідні теореми для інтегральних рівнянь з довільними неперервними ядрами.

- *Якщо інтегральне рівняння (1.10) розв'язне у $C([a,b])$ для довільної $f\in C([a,b])$, то спряжене рівняння розв'язне у $C([a,b])$ для довільної $f\in C([a,b])$. Розв'язки визначаються однозначно (перша теорема Фредгольма).*

Як наслідок, відповідні лінійні однорідні рівняння мають тільки тривіальні розв'язки.

- *Якщо рівняння (1.10) розв'язне у $C([a,b])$ не для довільної $f \in C([a,b])$, то:*

1) *відповідні (1.10) і спряженому однорідні рівняння мають однакову (скінченну) кількість лінійно незалежних розв'язків* (*друга теорема Фредгольма*);

2) *для розв'язності рівняння (1.10) необхідно і достатньо, щоб функція f була ортогональною до будь-якого розв'язку спряженого однорідного рівняння* (*третя теорема Фредгольма*).

- *У кожному крузі $|\lambda| \le N_1$ є лише скінченна кількість характеристичних чисел ядра $K(x,y)$* (*четверта теорема Фредгольма*).

Наслідок. $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots \le |\lambda_p| \le \dots$

Можна наближено розв'язувати інтегральне рівняння Фредгольма з неперервним ядром, замінюючи ядро виродженим.

Приклади:

1) $u(x) = 1 + \int\limits_0^1 e^{xy} u(y)dy$, $e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} + \dots$.

Рівняння

$$u(x) = 1 + \int\limits_0^1 (1+xy)u(y)dy$$

має вироджене ядро; його розв'язок є наближенням розв'язку заданого рівняння;

2) $u(x) = x + \int\limits_0^1 \sin(xy)u(y)dy$, $\sin(xy) = xy - \frac{x^3y^3}{3!} + \dots$

Рівняння

$$u(x) = x + \int\limits_0^1 (xy - \frac{x^3y^3}{6})u(y)dy$$

має вироджене ядро.

Вправи

Побудувати наближений розв'язок інтегрального рівняння, замінюючи його ядро виродженим:

1) $u(x) = x + \int\limits_0^1 \mathrm{tg}(x-y)u(y)dy$;

2) $u(x) = x + \int\limits_0^1 ln(2-xy)u(y)dy$;

3) $u(x) = 1 + \int\limits_0^1 \sqrt{x + x^2y^2}u(y)dy$.

5. Властивості характеристичних чисел і власних функцій

Лема 5. *Нехай* $\lambda_1, \bar{\lambda}_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ *– характеристичні числа відповідних лінійних однорідних рівнянь для рівняння (1.10) і спряженого йому,* ψ_1, ψ_2^* *– відповідні власні функції. Тоді* ψ_1 *і* ψ_2^* *ортогональні, тобто*

$$(\psi_1, \psi_2^*) := \int\limits_a^b \psi_1 \bar{\psi}_2^* dy = 0 .$$

Доведення. Маємо

$$\psi_1 = \lambda_1 \mathcal{K} \psi_1 , \quad \psi_2^* = \bar{\lambda}_2 \mathcal{K}^* \psi_2^* ,$$

також

$$(\mathcal{K}u, v) = (u, \mathcal{K}^* v) \ \ \forall u, v \in C([a, b]) .$$

Тепер

$$(\psi_1, \psi_2^*) = (\psi_1, \bar{\lambda}_2 \mathcal{K}^* \psi_2^*) = \lambda_2 (\mathcal{K}\psi_1, \psi_2^*) = \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(\psi_1, \psi_2^*) \ <=>$$
$$(\psi_1, \psi_2^*)\Big(1 - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big) = 0 \ <=> \ (\psi_1, \psi_2^*) = 0 .$$

Лема 6. *Якщо* λ_k *– характеристичне число ядра* $K(x, y)$, *то* λ_k^m *– характеристичне число повторного ядра* $K_m(x, y)$, *і навпаки, якщо* μ *– характеристичне число повторного ядра* $K_m(x, y)$, *то хоч один із коренів* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *рівняння* $\lambda^m = \mu$ *є характеристичним числом ядра* $K(x, y)$.

Доведення. Перше твердження було одержано $\psi_k = \lambda_k \mathcal{K} \psi_k = \lambda_k^m \mathcal{K}^m \psi_k$ (метод послідовних наближень). Доведемо обернене

$$\mu \mathcal{K}^m \psi = \psi \ <=> (\lambda^m \mathcal{K}^m - I)\psi = 0 \ <=>$$
$$(\lambda_1 \mathcal{K} - I)(\lambda_2 \mathcal{K} - I) \ldots (\lambda_m \mathcal{K} - I)\psi = 0 .$$

Якщо функція $v_1 = (\lambda_2 \mathcal{K} - I) \ldots (\lambda_m \mathcal{K} - I)\psi \neq 0$, то з попередньої рівності $(\lambda_1 \mathcal{K} - I)v_1 = 0$, тобто λ_1 – характеристичне число ядра $K(x, y)$.

Якщо $v_1 = 0$, але $v_2 = (\lambda_3 \mathcal{K} - I) \ldots (\lambda_m \mathcal{K} - I)\psi \neq 0$, то матимемо $(\lambda_2 \mathcal{K} - I)v_2 = 0$, тобто λ_2 – характеристичне число ядра $K(x, y)$ і т.д.

Вправи

Знайти характеристичні числа та відповідні їм власні функції ядра:

1) $u(x) = \lambda \int\limits_1^2 xyu(y)dy$;

2) $u(x) = \lambda \int\limits_1^3 (x+y)u(y)dy$;

3) $u(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xy + x^2y^2)u(y)dy$;

4) $u(x) = \lambda \int\limits_0^1 (3x-2)u(y)dy$.

6. Розглянемо метод середнього значення інтеграла (див., наприклад, [18,19]) при побудові розв'язку задачі для інтегро-диференціального рівняння

$$u^{(m)} + a_1(x)u^{(m-1)} + \cdots + a_m(x)u = g(x) + \int\limits_a^b K(x,t)F\big(u(t), u'(t), \ldots, u^{(m)}(t)\big)dt,$$

$x \in [a,b]$ з неперервним ядром $K(x,t)$ при заданих початкових або крайових умовах (їх є m) на прикладі задачі Коші

$$u'' = -2 + e^x + \int\limits_{-1}^{1} e^{-4t}u^2(t)(u'(t))^2 dt, \;\; u(0) = 1, \; u'(0) = 1.$$

За цим методом задача зводиться до розв'язування задачі для диференціального рівняння і системи алгебричних рівнянь.

За теоремою про середнє для інтеграла з неперервною підінтегральною функцією існує таке $\xi \in [a,b]$, що

$$\int\limits_a^b K(x,t)F\big(u(t), u'(t), \ldots, u^{(m)}(t)\big)dt =$$

$$= (b-a)K(x,\xi)F\big(u(\xi), u'(\xi), \ldots, u^{(m)}(\xi)\big),$$

тобто для нашого прикладу

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{-4t}u^2(t)(u'(t))^2 dt = 2e^{-4\xi}u^2(\xi)(u'(\xi))^2. \tag{1.16}$$

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння

$$u'' = -2 + e^x + 2e^{-4\xi}u^2(\xi)(u'(\xi))^2, \;\; u(0) = 1, \; u'(0) = 1. \tag{1.17}$$

Розв'язуємо диференціальне рівняння з параметрами $\xi, A = u(\xi), B = u'(\xi)$

$$u'(x) = -2x + e^x + 2xe^{-4\xi}A^2B^2 + C_1\,,$$
$$u(x) = -x^2 + e^x + x^2e^{-4\xi}A^2B^2 + C_1x + C_2\,.$$

Враховуючи початкові умови, матимемо розв'язок задачі (1.17)

$$u(x) = -x^2 + e^x + x^2e^{-4\xi}A^2B^2, \tag{1.18}$$

зокрема,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= -\xi^2 + e^\xi + \xi^2e^{-4\xi}A^2B^2, \\ u'(\xi) &= -2\xi + e^\xi + 2\xi e^{-4\xi}A^2B^2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

а (1.16) набуває вигляду

$$\begin{gathered} \int\limits_{-1}^{1} e^{-4t}\big(-t^2 + e^t + t^2e^{-4\xi}A^2B^2\big)^2\big(-2t + e^t + 2te^{-4\xi}A^2B^2\big)^2dt = \\ = 2e^{-4\xi}A^2B^2. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Ми одержали алгебричну систему трьох рівнянь ((1.19) і (1.20)) щодо невідомих чисел ξ, A, B

$$\begin{gathered} A = -\xi^2 + e^\xi + \xi^2e^{-4\xi}A^2B^2, \\ B = -2\xi + e^\xi + 2\xi e^{-4\xi}A^2B^2, \\ \int\limits_{-1}^{1} e^{-4t}\big(-t^2 + e^t + t^2e^{-4\xi}A^2B^2\big)^2\big(-2t + e^t + 2te^{-4\xi}A^2B^2\big)^2dt = \\ = 2e^{-4\xi}A^2B^2. \end{gathered}$$

Бачимо, що ця система має розв'язок $\xi = 0, A = B = 1$. Тепер (1.18) дає розв'язок задачі $u(x) = -x^2 + e^x + x^2e^0 \cdot 1 \cdot 1$, тобто $u(x) = e^x$.

1.4 Лінійні інтегральні рівняння з ермітовими неперервними ядрами

Розглядаємо рівняння

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{1.21}$$

Ядро $K(x,y)$ називається ермітовим, якщо воно збігається зі спряженим, тобто $\overline{K(y,x)} = K(x,y)$, а в дійсній області $K(y,x) = K(x,y)$. Наприклад, ермітовими є ядра $K(x,y) = xy^2 + x^2y$, $K(x,y) = |x-y|$.

Спряженим до оператора $\mathcal{K}$ є такий оператор $\mathcal{K}^*$, що

$\int\limits_a^b (\mathcal{K}u)(x)\bar{v}(x)dx = \int\limits_a^b u(y)\overline{\mathcal{K}^*v}(y)dy \;\; \forall u, v \in C([a,b]) \cup L_2(a,b)$,

де $(\mathcal{K}v)(x) = \int\limits_a^b K(x,y)v(y)dy$,

Оператор $\mathcal{K}$ називається ермітовим, якщо

$$(\mathcal{K}u, v) = (u, \mathcal{K}v) \;\; \forall u, v \in C([a,b]) <=>$$

$\int\limits_a^b (\int\limits_a^b K(y,z)u(z)dz)v(y)dy = \int\limits_a^b u(z)(\int\limits_a^b \overline{K(z,y)}v(y)dy)dz$,

$\int\limits_a^b u(z)(\int\limits_a^b K(y,z)v(y)dy)dz = \int\limits_a^b u(z)(\int\limits_a^b \overline{K(z,y)}v(y)dy)dz$,

і тоді $(\mathcal{K}^*v)(x) = \int\limits_a^b \overline{K(y,x)}v(y)dy$, а $(\mathcal{K}v)(x) = (\mathcal{K}^*v)(x) \;<=>$

$\int\limits_a^b K(x,y)v(y)dy = \int\limits_a^b \overline{K(y,x)}v(y)dy \;\; \forall u, v \in C([a,b]) \cup L_2(a,b).$

Бачимо, що оператор $\mathcal{K}$ є ермітовим тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{K(x,y)} = K(y,x),$$

тобто ядро є ермітовим.

Властивості ермітового оператора

Наслідки лем 5 і 6.

1. Всі повторні ядра ермітового оператора ермітові.

2. Власні функції ψ_1, ψ_2 для різних характеристичних значень $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ортогональні, тобто $(\psi_1, \psi_2) := \int\limits_a^b \psi_1\bar{\psi}_2 dy = 0$.

Теорема 3. *Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$, відмінне від тривіального (тотожно рівного нулю), має характеристичне число і найменше з характеристичних чисел за модулем (λ_1) задовольняє варіаційний принцип*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{u \in L_2(a,b)} \frac{||\mathcal{K}u||}{||u||}.$$

З теореми 3 випливає, що $||\mathcal{K}u|| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}||u||$.

Нехай ψ_k – власні функції ядра. Для довільної $f \in L_2(a,b)$ маємо (збіжний в $L_2(a,b)$) ряд Фур'є за ортонормованою системою ψ_k ($k = 1, 2, \dots$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \bar{\psi}_k(x),$$

де $c_k = (f, \psi_k)$ – коефіцієнти Фур'є функції f .

Запишемо коефіцієнти Фур'є ядра $\overline{K(x,y)}$

$$\int_a^b \overline{K(x,y)} \psi_k(y) dy = (\overline{\mathcal{K}\psi_k})(x) = \frac{1}{\lambda_k} \psi_k(x).$$

Тоді для ермітового ядра $K(x,y) = \overline{K(y,x)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\bar{\psi}_k(y)}{\lambda_k}$,
а для повторних ядер $K_p(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\bar{\psi}_k(y)}{\lambda_k^p}$.

Вироджене ядро має скінченну кількість характеристичних чисел. Для ермітового ядра правильне і обернене твердження: *якщо воно має скінченну кількість характеристичних чисел, то є виродженим.*

Примітка. Якщо $f \in L_2(a,b)$, $c_k = (f, \psi_k) = \int\limits_a^b f(x) \overline{\psi}_k(x) dx$, то

$$\begin{aligned} 0 \le (f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k, f(x) - \sum_{p=1}^{N} c_p \psi_p) = \\ = (f,f) - \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{(f, \psi_k)} - \sum_{p=1}^{N} \bar{c}_p (f, \psi_p) + \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = \\ = (f,f) - 2\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = (f,f) - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \ \ <=> \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le (f,f) = ||f||^2_{L_2(a,b)}.$$

Для повної ортонормованої системи власних функцій $\psi_k(x)$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) маємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = ||f||^2_{L_2(a,b)}$.

Теорема 4 (Гільберта-Шмідта). *Якщо*

$$f(x) = (\mathcal{K}h)(x) = \int_a^b K(x,y) h(y) dy$$

із неперервним ермітовим ядром $K(x,y)$, $h \in L_2(a,b)$, *то ряд Фур'є для* $f(x)$ *збігається рівномірно на* $[a,b]$ *і*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f,\psi_k)\psi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h,\psi_k)}{\lambda_k}\psi_k(x).$$

Доведення. $(f,\psi_k) = (\mathcal{K}h,\psi_k) = (h,\mathcal{K}\psi_k) = \frac{(h,\psi_k)}{\lambda_k}$. Згідно з приміткою

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(g,\psi_k)|^2 \le ||g||^2_{L_2(a,b)} \ \ \forall g \in L_2(a,b).$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\sum_{k=1}^{p}|(h,\psi_k)|\frac{|\psi_k|}{|\lambda_k|} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p}|(h,\psi_k)|^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{p}[\frac{|\psi_k|}{|\lambda_k|}]^2} \le$$
$$\le \sqrt{\int_a^b h^2(y)dy}\,\sqrt{\int_a^b |K(x,y)|^2 dy} \le ||h||_{L_2(a,b)}M\sqrt{b-a}\,.$$

Теорема 5. *Єдиний розв'язок рівняння (1.21) з неперервним ермітовим ядром при* $\lambda \neq \lambda_j$ *можна шукати за формулою Шмідта*

$$u(x) = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\psi_k)}{\lambda_k-\lambda}\psi_k(x) + f(x), \tag{1.22}$$

ряд збігається рівномірно.

Доведення. За теоремою Гільберта-Шмідта

$$u = \lambda\mathcal{K}u + f = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u,\psi_k)}{\lambda_k}\psi_k + f. \tag{1.23}$$

Із рівняння (1.21)

$$(u,\psi_k) = \lambda(\mathcal{K}u,\psi_k) + (f,\psi_k) = \lambda(u,\mathcal{K}\psi_k) + (f,\psi_k)\,,$$
$$<=> \ (u,\psi_k) = \frac{\lambda}{\lambda_k}(u,\psi_k) + (f,\psi_k)\,,$$

звідки

$$(u,\psi_k)(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}) = (f,\psi_k) \ <=> (u,\psi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}(f,\psi_k)\,.$$

Підставляємо в (1.23) і одержуємо (1.22). Рівномірна збіжність ряду випливає з теореми 4.

Зауважимо, що при $\lambda = \lambda_j$ за третьою теоремою Фредгольма $(f, \psi_j) = 0$ і формула Шмідта набуває вигляду

$$u(x) = \lambda_j \sum_{k=1, \lambda_k \neq \lambda_j}^{\infty} \frac{(f, \psi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \psi_k(x) + f(x) + \sum_{s=0}^{r-1} c_s \psi_{j+s}(x),$$

де $\psi_{j+s}(x)$ – власні функції для характеристичного числа λ_j кратності s, c_j – довільні сталі.

Можна довести, що $R(x, y, \lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\bar{\psi}_k(y)}{\lambda_k - \lambda}$.

Оператор $\mathcal{K}$ (ядро $K(x, y)$) називається *додатно визначеним*, якщо

$$(\mathcal{K}v, v) \geq 0 \ \ \forall v \in L_2(a, b).$$

Якщо ядро $K(x, y)$ *додатно визначене, то воно ермітове, тобто* $(\mathcal{K}u, v) = (u, \mathcal{K}v)$ *для всіх* $u, v \in L_2(a, b)$ ([4], с. 41). Навпаки не обов'язково.

Теорема 6. *Для того, щоб ермітове неперервне ядро було додатно визначеним, необхідно і достатньо, щоб усі його характеристичні числа були додатні.*

Доведення. При $v, w \in L_2(a, b)$ розглянемо

$$(\mathcal{K}v, w) = \int\limits_{\Omega} (\mathcal{K}v)\bar{w}dx = \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(v,\psi_k)}{\lambda_k} \psi_k \Big] \bar{w}dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(v,\psi_k)}{\lambda_k} \int\limits_{\Omega} \psi_k \bar{w}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(v,\psi_k)\overline{(w,\psi_k)}}{\lambda_k}.$$

Ми одержали, що $(\mathcal{K}v, w) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(v,\psi_k)\overline{(w,\psi_k)}}{\lambda_k}$ при $v, w \in L_2(a, b)$, а тоді

$$(\mathcal{K}v, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{|(v,\psi_k)|^2}{\lambda_k} \geq 0, \text{ зокрема } (\mathcal{K}\psi_j, \psi_j) = \tfrac{1}{\lambda_j} \geq 0,$$

звідки $\lambda_j > 0$ і можна довести, що $\frac{1}{\lambda_1} = \sup\limits_{v \in L_2(a,b)} \frac{(\mathcal{K}v,v)}{||v||^2}$.

Метод Келлога. Нехай $K(x, y)$ – симетричне (дійснозначне ермітове) неперервне ядро, $\omega(x)$ – довільна фунція з $L_2(a, b)$, $\omega(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, $\omega_1(x) = \int\limits_a^b K(x, y)\omega(y)dy$, $\omega_n(x) = \int\limits_a^b K(x, y)\omega_{n-1}(y)dy$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{||\omega_n(x)||_{L_2(a,b)}^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{||\omega_{n-1}(x)||_{L_2(a,b)}}{||\omega_n(x)||_{L_2(a,b)}}, \ \ \psi_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n(x)}{||\omega_n(x)||_{L_2(a,b)}}.$$

1.5 Лінійні інтегральні рівняння Фредгольма з полярними ядрами

Лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy + f(x), \ \ x \in \Omega,$$

де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, має *полярне ядро*, якщо $K(x,y) = \frac{k(x,y)}{|x-y|^{\gamma}}$ при неперервній $k(x,y)$ і $0 < \gamma < n$ (тоді $|K(x,y)| \le \frac{A}{|x-y|^{\gamma}}$), має *слабо полярне ядро*, якщо $0 < \gamma < \frac{n}{2}$.

Розглянемо інтегральний оператор

$$\mathcal{K}: \ (\mathcal{K}u)(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ u \in C(\bar{\Omega}).$$

Лема 7. *Лінійний інтегральний оператор з полярним ядром є неперервним із* $C(\bar{\Omega})$ *в* $C(\bar{\Omega})$, *із* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$ *і обмеженим:*

$$||(\mathcal{K}u)||_{C(\bar{\Omega})} \le N||u||_{C(\bar{\Omega})}, \ \ ||(\mathcal{K}u)||_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{NN^*}||u||_{L_2(\Omega)},$$

де $N = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|dy$, $N^* = \max\limits_{y\in\bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|dx$.

Доведення. Якщо $u \in C(\bar{\Omega})$, то

$$|(\mathcal{K}u)(x)| = |\int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy| \le$$

$$\le \max_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|dy\, ||u||_{C(\bar{\Omega})} \le A \int\limits_{\Omega} |x-y|^{-\gamma}\, dy||u||_{C(\bar{\Omega})} = N\, ||u||_{C(\bar{\Omega})}.$$

Якщо $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$, то

$$|(\mathcal{K}u_1)(x) - (\mathcal{K}u_2)(x)| = |\int\limits_{\Omega} K(x,y)[u_1(y) - u_2(y)]dy| \le$$

$$\le \max_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|dy\, ||u_1 - u_2||_{C(\bar{\Omega})} = N||u_1 - u_2||_{C(\bar{\Omega})}.$$

Позаяк $u \in L_2(\Omega)$, то

$$||(\mathcal{K}u)||^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |(\mathcal{K}u)(x)|^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |\int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy|^2 dx = \int\limits_{\Omega} [\int\limits_{\Omega} \sqrt{|K(x,y)|}\, \sqrt{|K(x,y)|}\, |u(y)|dy]^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{\Omega} |K(x,y')|dy' \ \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|\, |u(y)|^2 dy \right] dx \le$$

$$\le N \int\limits_{\Omega} |u(y)|^2 [\int\limits_{\Omega} |K(x,y)|dx]dy \le NN^*||u||^2_{L_2(\Omega)},$$

а при $u_1, u_2 \in L_2(\Omega)$ аналогічно

$$||(\mathcal{K}u_1)-(\mathcal{K}u_2)||^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega |\big(\mathcal{K}(u_1-u_2)\big)(x)|^2dx \le NN^*||u_1-u_2||^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Лема 8. *Лінійний інтегральний оператор зі слабо полярним ядром є неперервним із* $L_2(\Omega)$ *в* $C(\bar\Omega)$ *і обмеженим*

$$||\mathcal{K}u||_{C(\bar\Omega)} \le L||u||_{L_2(\Omega)}\,,\ \textit{де}\ L=\max_{x\in\bar\Omega}\sqrt{\int\limits_\Omega |K(x,y)|^2dy}\,.$$

Доведення. При $u\in L_2(\Omega)$ маємо

$$||\mathcal{K}u||_{C(\bar\Omega)}=\max_{x\in\bar\Omega}|(\mathcal{K}u)(x)|=\max_{x\in\bar\Omega}|\int\limits_\Omega K(x,y)u(y)dy| \le$$

$$\le \max_{x\in\bar\Omega}\sqrt{\int\limits_\Omega |K(x,y)|^2dy}\ \sqrt{\int\limits_\Omega |u(y)|^2dy}=L||u||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Лема 9. *Якщо ядро оператора* $\mathcal{K}$ *полярне і неперервне в цілому (в окремих випадках це можна довести), то він переводить всяку обмежену множину в* $C(\bar\Omega)$ *у множину, обмежену і одностайно неперервну в* $C(\bar\Omega)$.

Доведення. Нехай U – обмежена множина в $C(\bar\Omega)$. Якщо $u\in U$, то $||u||_{C(\bar\Omega)}\le A_1$, а за лемою 7

$$||\mathcal{K}u||_{C(\bar\Omega)}\le N||u||_{C(\bar\Omega)}\le NA_1\,,$$

так що множина $\mathcal{K}U$ обмежена в $C(\bar\Omega)$. Доведемо, що вона одностайно неперервна в $C(\bar\Omega)$, тобто

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ :\forall x_1,x_2\in\bar\Omega, |x_1-x_2|<\delta,\forall u\in U$$
$$|(\mathcal{K}u)(x_1)-(\mathcal{K}u)(x_2)|<\varepsilon\,.$$

За неперервністю в цілому ядра маємо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ :\forall x_1,x_2,y\in\bar\Omega, |x_1-x_2|<\delta$$
$$\int\limits_\Omega |K(x_1,y)-K(x_2,y)|dy\le\tfrac{\varepsilon}{A_1}\,.$$

Тоді

$$|(\mathcal{K}u)(x_1)-(\mathcal{K}u)(x_2)|=|\int\limits_\Omega[K(x_1,y)-K(x_2,y)]u(y)dy|\le$$

$$\le\max_{x_1,x_2\in\bar\Omega}\int\limits_\Omega|K(x_1,y)-K(x_2,y)|dy\ ||u||_{C(\bar\Omega)}\le\tfrac{\varepsilon}{A_1}A_1=\varepsilon\,.$$

Лема Арцела-Асколі правильна і для Ω: якщо U – обмежена множина функцій із $C(\bar\Omega)$ і одностайно неперервна в $C(\bar\Omega)$, то з неї можна вибрати збіжну в $C(\bar\Omega)$ послідовність (тобто множина U компактна).

Нагадаємо, що оператор називається *компактним*, якщо він переводить всяку обмежену множину в компактну. За лемою 9 і лемою Арцела-Асколі *інтегральний оператор з полярним і цілком неперервним ядром є компактним* із $C(\bar\Omega)$ в $C(\bar\Omega)$, а за лемою 8 він неперервний. Оператор називається *цілком неперервним*, якщо він компактний і неперервний. Отож за умов леми 9 *лінійний інтегральний оператор $\mathcal{K}$ з полярним ядром цілком неперервний в $C(\bar\Omega)$*. Також правильна така лема.

Лема 10. *Якщо $\int\limits_\Omega [\int\limits_\Omega |K(x,y)|^2 dy]dx = L_1^2 < +\infty$, то оператор $\mathcal{K}$ є цілком неперервним із $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.*

Зауважимо, що умова леми 10 виконується для слабо полярного ядра.

За *методом послідовних наближень* вибираємо

$u_0(x) = f(x)$, $u_m(x) = \lambda(\mathcal{K}u_{m-1})(x) + f(x)$, $m = 1, 2, \ldots$

Одержуємо

$$u_m(x) = f(x) + \lambda \int\limits_\Omega \big(\sum_{k=0}^{m} \lambda^k K_{k+1}(x,y) \big) f(y) dy,$$

де $K_1(x,y) = K(x,y)$, $K_m(x,y) = \int\limits_\Omega K(x,z) K_{m-1}(z,y) dz$, $m = 2, 3, \ldots$

$K_m(x,y)$ називаються *ітерованими (повторними) ядрами*.

Вивчимо характер їхніх особливостей при $x = y$.

Лема 11. *Нехай* $J(x,y) = \int\limits_\Omega |x-z|^{-\gamma} |z-y|^{-\beta} dz$, $\gamma, \beta \in (0,n)$. *Тоді*

$|J(x,y)| \le C|x-y|^{n-\gamma-\beta}$ *при* $n - \gamma - \beta \ne 0$,

$|J(x,y)| \le C ln|x-y| + \widehat{C}$ *при* $n - \gamma - \beta = 0$.

Доведення. Нехай

$J(x,y) = J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y)$, де

$J_1(x,y) = \int\limits_{z\in\Omega: |x-z| < \frac12 |x-y|} |x-z|^{-\gamma} |z-y|^{-\beta} dz$,

$J_2(x,y) = \int\limits_{z\in\Omega: |y-z| < \frac12 |x-y|} |x-z|^{-\gamma} |z-y|^{-\beta} dz$,

$J_3(x,y) = \int\limits_{z\in\Omega: |x-z| > \frac12 |x-y|, |y-z| > \frac12 |x-y|} |x-z|^{-\gamma} |z-y|^{-\beta} dz$.

При $|x-z| < \frac12 |x-y|$ маємо

$|y-z| = |x-z+y-x| \ge |y-x| - |x-z| \ge |y-x| - \frac12 |x-y| = \frac12 |x-y|$,

а отже,

$\frac12 |x-y| \le |y-z| \le \frac32 |x-y|$,

$|J_1(x,y)| \le 2^{-\beta} \int\limits_{z\in\Omega: |x-z| < \frac12 |x-y|} |x-z|^{-\gamma} dz \; |x-y|^{-\beta} \le$

$$\leq C_0|x-y|^{-\beta}\int\limits_0^{|x-y|} r^{n-1}r^{-\gamma}dr \leq C_1|x-y|^{n-\gamma-\beta}\,.$$

При $|y-z| < \frac{1}{2}|x-y|$ маємо

$$|x-z| = |x-y+y-z| \geq |x-y| - |y-z| \geq |y-x| - \tfrac{1}{2}|x-y| = \tfrac{1}{2}|x-y|\,,$$

а отже,

$$\tfrac{1}{2}|x-y| \leq |x-z| \leq \tfrac{3}{2}|x-y|\,,$$

$$|J_2(x,y)| \leq 2^{-\gamma}\int\limits_{z\in\Omega:|y-z|<\frac{1}{2}|x-y|} |y-z|^{-\beta}dz\;|x-y|^{-\gamma} \leq$$

$$\leq C_1|x-y|^{-\gamma}\int\limits_0^{|x-y|} r^{n-1}r^{-\beta}dr \leq C_2|x-y|^{n-\gamma-\beta}\,.$$

Отримали грубу оцінку

$$|J_3(x,y)| \leq 2^{-\gamma-\beta}\int\limits_{z\in\Omega:|x-z|>\frac{1}{2}|x-y|,|y-z|>\frac{1}{2}|x-y|} |x-y|^{-\beta-\gamma}dz =$$

$$= |x-y|^{-\beta-\gamma}\int\limits_{|x-y|}^{D} r^{n-1}dr\,,$$

але зробимо точніше. Для цього робимо заміну

$$z-x = r\xi\,,\ x-y = rs\,,\ \text{де}\ r = |x-y|\,,\ |s| = 1\,.$$

Тоді

$$dz = r^n d\xi\,,\ |z-y| \geq \tfrac{1}{2}|x-y| = \tfrac{r}{2}\,,$$

$$|J_3(x,y)| \leq C_3 r^{n-\alpha-\beta}\int\limits_\Omega |\xi|^{-\beta}d\xi \leq C_4 r^{n-\alpha-\beta} = C_4|x-y|^{n-\gamma-\beta}$$

при $n-\gamma-\beta \neq 0$,

$$|J_3(x,y)| \leq C_4\int\limits_{|x-y|}^{D} r^{-1}dr \leq C_5 ln|x-y| + C_6\,,\ \text{якщо}\ \gamma+\beta = n\,.$$

Лема доведена.

Наслідок. *Всі повторні ядра $K_m(x,y)$ полярного ядра є полярними і задовольняють оцінку*

$$|K_m(x,y)| \leq A_m|x-y|^{-m\gamma+(m-1)n}\,,\ \textit{якщо}\ (m-1)n - m\gamma < 0\,,$$

$$|K_m(x,y)| \leq A_m ln|x-y| + B_m\,,\ \textit{якщо}\ -m\gamma+(m-1)n = 0\,,$$

неперервні при $m \geq m_0 = [\frac{n}{n-\gamma}] + 1$.

Доведення. Для оцінки $|K_m(x,y)|$ треба у твердженні леми 11 замінити $n-\beta$ на $(m-1)(n-\beta)$.

За лемою 11 і наслідком резольвента полярного ядра

$$R(x,y,\lambda) = R_1(x,y,\lambda) + R_2(x,y,\lambda) =$$
$$\sum_{m=0}^{m_0-1} \lambda^m K_{m+1}(x,y) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x,y)$$

є скінченною сумою доданків з полярними ядрами та рядом із неперервними обмеженими ядрами, збіжним при $|\lambda| < \frac{1}{N}$. Отож твердження теореми 1 правильне і для інтегрального рівняння з полярним ядром.

Теореми Фредгольма

Лема 12. *Для довільного $\varepsilon > 0$ і полярного ядра $K(x,y)$ існує таке вироджене ядро $P(x,y)$, що*

$$\max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega |K(x,y) - P(x,y)| dy < \varepsilon\,, \ \max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega |K^*(x,y) - P^*(x,y)| dy < \varepsilon\,.$$

Доведення. Нехай

$$S(x,y) = K(x,y) \text{ при } |x-y| \geq \tfrac{1}{N}\,,$$
$$S(x,y) = K(x,y)|x-y|^\gamma \text{ при } |x-y| < \tfrac{1}{N}\,,$$

де N – додатне число. Тоді $S(x,y)$ – неперервна функція (погашена особливість при $|x-y| \leq \frac{1}{N}$),

$$\int_\Omega |K(x,y) - S(x,y)| dy = \int_{y\in\Omega:\, |x-y|<\frac{1}{N}} |K(x,y) - S(x,y)| dy =$$
$$= \int_{y\in\Omega:\, |x-y|<\frac{1}{N}} \tfrac{|k(x,y)|}{|x-y|^\gamma}[1 - |x-y|^\gamma] dy \leq A \int_{y\in\Omega:\, |x-y|<\frac{1}{N}} \tfrac{dy}{|x-y|^\gamma} =$$
$$= AC \int_{z\in\Omega:\, |z|<\frac{1}{N}} \tfrac{dy}{|z|^\gamma} = AC\sigma_n \int_0^{1/N} r^{n-1-\gamma} dr = \tfrac{AC\sigma_n}{N^{n-\gamma}} < \tfrac{\varepsilon}{2}\,, \ x \in \Omega$$

за достатньо великого N (тут A, C – додатні сталі, σ_n – площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$). Так само доведемо, що

$$\int_\Omega |K^*(x,y) - S^*(x,y)| dy < \tfrac{\varepsilon}{2}\,, \ x \in \Omega\,.$$

За теоремою Вейєрштрасса неперервну функцію в обмеженій області можна наблизити поліномом $P(x,y) = \sum\limits_{k+l=0}^{m} a_{k,l} x^k y^l$.

Отже, для неперервного ядра $S(x,y)$ існує вироджене ядро $P(x,y)$ таке, що

$$\int_\Omega |S(x,y) - P(x,y)| dy < \tfrac{\varepsilon}{2}\,, \ x, y \in \Omega\,.$$

Нехай $Q(x,y) = K(x,y) - P(x,y)$. Тоді

$$\max_{x\in\bar\Omega}\int\limits_\Omega |Q(x,y)|dy \le \max_{x\in\bar\Omega}\int\limits_\Omega |K(x,y)-S(x,y)|dy +$$
$$+\max_{x\in\bar\Omega}\int\limits_\Omega |S(x,y)-P(x,y)|dy < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Далі, як у випадку неперервного ядра, розглядаємо рівняння

$$u-\lambda\mathcal{Q}u=v.$$

За доведеним, при $|\lambda|<\frac{1}{AM\varepsilon}$ однозначно визначено його розв'язок

$$u=(I-\lambda\mathcal{Q})^{-1}v=(I+\lambda\mathcal{R})v$$

($\mathcal{R}$ – інтегральний оператор, ядром якого є резольвента $R(x,y,\lambda)$ ядра $Q(x,y)$). Рівняння

$$u=\lambda\mathcal{P}u+\lambda\mathcal{Q}u+f$$

стає таким:

$$v=\lambda\mathcal{P}(I+\lambda\mathcal{R})v+f \;\;<=>$$
$$v=\lambda\mathcal{T}v+f,$$

де $\mathcal{T}=\mathcal{P}(I+\lambda\mathcal{R})=\mathcal{P}+\lambda\mathcal{P}\mathcal{R}$,

$$(\mathcal{P}\mathcal{R}v)(x)=\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega P(x,z)R(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega\sum_{k+l=0}^{m}a_{k,l}x^kz^lR(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy=$$
$$=\int\limits_\Omega\sum_{k+l=0}^{m}a_{k,l}x^k\Big(\int\limits_\Omega z^lR(z,y,\lambda)dz\Big)v(y)dy=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{k+l=0}^{m}a_{k,l}x^kB_l(y)\Big)v(y)dy\,.$$

Отже, оператор $\mathcal{T}$ має вироджене неперервне ядро $\sum\limits_{k+l=0}^{m}a_{k,l}x^kB_l(y)$.

Ми звели лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з полярним ядром до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з неперервним виродженим ядром.

Спряжене рівняння так само зводимо до рівняння

$$w=\bar\lambda\mathcal{T}^*w+g.$$

Для таких рівнянь були доведені теореми Фредгольма. З них одержуємо відповідні теореми для інтегральних рівнянь із полярними ядрами.

- *Якщо лінійне інтегральне рівняння з полярним ядром розв'язне у* $C(\bar{\Omega})$ *для довільної* $f \in C(\bar{\Omega})$, *то спряжене рівняння розв'язне у* $C(\overline{\Omega})$ *для довільної* $f \in C(\bar{\Omega})$. *Розв'язки визначаються однозначно (перша теорема Фредгольма).*

Як наслідок, відповідні лінійні однорідні рівняння мають тільки тривіальні розв'язки.

- *Якщо лінійне інтегральне рівняння з полярним ядром розв'язне у* $C(\bar{\Omega})$ *не для довільної* $f \in C(\bar{\Omega})$, *то:*

1) *відповідні лінійні однорідні рівняння мають однакову (скінченну) кількість лінійно незалежних розв'язків (друга теорема Фредгольма);*

2) *для розв'язності лінійного інтегрального рівняння з полярним ядром необхідно і достатньо, щоб функція* f *була ортогональною до будь-якого розв'язку спряженого однорідного рівняння (третя теорема Фредгольма).*

- *У кожному крузі* $|\lambda| \leq N$ $(N \in \mathbb{N})$ *є лише скінченна кількість характеристичних чисел полярного ядра* $K(x, y)$ *(четверта теорема Фредгольма).*

Наслідок. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_p| \leq \ldots$

Всі властивості неперервних ермітових ядер зберігаються для полярних ермітових ядер з уточненням збіжності (не завжди рівномірна, а іноді в L_2).

1.6 Лінійні інтегральні рівняння в L_2

Розглядаємо рівняння

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [a, b] \tag{1.24}$$

у просторі $L_2(a, b)$, вважаючи, що його ядро квадратично інтегровне, тобто задовольняє умову

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy = B^2 < +\infty, \tag{1.25}$$

з якої за теоремою Фубіні випливає існування інтегралів

$$\int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dx \ \ \forall y \in (a,b), \qquad \int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy \ \ \forall x \in (a,b).$$

Зауважимо, що з умови

$$\int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy \le A < +\infty, \quad x \in [a,b] \tag{1.26}$$

у випадку скінченних a, b випливає оцінка (1.25). Якщо у рівнянні a або b необмежені, то це загалом неправильно.

Приклад. Для рівняння

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy + f(x)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y)|^2 dx dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} dy\,,$$

однак внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} dy = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-2(x-y)} dy + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{2(x-y)} dy = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

і не є інтегровним на $\mathbb{R}$ – тут з умови (1.26) умова (1.25) не випливає.

Вважаємо $f \in L_2(a,b)$ $\left(\int\limits_a^b |f(y)|^2 dy < \infty\right)$ і шукаємо розв'язок рівняння $u \in L_2(a,b)$.

Лема 13. *Лінійний інтегральний оператор з ядром, що задовольняє умову (1.25), є неперервним із* $L_2(a,b)$ *в* $L_2(a,b)$ *і обмеженим*

$$||\mathcal{K}u||_{L_2(a,b)} \le B ||u||_{L_2(a,b)}.$$

Доведення. При $u \in L_2(a,b)$ функція від $y \in (a,b)$

$$|K(x,y)u(y)| \le \tfrac{1}{2}|K(x,y)|^2 + \tfrac{1}{2}|u(y)|^2$$

належить $L_2(a,b)$ для майже всіх $x \in (a,b)$, а за нерівністю Буняковського

$$|(\mathcal{K}u)(x)|^2 = |\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy|^2 \le$$

$$\int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy \int\limits_a^b |u(y)|^2 dy = \int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy \, ||u||^2_{L_2(a,b)}\,.$$

Тоді $||\mathcal{K}u||_{L_2(a,b)} = \sqrt{\int\limits_a^b |(\mathcal{K}u)(x)|^2 dx} \le$

$$\le \sqrt{\int\limits_a^b (\int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy) dx}\ ||u||_{L_2(a,b)} = B||u||_{L_2(a,b)}\,.$$

Якщо ядро $K(x,y)$ задовольняє умову (1.25), а для деякого ядра $L(x,y)$

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |L(x,y)|^2 dxdy = C^2 < +\infty,$$

то, як при доведенні леми 13, одержуємо, що $LKu = L(Ku) \in L_2(a,b)$ і для ядра $M(x,y) = \int\limits_a^b L(x,z)K(z,y)dz$ правильна оцінка

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |M(x,y)|^2 dxdy \le B^2C^2\,.$$

Можна довести, що для $f \in L_2(a,b)$ і ітерованих ядер правильна оцінка

$$||\mathcal{K}_m f||_{L_2(a,b)} \le B^m ||f||_{L_2(a,b)} < +\infty,$$

звідки

$$|| \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{K}_m f||_{L_2(a,b)} \le \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m ||\mathcal{K}_m f||_{L_2(a,b)} \le$$
$$\le \sum_{m=0}^{\infty} (|\lambda| B)^m\ |f||_{L_2(a,b)} = \tfrac{1}{1-|\lambda|B}\ |f||_{L_2(a,b)},$$

і при $|\lambda| < \frac{1}{B}$ послідовні наближення u_m збігаються до деякої функції $u \in L_2(a,b)$: маємо $||u_m - u||_{L_2(a,b)} \to 0\,,\ m \to \infty\,.$

Легко довести, що u – розв'язок рівняння (1.24). Справді,

$$||\mathcal{K}u_m - \mathcal{K}u||_{L_2(a,b)} = ||\mathcal{K}(u_m - u)||_{L_2(a,b)} \le B||u_m - u||_{L_2(a,b)} \to 0,\ \ m \to \infty.$$

Єдиність розв'язку доводиться як у випадку неперервного ядра (див. наслідок 1). Припускаючи існування двох розв'язків $u_1, u_2 \in L_2(a,b)$ рівняння (1.24), одержуємо, що $u = u_1 - u_2$ є розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння. Тоді $||u||_{L_2(a,b)} = |\lambda|\ ||\mathcal{K}u||_{L_2(a,b)}$, а використовуючи лему 13, матимемо

$$||u||_{L_2(a,b)} \le |\lambda| B\ ||u||_{L_2(a,b)}.$$

Одержали $||u||_{L_2(a,b)} = 0$ при $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Наслідком міркувань є теорема.

Теорема 7. *При* $f \in L_2(a,b)$, *умові (1.25),* $|\lambda| < \frac{1}{B}$ *існує єдиний розв'язок* $u \in L_2(a,b)$ *інтегрального рівняння (1.24). У цьому випадку*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,y,\lambda) f(y) dy,$$

де

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x,y)$$

– резольвента ядра $K(x,y)$.

Застосовуючи метод послідовних наближень, одержують таку оцінку похибки:

$$|u(x) - u_k(x)| \le M|\lambda B|^k, \;\; M > 0.$$

Теорема 8. *Інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з квадратично інтегровним ядром при* $f \in L_2(a,b)$ *має єдиний розв'язок* $u \in L_2(a,b)$.

Для інтегрального рівняння Фредгольма з таким ядром правильні теореми Фредгольма, відповідне однорідне рівняння і спряжене йому мають загалом зліченну множину характеристичних значень, хоч для кожного з них однакову кількість лінійно незалежних власних функцій.

У застосуваннях важливо знати, коли такий розв'язок є неперервним.

Теорема 9. *Якщо* $f(x)$ *обмежена на* (a,b), *ядро задовольняє умову (1.26) і існує розв'язок рівняння (1.24) (за теоремою 7 це є у випадку скінченних* a, b*), то цей розв'язок обмежений на* (a,b).

Доведення. Маємо

$$|\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy| \le \sqrt{\int\limits_a^b |K(x,y)|^2 dy} \sqrt{\int\limits_a^b |u(y)|^2 dy},$$

а тому права частина в (1.24) обмежена.

Наслідок. *За умови (1.26) всі власні функції ядра обмежені.*

Теорема 10. *Якщо* $f \in C([a,b])$, *а ядро інтегрального рівняння неперервне в цілому, то при скінченних* a, b *розв'язок рівняння (1.24) неперервний на* (a,b).

Доведення. Якщо $f \in C([a,b])$, то вона обмежена. Тоді за теоремою 9 розв'язок рівняння обмежений на (a,b), а тоді

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |\int\limits_a^b [K(x_1,y) - K(x_2,y)]u(y)dy| \leq$$

$$\leq C\int\limits_a^b |K(x_1,y) - K(x_2,y)|dy \leq \varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

Наслідок. *Якщо ядро інтегрального рівняння неперервне в цілому, то всі його власні функції неперервні.*

Зауважимо таке: якщо ядро неперервне, то воно неперервне в цілому.

Теорема 11. *Якщо ядро задовольняє умову (1.26) і має розриви тільки в ізольованих точках або на скінченній кількості окремих неперервних кривих, то воно неперервне в цілому.*

Можна довести, що *за додаткової умови (1.26) і* $|\lambda| < \frac{1}{B}$ *ряд Неймана збігається рівномірно й абсолютно на* $[a,b]$ *, а тому при* $f \in C([a,b])$ *існує єдиний розв'язок* $u \in C([a,b])$ *інтегрального рівняння (1.24).*

Розглянемо операторне рівняння

$$u = \lambda\mathcal{K}u + f \tag{1.27}$$

в гільбертовому або банаховому просторі H. Якщо $f \in H$, оператор $\mathcal{K}$ цілком неперервний в H, то правильні теореми Фредгольма. Такі оператори ще називають фредгольмовими. Характерним для них є зліченна ізольована множина характеристичних значень. Для нефредгольмових операторів характеристичні значення можуть заповнювати певні інтервали чи області.

Зазначимо, що у випадку банахового простору H спряжене рівняння (і спряжений оператор) треба розглядати на просторі лінійних неперервних функціоналів на H. Для розв'язання інтегральних рівнянь із нефредгольмовими операторами можна також застосовувати метод ітерацій.

1.7 Чисельне розв'язання лінійних інтегральних рівнянь

Розглянемо лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b] \tag{1.28}$$

у просторі неперервних функцій.

Якщо ядро вироджене, то ми бачили, що розв'язання рівняння зводилось до розв'язання алгебричної системи рівнянь. Тут одержують точний розв'язок.

Серед методів побудови наближених розв'язків інтегральних рівнянь другого роду ми згадували:

1) метод послідовних наближень;

2) метод степеневих рядів, якщо ядро і права частина розкладаються у збіжні степеневі ряди;

3) метод *невизначених коефіцієнтів*, за яким шукаємо розв'язок цього рівняння чи рівняння першого роду у вигляді розвинення $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\omega_k(x)$ за деякою повною ортонормованою системою функцій $\omega_k(x)$ на (a,b) з невідомими a_k (підставляючи шуканий розв'язок у рівняння, наприклад, першого роду, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_a^b K(x,y)\omega_k(y)dy = f(x) \;\;<=>\;\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(x) = f(x)\,,$$

де $h_k(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\omega_k(y)dy$ – відомі функції);

4) метод наближення ядра виродженим, наприклад,

$$u(x) = x + \int\limits_0^1 \tfrac{u(t)}{2+x+t}dt\,,$$

$$\tfrac{1}{2+z} = \tfrac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{z}{2})^k, \;\; |z| < 2 =>$$

$$\tfrac{1}{2+x+t} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{x+t}{2})^k = \tfrac{1}{2}[1+\tfrac{x+t}{2}+\ldots];$$

замінимо ядро $\frac{1}{2+x+t}$ на $\frac{1}{2}[1+\frac{x+t}{2}]$ і знайдемо наближений розв'язок заданого рівняння як розв'язок рівняння

$$u(x) = x + \int\limits_0^1 \tfrac{1}{2}[1+\tfrac{x+t}{2}]u(t)dt$$

з виродженим ядром.

Наближені чисельні розв'язки одержимо, якщо використати чисельні методи обчислення інтегралів. Прийдемо до розв'язування систем алгебричних рівнянь.

Наближений чисельний розв'язок – це таблиця (x_k, u_k) ($x_k \in [a,b]$, u_k – наближене значення $u(x_k)$ розв'язку рівняння в точці x_k), $k = 1, \ldots, n$.

Використовуємо також відомі теореми про середнє для інтегралів:

1) $f \in C([a,b]) => \exists c \in (a,b): \int\limits_a^b f dt = f(c)(b-a)$;

2) $f, g \in C([a,b]), g$ не міняє знак на $[a,b]$ $=> \exists c \in (a,b)$:

$$\int\limits_a^b f\ g dt = f(c)\int\limits_a^b g dt.$$

Нехай ядро і права частина у рівнянні неперервні. Розбиваємо відрізок $[a,b]$ на рівні частини точками $y_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$. За значення середніх точок c_j можна при великому n брати ліві або праві кінці інтервалів (матимемо метод прямокутників наближеного обчислення інтегралів). Тоді у першому випадку

$$\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy = \sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} K(x,y)u(y)dy = h\sum_{j=0}^{n-1} K(x,y_j)u(y_j),$$

а рівняння (1.28) перейде у систему лінійних алгебричних рівнянь

$$u(x_i) = \lambda h \sum_{j=0}^{n-1} K(x_i, y_j)u(y_j) + f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

або, ввівши позначення

$$y_j \in [a,b],\ u(y_j) = v_j,\ f(x_i) = g_i,\ K(x_i, y_j) = k_{ij},\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

у систему

$$v_i = \lambda h \sum_{j=0}^{n-1} k_{ij} v_j + g_i,\quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

яка має єдиний розв'язок для довільних g_i, якщо визначник

$$D(\lambda, n, h) = det(E - \lambda h \mathcal{K}) \neq 0.$$

За формулами Крамера знаходимо

$$v_j = \frac{D_j(\lambda, n, h, g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(\lambda, n, h)},\ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

(g_i входять множниками), $\quad v_n = \lambda h \sum\limits_{j=0}^{n-1} k_{nj} v_j + g_n$. Тоді

$$u(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \frac{D_j(\lambda, n, h, g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(\lambda, n, h)} + g(y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

а переходячи до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$u(x) = \int\limits_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x).$$

Функція $R(x, y, \lambda)$ є *резольвентою* інтегрального рівняння (1.28).

Альтернатива Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь (ЛІР) одержана ним саме на підставі властивостей систем лінійних алгебричних рівнянь і означення інтеграла.

Другу теорему про середнє використовуємо, коли ядро інтегрального рівняння невід'ємне. Тоді в одержаній алгебричній системі замість k_{ij} матимемо $K_i = \int\limits_a^b K(x_i, y)dy$.

Метод квадратурних сум

За методом квадратурних сум записують

$$\int_a^b f(y)dy = \sum_{j=0}^{n} A_j f(y_j),$$

де A_j – коефіцієнти вигляду квадратурної формули (прямокутників, трапецій, Сімпсона). Тоді одержуємо алгебричну систему

$$v_i = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j k_{ij} v_j + g_i, \ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Формула трапецій для обчислення інтеграла має вигляд

$$\int_a^b f(y)dy \tilde{=} S_n = \sum_{j=0}^{n-1} S_j = h \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(y_j) + f(y_{j+1})}{2} = h\Big[\frac{f(y_0) + f(y_n)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(y_j)\Big].$$

Тут $A_0 = A_n = h/2$, $A_j = h$, $j = 1, \ldots, n-1$, а оцінка похибки

$$|\int\limits_a^b f(y)dy - S_n| \leq \tfrac{b-a}{12} Mh^2, \text{ де } M = \max_{y\in[a,b]} |f''(y)|.$$

Формула Сімпсона ґрунтується на апроксимації функції $f(y)$ на кожному з інтервалів квадратичною функцією $a_j y^2 + b_j y + c_j$

$$\int_a^b f(y)dy \tilde{=} S_n = \sum_{j=0}^{n-1} S_j = \frac{h}{3}\Big[f(y_0) + f(y_n) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(y_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f(y_{2j+1})\Big]$$

(n має бути парним числом). Оцінка похибки

$$|\int\limits_a^b f(y)dy - S_n| \leq \tfrac{b-a}{180} Mh^4, \text{ де } M = \max_{y\in[a,b]} |f^{(4)}(y)|.$$

Метод апроксимуючих функцій

Наближений чисельний розв'язок ЛІР (1.28) шукають у вигляді

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j U_j(x) + f(x),$$

де $U_j(x)$ – система ортогональних функцій ($\int_a^b U_j U_k dy = 0$ при $j \neq k$), C_j – шукані коефіцієнти. Якщо взяти за базисні функції ортогональні поліноми Лежандра

$$U_j(x) = P_j(z)\,,\; z = \tfrac{2x-b-a}{b-a}\,,$$

де $P_j(z) = u$ – розв'язки рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dz}[(1-z^2)\frac{du}{dz}] + n(n+1)u = 0,$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n,$$

зокрема, $P_0(z) = 1\,,\; P_1(z) = z\,,\; P_2(z) = \frac{3z^2-1}{2}\,,\; P_3(z) = \frac{5z^3-3z}{2}\,,$ $P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$, то після підставляння $\tilde{u}(x)$ у рівняння одержують нев'язку (функцію нев'язки)

$$\tilde{u}(x) - u(x) = R(x, C_1, \ldots, C_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j \big[U_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,y) U_j(y) dy\big].$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів з умови мінімізації цієї нев'язки використовують різні методи.

У *методі колокації* коефіцієнти C_j знаходять з умови

$$R(x_j, C_1, \ldots, C_n) = 0, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

У *методі найменших квадратів* коефіцієнти C_j знаходять з умови мінімуму функції

$$\Phi(C_1, \ldots, C_m) = \sum_{j=1}^{m} [R(x_j, C_1, \ldots, C_m)]^2, \;\; j = 1, \ldots, n, \;\; m \leq n.$$

За *методом Гальоркіна* (методом моментів) коефіцієнти C_j знаходять з умови ортогональності цієї функції до всіх базисних функцій

$$\int_a^b R(x, C_1, \ldots, C_m) U_j(x) dx = 0, \;\; j = 1, \ldots, m.$$

Це лінійна алгебрична система рівнянь.

Розглянуті методи є прямими числовими методами на відміну від методу послідовних наближень.

Вправи

Звести інтегральні рівняння до систем алгебричних рівнянь кожним із розглянутих методів при $n = 5$:

1) $u(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x+y)^5 u(y)dy + x, \ \ x \in [0,1]$;

2) $u(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x-y)^4 u(y)dy + x, \ \ x \in [0,1]$;

3) $u(x) = \lambda \int\limits_0^1 \left(x + \frac{y}{x+2y}\right) u(y)dy + x, \ \ x \in [0,1]$.

Вправи на повторення

1. Звести інтегральні рівняння до диференціальних і розв'язати:

1) $y(x) = xe^x - \int\limits_0^1 K(x,s)y(s)ds\,, \ K(x,s) = \frac{1}{sh1}\begin{cases} shx\; sh(s-1), & x \in [0,s] \\ shs\; sh(x-1) & x \in (s,1] \end{cases}$

($y = 2e^x - 2 + (2-e)x$);

2) $y(x) = x + \int\limits_0^1 K(x,s)y(s)ds\,, \ K(x,s) = \frac{1}{sh1}\begin{cases} (x+1)(s-x), & x \in [0,s] \\ (s+1)(x-s) & x \in (s,1] \end{cases}$

($y = [3(sh2x + 2ch2x) + (sh2 - 4ch2)(x-1)]\,[9sh2 + 6ch2]^{-1}$).

2. Звести до рівнянь другого роду:

1) $\int\limits_0^x e^{xs} y(s)ds = e^x - 1$;

2) $\int\limits_2^x (e^{x-s} + 1)y(s)ds = x - 2$;

3) $\int\limits_2^x \frac{y(s)}{x+s+1} ds = x, \ \ x \geq 0$.

3. Розв'язати рівняння з виродженими ядрами:

1) $y(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \int\limits_0^\pi \frac{\sin(3x)\sin(3s)}{\sqrt{3}} y(s)ds$;

2) $y(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)\cos(2s)}{\sqrt{2}} y(s)ds$.

4. Знайти два наближення розв'язку методом Пікара (послідовних наближень), вибираючи $y_0(x) = 0$:

1) $y(x) = x + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (xs + x^2)y(s)ds \quad (y_2(x) = \frac{10}{9}x + \frac{1}{12})$;

2) $y(x) = 1 + \frac{1}{10}\int\limits_0^{\pi/4} arctg(xs)y(s)ds$

$(y_2(x) = 1 + \frac{1}{10}\Big[\frac{\pi}{4}arctg(\pi x/4) - \frac{x}{2}ln(1 + \frac{\pi^2 x^2}{16})\Big])$;

3) $y(x) = 1 + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{y(s)}{(1+s^2+x^2)^2}ds \ (y_2(x) = x + \frac{1}{6(1+x^2)})$.

5. Знайти наближений розв'язок, замінивши ядро двочленним наближенням:

1) $y(x) = x + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (xs + x^2)y(s)ds$;

2) $y(x) = 1 + 2\int\limits_0^1 \frac{y(s)}{(3+xs)(4-x-s)}ds$;

3) $y(x) = x + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 tg(x-s)y(s)ds$.

6. Знайти характеристичні числа та власні функції ядра:

1) $y(x) = \lambda\int\limits_1^2 (xs)y(s)ds$;

2) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 (xs + x^2 s^2)y(s)ds$;

3) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{s}(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{s+1}(x+2)}\Big)y(s)ds$.

7. Знайти резольвенту ядра і записати вигляд розв'язку:

1) $y(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x \frac{ch\,x}{ch\,s}y(s)ds \quad (R(x,s) = \frac{ch\,x}{ch\,s}e^{\lambda(s-x)})$;

2) $y(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x e^{x^2-s^2}y(s)ds \quad (R(x,s) = e^{\lambda(x-s)+x^2-s^2})$;

3) $y(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x (x-s)^2 y(s)ds \quad (R(x,s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\, 2^{n+1}(x-s)^{3n+2}}{(3n+2)!})$.

Зразок контрольної роботи

1. Розв'язати методом послідовних наближень і побудувати резольвенту

$$y(t) = arctgt + \int\limits_0^t \frac{y(s)}{1+s^2}ds \ (y_0(t) = 0).$$

2. Розв'язати рівняння з виродженим ядром при $\lambda = 1$, знайти характеристичні числа, власні функції та розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$y(t) - 4\lambda \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) y(s) ds = 2t - \pi .$$

3. Звести до інтегрального рівняння:

а) $y''' - 2ty'' + (t+1)y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 10$;

б) $y'' + 16y = g(t, y)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

1.8 Застосування перетворення Фур'є

Нехай $S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma \varphi(x)| < +\infty \quad \forall \beta, \gamma\}$.

Послідовність $\varphi_k \to 0$ ($k \to \infty$) у просторі $\mathcal{S} = S(\mathbb{R}^n)$, якщо:

а) для довільних мультиіндексів β, γ існує додатна стала $C_{\beta,\gamma}$ така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma \varphi_k(x)| \le C_{\beta,\gamma} ;$$

б) для довільного мультиіндексу γ рівномірно $D^\gamma \varphi_k(x) \to 0$ ($k \to \infty$).

Простір $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $S(\mathbb{R}^n)$. Вважаємо, що $g_k \to 0$ у просторі S' при $k \to \infty$, якщо $(g_k, \psi) \to 0$ для довільної $\psi \in S$.

Прикладом регулярної узагальненої функції з S' є функціонал

$$g : (g, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\sigma)\psi(\sigma) d\sigma \quad \forall \psi \in S,$$

де $g(\sigma)$ росте не швидше полінома (такі функції називаються *повільно зростаючими на безмежності*).

Простір $S(\mathbb{R}^n)$ називається простором *швидко спадаючих на безмежності* гладких функцій, а простір $S'(\mathbb{R}^n)$ — простором *повільно зростаючих на безмежності* узагальнених функцій.

Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ($\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$). Функція

$$\widehat{\varphi}(s) = \mathcal{F}[\varphi](s) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,s)} dx, \quad s = \sigma + \tau i \in \mathbb{C}^n \tag{1.29}$$

називається *перетворенням Фур'є* функції φ.

Тут $i^2 = -1$, $(x,s) = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n$ — скалярний добуток векторів x та s, $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\gamma_n}$ ($\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j \in \mathbb{Z}_+$), $D^\gamma \varphi(x) = \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} \varphi(x)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}$.

Властивості перетворення Фур'є основних функцій:

1) $\mathcal{F}[D^\gamma \varphi(x)](s) = (-is)^\gamma \mathcal{F}[\varphi], \quad s \in \mathbb{C}^n$;

2) $\mathcal{F}[(ix)^\gamma \varphi(x)](s) = D^\gamma \mathcal{F}[\varphi](s), \quad s \in \mathbb{C}^n$;

3) $\mathcal{F}[\varphi(x - x_0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)] \cdot e^{i(x_0, s)}$;

4) $\mathcal{F}[\varphi(x) \cdot e^{i(x, s_0)}] = \mathcal{F}[\varphi(x)](s + s_0)$;

5) $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]$;

6) $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\varphi](-\sigma)$, де $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(x,s)} dx$.

Перетворення Фур'є $\mathcal{F} : S \to S$.

Справді, інтеграл (1.29) існує та визначає неперервну функцію $\widehat{\varphi}(s)$. Доведемо таке: *якщо* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathcal{F}[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$. Маємо

$$\sigma^\alpha \, D^\beta(\mathcal{F}[\varphi]) = \sigma^\alpha \mathcal{F}[(ix)^\beta \varphi] = i^{|\alpha|} \mathcal{F}[D^\alpha \big((ix)^\beta \varphi\big)] =$$
$$= i^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \big((ix)^\beta \varphi\big) e^{i(x,\sigma)} d\sigma \quad (|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

Інтеграл у правій частині існує і є обмеженою функцією для всіх α, β. Отже, $\mathcal{F}[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$.

Для довільних $f, \varphi \in S$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(x,\sigma)} dx \Big) \varphi(\sigma) d\sigma =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\sigma) e^{i(x,\sigma)} d\sigma \Big) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Перетворенням Фур'є функції $f \in S'$ називається функція $g = \mathcal{F}[f] \in S'$, визначена рівністю

$$(\mathcal{F}[f], \varphi) = (f, \mathcal{F}[\varphi]) \qquad \forall \varphi \in S,$$

також визначаємо обернене перетворення Фур'є функції $g \in S'$:

$$(\mathcal{F}^{-1}[g], \psi) = (g, \mathcal{F}^{-1}[\psi]) \qquad \forall \psi \in S.$$

Введене перетворення Фур'є є лінійною й неперервною операцією. Для нього виконуються всі властивості, що й для перетворення Фур'є основних функцій. Зокрема, перетворення Фур'є згортки є добутком перетворень Фур'є його компонент, $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1$, $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n\, \delta(x)$.

Якщо f – фінітна узагальнена функція, то її перетворення Фур'є можна також визначати формулою [12]

$$\mathcal{F}[f](\sigma) = (f(x), e^{i(x,\sigma)}).$$

Приклади:

1) $\mathcal{F}[10x-2] = 10\mathcal{F}[x] - 2\mathcal{F}[1] = -i\mathcal{F}[ix\cdot 1] - 4\pi\delta(s) = -2\pi i\delta'(s) - 4\pi\delta(s)$;

2) $\mathcal{F}[\theta(1-|x|) * e^{-|x|}] = \mathcal{F}[\theta(1-|x|)]\ \mathcal{F}[e^{-|x|})] =$
$= \int\limits_{-1}^{1} e^{ixs}dx \cdot [\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x+ixs}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x+ixs}dx] =$
$= \frac{e^{is}-e^{-is}}{is}\cdot[\frac{1}{1-is} + \frac{1}{1+is}] = \frac{2\sin(s)}{s}\cdot\frac{2}{1+s^2} = \frac{4\sin(s)}{s(1+s^2)}$
(тут $\theta(1-|x|) = 1$ при $|x| < 1$, $\theta(1-|x|) = 0$ поза $[-1,1]$);

3) $\mathcal{F}[sin(5x) * \delta'(x)] = \mathcal{F}[5cos(5x)] = \frac{5}{2}\mathcal{F}[e^{5ix} + e^{-5ix}] =$

$= \frac{5}{2}\{\mathcal{F}[e^{5ix}] + \mathcal{F}[e^{-5ix}]\} = \frac{5}{2}\{\mathcal{F}[1](s+5) + \mathcal{F}[1](s-5)\} =$

$= 5\pi\{\delta(s+5) + \delta(s-5)\}$;

4) знайдемо $\mathcal{F}[\delta_R(x)]$, де $\delta_R(x) = 1$ на сфері $|x| = R$ в $\mathbb{R}^3$ і нулю поза нею

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \int\limits_{|x|=R} e^{i(x,\xi)}dS = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} e^{i|x||\xi|\cos\beta}\sin\beta d\beta =$$

$$= -2\pi R^2\int\limits_0^{\pi} e^{iR|\xi|\cos\beta}d(\cos\beta) = 2\pi R^2\int\limits_{-1}^{1} e^{iR|\xi|\eta}d\eta = 2\pi R\frac{e^{iR|\xi|} - e^{-iR|\xi|}}{i|\xi|},$$

$$\mathcal{F}[\delta_R(x)](\xi) = \frac{4\pi R\sin(R|\xi|)}{|\xi|};$$

5) $\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\xi|^{\frac{n}{2}-1}}\int\limits_0^{\infty} g(r)r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)dr$, $n = 1,2,3,\ldots$, де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν, зокрема,

$\mathcal{F}[g(|x|)] = 2\int\limits_0^{\infty} g(r)\cos(r|\xi|)dr, \quad n = 1$,

$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} g(r)rJ_0(r|\xi|)dr, \quad n = 2$,

$$\mathcal{F}[g(|x|)] = \frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^\infty g(r)r\sin(r|\xi|)dr, \quad n=3\,;$$

6) використовуючи наведені формули перетворення Фур'є сферично-симетричних функцій, знаходимо

$$\mathcal{F}[e^{-p|x|}] = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\frac{p}{(p^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,,$$

зокрема, $\mathcal{F}[e^{-p|x|}] = \frac{2p}{p^2+\xi^2}$, відповідно, $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{p^2+\xi^2}] = \frac{1}{2p}e^{-p|x|}$ у випадку $n=1$;

$$\frac{\mathcal{F}[|x|^p]}{\Gamma\Big(\frac{n+p}{2}\Big)} = 2^{n+p}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{|\xi|^{-p-n}}{\Gamma\Big(-\frac{p}{2}\Big)}\,.$$

Застосування до розв'язання інтегральних рівнянь

Приклади:

1) розв'язати рівняння

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|}y(s)ds + e^{-|t|} \;\; <=> \;\; y(t) = e^{-|t|} * y(t) + e^{-|t|}\,;$$

виконуючи перетворення Фур'є, отримуємо

$$\widehat{y}(\xi) = \frac{2}{\xi^2+1}\widehat{y}(\xi) + \frac{2}{\xi^2+1} \;\; <=> \widehat{y}(\xi) = \frac{2}{\xi^2-1} = \frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{\xi+1}\,;$$

$$\mathcal{F}[\varphi(\xi-\xi_0)] = \mathcal{F}[\varphi(\xi)]\cdot e^{i\xi_0 t}\,,$$

тоді

$$\mathcal{F}^{-1}[\tfrac{1}{\xi-1}] = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\tfrac{1}{\xi-1}](-t) = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\tfrac{1}{\xi}](-t)\cdot e^{-it}\,;$$

відомо (див., наприклад, [12]), що

$$\mathcal{F}[\tfrac{1}{\xi}] = \pi i\; sign(t)\,,$$

а тому

$$\mathcal{F}^{-1}[\tfrac{1}{\xi-1}] = \tfrac{i}{2}sign(-t)\cdot e^{-it}\,,$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\tfrac{1}{\xi+1}] = \tfrac{i}{2}sign(-t)\cdot e^{it}\,,$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\tfrac{2}{\xi^2-1}] = \tfrac{i}{2}sign(t)[e^{it} - e^{-it}] = -\tfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\; sign(t) =$$
$$= -\sin(t)sign(t) = -|\sin(t)|\,,\;\; y(t) = -|\sin(t)|\,;$$

2) розв'язати рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y(s)}{(t-s)^2+1}ds = \frac{2}{t^2+1} \;\; <=> \;\; \frac{1}{t^2+1} * y(t) = \frac{2}{t^2+1}\,;$$

маємо

$$\mathcal{F}[\tfrac{1}{t^2+1}]\widehat{y}(\xi) = \mathcal{F}[\tfrac{2}{t^2+1}]\text{, звідки } \widehat{y}(\xi) = 2\,;\;\; y = 2\delta(x)\,.$$

Для рівняння

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)u(s)ds + f(t),$$

яке можна записати як рівняння в згортках

$$u(t) = (K * u)(t) + f(t),$$

можна знайти резольвенту $R(t,s) = R(t-s)$. Згадаємо, що

$$u(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} R(t,s)f(s)ds.$$

Після перетворення Фур'є

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{K}(\xi)\,\widehat{u}(\xi) + \widehat{f}(\xi) \ <=> \ (1-\widehat{K}(\xi))\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$
$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{R}(\xi)\,\widehat{f}(\xi) \ <=> \ \widehat{u}(\xi) = (1+\widehat{R}(\xi))\,\widehat{f}(\xi).$$

Отже,

$$\widehat{u}(\xi) = \tfrac{\widehat{f}(\xi)}{1-\widehat{K}(\xi)} = (1+\widehat{R}(\xi))\,\widehat{f}(\xi) \ =>$$
$$1+\widehat{R}(\xi) = \tfrac{1}{1-\widehat{K}(\xi)}, \ \widehat{R}(\xi) = \tfrac{1}{1-\widehat{K}(\xi)} - 1, \ \widehat{R}(\xi) = \tfrac{\widehat{K}(\xi)}{1-\widehat{K}(\xi)}.$$

Подібними властивостями володіють інші інтегральні перетворення, зокрема, синус і косинус-перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_{cos}[\varphi(x)](s) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi(x)\cos(sx)dx = \mathcal{F}_{cos}^{-1}[\varphi(x)](s);$$
$$\mathcal{F}_{sin}[\varphi(x)](s) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi(x)\sin(sx)dx = \mathcal{F}_{sin}^{-1}[\varphi(x)](s);$$
$$\mathcal{F}_{cos}[e^{-ax}](s) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{a}{s^2+a^2}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $u(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xy)u(y)dy + f(x)$.

Нехай $\widehat{u}(s) = \mathcal{F}_{cos}[u(x)](s)$, тоді рівняння має вигляд

$$u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{u}(x) + f(x),$$

а після перетворення

$$\widehat{u}(s) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\mathcal{F}_{cos}[\widehat{u}](s) + \widehat{f}(s) \ <=> \widehat{u}(s) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,u(s) + \widehat{f}(s) \ =>$$
$$u(x) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\big[\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}u(x) + \widehat{f}(x)\big], \ u(x)(1-\tfrac{\pi}{2}) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\widehat{f}(x);$$
$$u(x) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\tfrac{\widehat{f}(x)}{1-\frac{\pi}{2}}.$$

1.9 Застосування перетворення Лапласа

Нехай $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $f(t) = 0$ при $t < 0$, $|f(t)| \le Ae^{at}, \quad t \to \infty.$

Функція, яка має такі властивості, називається *оригіналом.*

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ або її *зображенням* називається функція

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-\omega t i}dt = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \tag{1.30}$$

де $\mathcal{F}$ – оператор перетворення Фур'є і загалом $s = \sigma + \omega i$.

Позаяк $|e^{-\omega t i}| = 1$, $|f(t)e^{-\sigma t}| \le Ae^{-(\sigma - a)t}, \quad t \to \infty$, то з умов на функцію $f(t)$ випливає існування інтеграла (1.30) для всіх $\sigma > a$, інтеграл рівномірно збігається на замкненій півплощині $\sigma \ge a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Запис $f(t) \to F(s)$ означатиме, що $F(s)$ є зображенням функції $f(t)$.

Якщо функція $F(s) = F(\sigma + \omega i)$ абсолютно інтегровна за $\omega \in \mathbb{R}$, то за заданим зображенням оригінал знаходимо за формулою

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{\sigma t}ds. \tag{1.31}$$

Перевіримо, що $\theta(t)e^{-ht} \to \frac{1}{s+h}$. Маємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-ht}e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty e^{-(h+s)t}dt = -\tfrac{1}{h+s}e^{-(h+s)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \tfrac{1}{s+h},$$

зокрема, $\theta(t) \to \frac{1}{s}$.

Перевіримо, що $\theta(t)\cos(ht) \to \frac{s}{s^2+h^2}$. Маємо

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^\infty \cos(ht)e^{-st}dt = -\tfrac{1}{s}\cos(ht)e^{-st}dt\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \tfrac{h}{s}\int\limits_0^\infty \sin(ht)e^{-st}dt = \\ &= \tfrac{1}{s} + \tfrac{h}{s^2}\sin(ht)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \tfrac{h^2}{s^2}J, \\ &(1 + \tfrac{h^2}{s^2})J = \tfrac{1}{s}, \ \tfrac{s^2+h^2}{s^2}J = \tfrac{1}{s}, \ J = \tfrac{s}{s^2+h^2}; \end{aligned}$$

подібно знаходимо, що

$$\theta(t)\cos(ht) \to \tfrac{s}{s^2+h^2};$$
$$\theta(t)\sin(ht) \to \tfrac{h}{s^2+h^2}.$$

Головні властивості перетворень Лапласа звичайних функцій:

1) $f^{(m)}(t) \to s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0)$, $m = 0, 1, \ldots$ — перетворення Лапласа похідної, зокрема,

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0),$$

$$\sin(ht) = -\tfrac{1}{h}(\cos(ht))' \to -\tfrac{1}{h}\big(s\mathcal{L}[\cos(ht)] - 1\big) =$$
$$= -\tfrac{1}{h}\big(\tfrac{s^2}{s^2+h^2} - 1\big) = \tfrac{h}{s^2+h^2}\text{, а отже, } \sin(ht) \to \tfrac{h}{s^2+h^2};$$

2) $(-t)^m f(t) \to F^{(m)}(s)$, $m = 0, 1, \ldots$ — диференціювання перетворення Лапласа, зокрема, $\int\limits_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt = F'(s)$;

3) $f(t)e^{ht} \to F(s-h)$ при $\sigma > a + Reh$ — зсув перетворення Лапласа;

4) $f(t-\tau) \to e^{-\tau s}F(s)$ ($\tau \geq 0$) — перетворення Лапласа зсуву;

5) $f(ct) \to \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$ ($c = const$) — перетворення Лапласа подібності;

6) якщо $f(t) \to F(s)$, $g(t) \to G(s)$, то

$(f * g)(t) \to F(s)G(s)$ — перетворення Лапласа згортки;

7) $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(s)}{s}$ — перетворення Лапласа первісної.

Зазначимо, що:

$$t^n e^{at} \to \tfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N};$$
$$tch(at) \to \tfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2};\ tsh(at) \to \tfrac{2as}{(s^2-a^2)^2};$$
$$tcos(at) \to \tfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2};\ tsin(at) \to \tfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

Введемо функційні простори

$$S'_+ = \mathcal{D}'_+ \cap S',$$

$$\mathcal{D}'_+(a) = \{f \in \mathcal{D}'_+ : f(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'_+ \quad \forall \sigma > a\}.$$

Перетворенням Лапласа узагальненої функції $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ називається функція

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) := \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) \quad \forall \sigma > a.$$

Теорема 12. *Перетворенням Лапласа узагальненої функції* $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ *є функція*

$$F(s) = \big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big), s = \sigma + \omega i, \sigma > \sigma_0 > a,$$

де $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > -\varepsilon \\ 0, & t < -2\varepsilon \end{cases}$, $\varepsilon > 0$.

Доведення. Позаяк $f(t)e^{-\sigma_0 t}$ належить S'_+, $\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}$ – функція з S, то визначена цією формулою функція $F(s)$ існує. Використовуючи означення перетворення Фур'є та властивості функцій із простору S'_+, $\mathcal{D}'_+(a)$, для довільних $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ та $\varphi \in S$ отримуємо

$$\begin{gathered}
(\mathcal{L}[f(t)], \varphi) = (\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \varphi(-\omega)) \\
= (f(t)e^{-\sigma t}, \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](t)) \\
= (\eta(t)f(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}, \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](t)) \\
= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(-\omega)e^{i\omega t}d\omega\Big) \\
\\
= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\Big) \\
= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\eta(t)e^{-(\sigma+i\omega-\sigma_0)t}d\omega\Big) \\
= \Big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}d\omega\Big) \qquad \forall\sigma > \sigma_0 > a.
\end{gathered}$$

Використовуючи аналог теореми Фубіні (це можливо, оскільки $\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}$ – функція з S), одержимо

$$(\mathcal{L}[f(t)], \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\varphi(\omega)d\omega,$$

звідки за лемою Дюбуа-Реймона отримуємо твердження теореми.

Як і для звичайних функцій, запис $f(t) \to F(s)$ означає, що $F(s)$ є зображенням функції $f(t)$.

Використовуючи означення перетворень Фур'є та Лапласа, властивості перетворення Фур'є, останню теорему, одержуємо *головні властивості перетворення Лапласа узагальнених функцій* із $\mathcal{D}'_+(a)$.

1. $f^{(m)}(t) \to s^m F(s)$, $m = 0, 1, \dots$.

Справді, якщо $f \in \mathcal{D}'_+(a)$, то $f' \in \mathcal{D}'_+(a)$,

$$\begin{aligned}
f'(t) &\to \mathcal{F}[f'(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \mathcal{F}[(f(t)e^{-\sigma t})' + \sigma f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) \\
&= \mathcal{F}[(f(t)e^{-\sigma t})'](-\omega) + \sigma\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \\
&= \omega i\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) + \sigma\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) =
\end{aligned}$$

$$= (\sigma+\omega i)\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = sF(s)\,,$$

далі використовуємо метод математичної індукції.

2. $(-t)^m f(t) \to F^{(m)}(s)\,,\ m = 0, 1, \ldots\,.$

Оскільки $t^m f(t)$ — функція із $\mathcal{D}'_+(a)$, то за теоремою 12

$$(-t)^m f(t) \to \big((-t)^m f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big)$$
$$= \big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\,.$$

Зауважимо, що

$$\tfrac{d}{ds}(-t\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}) = \eta(t)\tfrac{d}{ds}e^{-(s-\sigma_0)t}$$

і подібно

$$\eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t} = \eta(t)\tfrac{d^m}{ds^m}e^{-(s-\sigma_0)t} = \tfrac{d^m}{ds^m}\big(\eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big)\,.$$

Тому за правилом диференціювання узагальнених функцій, залежних від параметрів (у нашому випадку параметром є s), одержимо

$$\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)(-t)^m e^{-(s-\sigma_0)t}\big) = \tfrac{d^m}{ds^m}\big(f(t)e^{-\sigma_0 t}, \eta(t)e^{-(s-\sigma_0)t}\big) = F^{(m)}(s)\,.$$

3. $f(t)e^{ht} \to F(s-h)$ при $\sigma > a + Re h$.

Справді, $f(t)e^{ht} \to \mathcal{F}[f(t)e^{-(\sigma-h)t}](-\omega) = F(s-h)$.

4. $f(ct) \to \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$ ($c = const$).

5. Якщо $f(t) \to F(s)$, $g(t) \to G(s)$, то $(f*g)(t) \to F(s)G(s)$.

Справді,

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{F}[(f*g)e^{-\sigma t}](-\omega) = \mathcal{F}[\big(f(t)e^{-\sigma t}\big)*\big(g(t)e^{-\sigma t}\big)](-\omega) =$$
$$= \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega)\mathcal{F}[g(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = F(s)G(s)\,.$$

6. $f(t-\tau) \to e^{-\tau s}F(s)$ ($\tau \geq 0$).

7. $f^{(-m)}(t) \to \frac{F(s)}{s^m}$ — перетворення Лапласа первісної.

Приклади

1. а) $\theta(t) \to 1/s$;

б) $\delta(t) \to 1$ ($\delta(t) \to \mathcal{F}[\delta(t)e^{-\sigma t}](-\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)](-\omega) = 1$);

в) $\frac{\theta(t)t^{m-1}}{(m-1)!} \to \frac{1}{s^m}$.

Насправді, за властивістю 2

$$(-t)^{m-1}\theta(t) \to \tfrac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\mathcal{L}[\theta(t)] = \tfrac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\tfrac{1}{s} = \tfrac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{s^m}\,.$$

Також $f_\beta(t)=\frac{\theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\to\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^\infty t^{\beta-1}e^{-st}dt=[st=\tau]=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^\infty \tau^{\beta-1}e^{-\tau}d\tau\,\frac{1}{s^\beta}$, тобто $f_\beta(t)=\frac{\theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\to\frac{1}{s^\beta}$, $\beta>0$, де вибрана така гілка s^β у півплощині $\sigma>0$, що $s^\beta>0$ при $s>0$.

2. Розв'язати у $D'_+(\mathbb{R})$:

а) $\theta(x)x\cos x*u(x)=\theta(x)\sin x$;

б) $(\theta(x)e^x+\delta'(x))*u(x)=\delta''(x)$.

Розв'язання:

а) $u(x)\to U(s)$;

$\theta(x)x\cos x\to-(\mathcal{L}[\cos x])'(s)=-\big(\frac{s}{s^2+1}\big)'=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$;
$(\theta(x)x\cos x)*u(x)\to\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}U(s)$; $\theta(x)\sin x\to\frac{1}{s^2+1}$;
$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}U(s)=\frac{1}{s^2+1}$;
$U(s)=\frac{s^2+1}{s^2-1}=1+\frac{2}{s^2-1}=1+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}$;
$u(x)=\delta(x)+\theta(x)e^x-\theta(x)e^{-x}$;

б) $\theta(x)e^x\to\frac{1}{s-1}$, $\delta(x)\to1$; $\delta'(x)\to s$; $\delta''(x)\to s^2$;

$\big(\frac{1}{s-1}+s\big)U(s)=s^2$; $\frac{s^2-s+1}{s-1}U(s)=s^2$;
$U(s)=\frac{s^2(s-1)}{s^2-s+1}=s-\frac{1}{s^2-s+1}=$
$=s+\frac{i}{2\sqrt3(s-\frac12-\sqrt3 i)}-\frac{i}{2\sqrt3(s-\frac12-\sqrt3 i)}$;
$u(x)=\delta'(x)+\frac{i}{2\sqrt3}\theta(x)\big(e^{(\frac12+\sqrt3 i)x}-e^{(\frac12-\sqrt3 i)x}\big)=$
$=\delta'(x)+\frac{i}{2\sqrt3}\theta(x)e^{\frac{x}{2}}(e^{\sqrt3 xi}-e^{-\sqrt3 xi})=$
$=\delta'(x)+\frac{i}{2\sqrt3}\theta(x)e^{\frac{x}{2}}2i\sin(\sqrt3 x)$;
$u(x)=\delta'(x)-\frac{1}{\sqrt3}\theta(x)e^{\frac{x}{2}}\sin(\sqrt3 x)$.

3. Розв'язати у $D'_+(\mathbb{R})$ інтегральні рівняння:

а) $\int_0^x sh(x-t)u(t)dt=\cos x$;

б) $u(x)-\frac12\int_0^x(x-t)u(t)dt=1$.

Розв'язання:

а) $u(x)\to U(s)$ і маємо $sh(x)*u(x)=\cos x$;

$sh(x)=\frac12(e^x-e^{-x})$; $e^x\to\frac{1}{s-1}$; $e^{-x}\to\frac{1}{s+1}$;
$(e^x-e^{-x})\to\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s^2-1}$;
$\frac{U(s)}{s^2-1}=\frac{s}{s^2+1}$; $U(s)=\frac{s(s^2-1)}{s^2+1}=s(1-\frac{2}{s^2+1})=s-\frac{2s}{s^2+1}$;
$u(x)=\delta'(x)-2\theta(x)\cos x$;

б) маємо $u(x) - \frac{1}{2}(x\theta(x)) * u(x) = \theta(x)$;

$U(s) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\theta(x)])' U(s) = \frac{1}{s}$; $U(s) - \frac{1}{2s^2} U(s) = \frac{1}{s}$;

$\frac{2s^2-1}{2s^2} U(s) = \frac{1}{s}$; $U(s) = \frac{2s}{2s^2-1}$.

4. Перевірити, що задані функції задовольняють задані рівняння:

а) $(\theta(x) x \cos x) * u(x) = \delta(x)$,

$u = \delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x) shx$;

б) $u(x) + 2(\theta(x)\cos x) * u(x) = \delta(x)$,

$u = \delta(x) - 2\theta(x) e^{-x}(1 - x)$.

Розв'язання:

а) $(\theta(x) x \cos x) * u(x) = \delta(x)$, $u(x) \to U(s)$;

$\theta(x) x \cos x \to -(L[\cos x])'(s) = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$;

$(\theta(x) x \cos x) * u(x) \to \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} U(s)$; $\delta(x) \to 1$;

$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} U(s) = 1$;

$U(s) = \frac{s^4+2s^2+1}{s^2-1} = s^2 - 1 + \frac{4s^2}{(s+1)(s-1)} = s^2 - 1 + \frac{2s^2}{s-1} - \frac{2s^2}{s+1}$;

$u(x) = \delta''(x) - \delta(x) + 2(\theta(x)e^x)'' - 2(\theta(x)e^{-x})''$;

$(\theta(x)e^x)'' = (\delta(x)e^x + \theta(x)e^x)' = (\delta(x) + \theta(x)e^x)' =$

$= \delta'(x) + \delta(x) + \theta(x)e^x$,

$(\theta(x)e^{-x})'' = (\delta(x)e^{-x} - \theta(x)e^{-x})' = (\delta(x) - \theta(x)e^{-x})' =$

$= \delta'(x) - \delta(x) + \theta(x)e^{-x}$,

$u(x) = \delta''(x) + 3\delta(x) + 2\theta(x)e^x - 2\theta(x)e^{-x}$,

$u(x) = \delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x) shx$;

б) $u(x) + 2(\theta(x)\cos x) * u(x) = \delta(x)$,

$\theta(x)\cos x \to \frac{s}{s^2+1}$, $U(s) + \frac{2s}{s^2+1} U(s) = 1$,

$\frac{(s+1)^2}{s^2+1} U(s) = 1$, $U(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2}$,

$u(x) = \left(f_2(x)e^{-x}\right)'' + f_2(x)e^{-x} = x\theta(x)e^{-x} + \left(x\theta(x)e^{-x}\right)''$,

$\left(x\theta(x)e^{-x}\right)'' = \left(\theta(x)e^{-x} + x\delta(x)e^{-x} - x\theta(x)e^{-x}\right)' =$

$= \delta(x) - 2\theta(x)e^{-x} + x\theta(x)e^{-x}$,

$u(x) = 2x\theta(x)e^{-x} - 2\theta(x)e^{-x} + \delta(x) =$

$= \delta(x) + 2\theta(x)e^{-x}(x - 1)$.

5. Розв'язати задачу Коші

$x'' - 2x' + x = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Маємо

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 2(sX(s) - x(0)) + X(s) = \tfrac{1}{s};$$
$$(s^2 - 2s + 1)X(s) = \tfrac{1}{s} + s - 1; \ (s-1)^2X(s) = \tfrac{1+s^2-s}{s};$$
$$X(s) = \tfrac{s^2-s+1}{s(s-1)^2} = \tfrac{s}{(s-1)^2} - \tfrac{1}{(s-1)^2} + \tfrac{1}{s}\tfrac{1}{(s-1)^2};$$
$$x(t) = (e^t f_2(t))' - e^t f_2(t) + \theta(t) * (e^t f_2(t)) =$$
$$= e^t(f_2(t) + f_2'(t) - f_2(t)) + \int_0^t \tau e^\tau d\tau =$$
$$= e^t f_1(t) + \theta(t)(te^t + 1 - e^t);$$
$$x(t) = e^t\theta(t) + \theta(t)(te^t + 1 - e^t) = \theta(t)(te^t + 1).$$

6. Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння

$$y'(x) + y(x) + \int\limits_0^x (x - t + 1)y(t)dt = 0, \ \ y(0) = 3.$$

Маємо

$$sY(s) - 3 + Y(s) + \mathcal{L}[x_+ * y(x)] + \mathcal{L}[\int\limits_0^x y(t)dt] = 0 \ <=>$$
$$Y(s)(s+1) - 3 + \tfrac{Y(s)}{s^2} + \tfrac{Y(s)}{s} = 0 \ <=> \ Y(s)(s + 1 + \tfrac{1}{s^2} + \tfrac{1}{s}) = 3;$$
$$Y(s) = \tfrac{3s^2}{(s+1)(s^2+1)} = \tfrac{1{,}5}{s+1} - \tfrac{1{,}5s}{s^2+1} - \tfrac{1{,}5}{s^2+1};$$
$$y(x) = 1,5\theta(x)[e^{-x} + cos(x) - sin(x)].$$

7. Якщо розглянути електричне коло з послідовно включеними опором R, індуктивністю провідника L і ємністю C та включеної в момент $t = 0$ напруги $E(t) = E(t)\theta(t)$, то сила струму $I(t)$ за законами Кірхгофа задовольняє інтегро-диференціальне рівняння

$$LI' + RI + \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(\tau)d\tau = E(t),$$

яке можна записати як рівняння у згортках

$$g * I = E,$$

де

$$g(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t)$$

і $g \in D'_+(0)$, $g(t) \to Ls + R + \frac{1}{Cs}$. У теорії електричних кіл функція $g(t)$ називається *імпедансом* (узагальненим опором) кола.

Фундаментальний розв'язок рівняння у згортках $g^{-1}(t)$, який у теорії електричних кіл називається *адмітансом* (узагальненою провідністю) є оберненим перетворенням Лапласа від

$$\frac{1}{Ls+R+\frac{1}{Cs}}=\frac{s}{L(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{1}{2L\omega i}\Big[\frac{s_1}{s-s_1}-\frac{s_2}{s-s_2}\Big],$$

$$s_1=-\frac{R}{2L}+\omega i,\ \ s_2=-\frac{R}{2L}-\omega i,\ \ \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Знаходимо

$$g^{-1}(t)=\frac{\theta(t)}{L\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\Big(\omega\cos\,\omega t-\frac{R}{2L}\sin\,\omega t\Big)$$

і розв'язок рівняння

$$I(t)=(g^{-1}*E)(t)=\frac{1}{L\omega}\int\limits_0^t e^{-\frac{R}{2L}\tau}\Big(\omega\cos\,\omega\tau-\frac{R}{2L}\sin\,\omega\tau\Big)E(t-\tau)d\tau.$$

Вправи

1. Використовуючи дробове диференціювання (інтегрування), розв'язати рівняння:

1) $\int\limits_0^x \sqrt{x-s}y(s)ds=x$;

2) $\int\limits_0^x (x-s)^{1/4}y(s)ds=x^2$.

2. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати рівняння:

1) $y(x)=x+\int\limits_0^x \sin(x-s)y(s)ds$, $\quad (y=x+x^3/6)$;

2) $y(x)=x+\int\limits_0^x sh(x-s)y(s)ds$, $\quad (y=x-x^3/6)$;

3) $\int\limits_0^x sh(x-s)y(s)ds=x^2e^{-x}$, $\quad (y=2e^{-x}(1-2x))$.

3. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу:

1) $y''(x)+2y'(x)-2\int\limits_0^x \sin(x-s)y'(s)ds=\cos(x)$, $y(0)=y'(0)=0$, $(y=1-e^{-x}-xe^{-x})$;

2) $y''(x)+y(x)+\int\limits_0^x sh(x-s)y(s)ds+\int\limits_0^x ch(x-s)y'(s)ds=ch(x)$, $y(0)=-1,\ \ y'(0)=1$, $\quad (y=1-\cos(x))$.

4. Довести таке: якщо $f(t)$ – абсолютно інтегровна періодична з періодом $T > 0$ функція, то

$$\theta(t)f(t) \to \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt\,,\ \sigma > 0\,.$$

5. Довести, що для локально інтегровних функцій $f, g \in D'_+(a)$, $g \in C^1([0, +\infty)$ правильна формула (інтеграл Дюамеля):

$$\int_0^t f(\tau)\{g(t-\tau)\}d\tau \to s\mathcal{F}(s)G(s) - g(0+)\mathcal{F}(s)\ \ \sigma > a.$$

Використати, що $g' = \{g'(t)\} + g(0+)\delta(t)$ і $f * g \to \mathcal{F}(s)\, G(s)$.

Зразок контрольної роботи

1. Використовуючи дробове диференціювання (інтегрування), розв'язати рівняння

$$\int_0^x \sqrt{(x-s)^3}\, y(s)ds = x\,.$$

2. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати рівняння:

а) $y(x) = e^x + 2\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds\,, \quad (\,y = 1\,);$

б) $\int_0^x e^{x-s}y(s)ds = x^2\,, \,(\,y = 2x - x^2\,).$

3. Розв'язати за допомогою перетворення Фур'є

$$y(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(s)}{(t-s)^2+\pi^2}ds + 1\,.$$

1.10 Нелінійні інтегральні рівняння

Приклади банахових просторів (підпросторів повних метричних просторів):

$C([a,b])\,,\ ||v||_{C([a,b])} = \max\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|\,,$

$C^1([a,b])\,,\ ||v||_{C^1([a,b])} = \max\{\max\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|, \max\limits_{x\in[a,b]} |v'(x)|\}\,,$

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ – простір обмежених функцій на дійсній осі,

$$||v||_{\mathcal{M}} = \sup_{x\in R} |v(x)|\,,$$

$L_2(a,b)\,,\ ||v||_{L_2(a,b)} = \sqrt{\int_a^b |v(x)|^2 dx}\,.$

Для розв'язування операторних рівнянь вигляду

$$u = Au \tag{1.32}$$

використовують метод послідовних наближень і такі теореми.

Теорема 13 (Банаха) (принцип стисних відображень). *Якщо у повному метричному просторі H оператор A переводить елементи простору H в себе і є стисним, тобто*

$$\exists L \in (0,1): \; \forall u_1, u_2 \in H \quad \varrho(Au_1, Au_2) \le L\varrho(u_1, u_2),$$

то оператор A має єдину нерухому точку, тобто існує єдиний розв'язок операторного рівняння (1.32).

Доведення. Для довільного елемента $u_0 \in H$ вибираємо $u_n = Au_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що ця послідовність фундаментальна в H. Маємо

$$\begin{aligned}
&\varrho(u_1, u_2) = \varrho(Au_0, Au_1) \le L\varrho(u_0, u_1) = L\varrho(u_0, Au_0)\,,\\
&\varrho(u_2, u_3) = \varrho(Au_1, Au_2) \le L\varrho(u_1, u_2) \le L^2\varrho(u_0, u_1) = L^2\varrho(u_0, Au_0)\,,\\
&\varrho(u_3, u_4) = \varrho(Au_2, Au_3) \le L\varrho(u_2, u_3) \le L^3\varrho(u_0, Au_0)\,, \text{ і.т.д.}\\
&\varrho(u_m, u_{m+p}) \le \varrho(u_m, u_{m+1}) + \cdots + \varrho(u_{m+p-1}, u_{m+p}) \le\\
&\le (L^m + \cdots + L^{m+p})\varrho(u_0, Au_0) = \tfrac{L^m - L^{m+p}}{1-L}\varrho(u_0, Au_0) \le \tfrac{L^m}{1-L}\varrho(u_0, Au_0)
\end{aligned}$$

(бо $0 < L < 1$), а тому $\varrho(u_m, u_{m+p}) \to 0$, $m \to \infty$ – послідовність фундаментальна. За повнотою простору H вона збігається до деякого елемента $u \in H$.

Доведемо, що u – розв'язок рівняння. Маємо

$$\begin{aligned}
&\varrho(u, Au) \le \varrho(u, u_m) + \varrho(u_m, Au) = \varrho(u, u_m) + \varrho(Au_{m-1}, Au) \le\\
&\qquad \le \varrho(u, u_m) + L\varrho(u_{m-1}, u) \to 0\,,\; m \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Єдиність розв'язку. Від супротивного.

$$u = Au,\; v = Av \;=>\; \varrho(u, v) = \varrho(Au, Av) \le L\varrho(u, v)\,.$$

Якщо $\varrho(u, v) \ne 0$, то $1 \le L$. Суперечність.

Із попереднього також є оцінка похибки

$$\varrho(u_m, u) \le \frac{L^m}{1-L}\varrho(u, Au).$$

Розглянемо застосування теореми Банаха до розв'язності інтегрального рівняння Урисона

$$u(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,y,u(y))dy,\quad x\in[a,b]. \tag{1.33}$$

Тут $Au=\lambda\int\limits_a^b K(x,y,u(y))dy$.

Приклади:

1) за умови

$$K(x,y,u(y))=K(x,y)u(y)+f(x)\,,$$
$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,y)|^2dxdy=Q^2<+\infty\,,\ f\in L_2(a,b)$$

було доведено, що $Au\in L_2(a,b)$ при $u\in L_2(a,b)$ – оператор A діє з $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$; при $u_1,u_2\in L_2(a,b)$ маємо

$$\begin{aligned}
&||Au_1-Au_2||^2_{L_2(a,b)}=||\lambda[\mathcal{K}u_1-\mathcal{K}u_2]||^2_{L_2(a,b)}=\\
&\quad=|\lambda\int\limits_a^b |(\mathcal{K}u_1)(x)-(\mathcal{K}u_2)(x)|^2dx|^2=\\
&\quad=|\lambda|^2\int\limits_a^b |\int\limits_a^b K(x,y)[u_1(y)-u_2(y)]dy|^2dx\le\\
&\quad\le|\lambda|^2\int\limits_a^b \big[\int\limits_a^b |K(x,y)|^2dy\int\limits_a^b|u_1(y)-u_2(y)|^2dy\big]dx\le\\
&\quad\le|\lambda|^2\big[\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,y)|^2dxdy\big]\int\limits_a^b|u_1(y)-u_2(y)|^2dy\le\\
&\quad\le(|\lambda|Q)^2||u_1-u_2||^2_{L_2(a,b)}\,.
\end{aligned}$$

Отже, при $|\lambda|Q<1$ оператор A стисний і за теоремою Банаха в $L_2(a,b)$ існує єдиний розв'язок лінійного інтегрального рівняння

$$u(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy+f(x),\quad x\in[a,b];$$

2) нехай функція $K(x,y,u)$ неперервна на $\Omega:=[a,b]\times[a,b]\times[-h,h]$ ($h>0$) і задовольняє умову Ліпшиця за аргументом u:

$$\exists L_1>0:\forall(x,y,u_1),(x,y,u_2)\in\Omega\qquad |K(x,y,u_1)-K(x,y,u_2)|\le L|u_1-u_2|\,.$$

Нехай $S_h=\{u\in C([a,b]):\ ||u||:=||u||_{C([a,b])}\le h\}$. Тоді

$$||Au|| = \max_{x\in[a,b]} |\lambda \int_a^b K(x,y,u(y))dy| \le |\lambda| \max_{x,y\in[a,b],u\in S_h} |K(x,y,u(y))|(b-a),$$

так що $||Au|| \le h$ при $|\lambda| M(b-a) \le h$, де $M = \max_{(x,y,u)\in\Omega} |K(x,y,u(y))|$ – оператор A переводить повний метричний (тут банахів) простір S_h в себе;

для довільних $u, v \in S_h$

$$||Au - Av|| = |\lambda \max_{x,y\in[a,b],u,v\in S_h} \int_a^b [K(x,y,u(y)) - K(x,y,v(y))]dy| \le$$

$$\le |\lambda| L_1 \int_a^b |u(y) - v(y)|dy \le |\lambda| L_1 \max_{y\in[a,b]} |u(y) - v(y)| \int_a^b dy,$$

$||Au - Av|| \le |\lambda| L_1(b-a)||u - v||$ і є стисним при $|\lambda| L_1(b-a) < 1$.

Отож при $|\lambda| < \min\{\frac{h}{M(b-a)}, \frac{1}{L_1(b-a)}\}$ умови теореми Банаха виконуються – інтегральне рівняння (1.33) має єдиний розв'язок в S_h;

3) $u^{(\beta)} = u^2 + g(t)$ при $g \in C([0,T])$, $|g(t)| \le G$ при $t \in [0,T]$.

Маємо

$$f_{-\beta}(t) * u(t) = u^2 + g(t),$$

$$u(t) = f_\beta(t) * u^2(t) + f_\beta(t) * g(t);$$

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}[\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} u^2(\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau)d\tau] := Au(t),$$

і нехай $S = \{u \in C([0,T]) : ||u|| = \max_{t\in[0,T]} |u(t)| \le M\}$.

$$||Au|| \le \frac{1}{\Gamma(\beta)}[M^2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}d\tau + |\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau)d\tau|] \le$$

$$\le \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)}[M^2 t^\beta + t^\beta \max_{\tau\in[0,T]} |g(\tau)|] \le \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta [M^2 + G] \le \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}[M^2 + G].$$

Спочатку доведемо, що $||Au|| \le M$.

Нехай $a = \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$ і виберемо $M^2 \ge G$. Тоді $G \le M^2$, $a(M^2 + G) \le 2aM^2$ і умова $||Au|| \le M$ виконується при

$2aM^2 \le M <=> a \le \frac{1}{2M} <=> \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \le \frac{1}{2M}$, що є при достатньо малих T.

Перевіримо, чи оператор стисний на вибраній замкненій підмножині S повного метричного простору $C([0,T])$. Маємо

$$||Au_1 - Au_2|| \le \max_{t\in[0,T]} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |u_1^2(\tau) - u_2^2(\tau)|d\tau =$$

$$= \max_{t\in[0,T]} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} |u_1(\tau) + u_2(\tau)|\, |u_1(\tau) - u_2(\tau)|d\tau \le$$

$$\le \max_{t\in[0,T]} \frac{2M}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\, |u_1(\tau) - u_2(\tau)|d\tau \le$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \frac{2M}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\, d\tau \, ||u_1-u_2|| \leq \frac{2MT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} ||u_1-u_2|| \, .$$

Отже, оператор A стисний при $\frac{2MT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} < 1 <=> \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} < \frac{1}{2M}$.

Тому при вибраному $T > 0$ умови теореми Пікара виконані, а рівняння має єдиний розв'язок $u \in S$.

Теорема 14 (принцип Шаудера). *Якщо цілком неперервний оператор A відображає замкнену опуклу множину $\bar{S}$ повного метричного простору H на свою частину, то існує нерухома точка цього відображення: існує такий елемент $u \in \bar{S}$, що $Au = u$.*

Використовуються аналоги.

Теорема 15. *Якщо неперервний оператор A відображає замкнену опуклу множину $\bar{S}$ банахового простору H на свою компактну частину, то існує нерухома точка цього відображення.*

Теорема 16 (Лере-Шаудера). *Якщо цілком неперервний оператор A відображає весь банахів простір H в себе і для всіх розв'язків рівняння $u = \lambda A u$ при $\lambda \in [0, 1]$ виконана нерівність $||u|| \leq c$, то рівняння $u = Au$ має розв'язок.*

Теорема 17. *Якщо цілком неперервний оператор $A : \overline{S_r(0)} \to H$ (H – банахів простір) є таким, що*

$$\forall v : ||v|| = r \ => ||Av|| \leq ||v||,$$

то рівняння $u = Au$ має розв'язок.

Теорема 18. *Якщо цілком неперервний оператор $A : \overline{S_r(0)} \to H$ (H – банахів простір) є таким, що*

$$\forall \lambda > 1, \ \forall v : ||v|| = r \ => Av \neq v,$$

то рівняння $u = Au$ має розв'язок.

Приклад. Доведемо, використовуючи принцип Шаудера, що при неперервній і обмеженій $f(t, u, z)$ в області $\Omega = \{t \in [0, T], u, z \in \mathbb{R}\}$ існує розв'язок задачі

$$u^{''} = f(t, u(t), u'(t)), \ \ u(0) = 0, \ u(T) = 0. \tag{1.34}$$

Задача еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(t) = \int\limits_0^T G(t,s) f(s, u(s), u'(s)) ds, \tag{1.35}$$

де $G(t,s)$ – функція Гріна задачі (1.34).

Нехай $E = \{v \in C^1([0,T])\}$ – банахів простір з нормою $||v||_E = ||v||_{C^1[0,T]}$. Тоді u – класичний розв'язок задачі (1.34). Знаходимо функцію Гріна

$$G(t,s) = -\begin{cases} \frac{s(T-t)}{T}, & 0 \le s \le t \\ \frac{t(T-s)}{T}, & 0 \le t \le s. \end{cases}$$

Справді, розв'язок рівняння $G_{tt} = \delta(t-s)$ має вигляд

$$G = C_1(t)t + C_2(t)\,,$$

де

$$C_1'(t)t + C_2'(t) = 0\,,\ C_1'(t) = \delta(t-s)\,,$$
$$C_1(t) = \theta(t-s) + c_1\,,$$
$$C_2'(t) = -C_1'(t)t = -t\delta(t-s) = -s\delta(t-s)\,,$$
$$C_2(t) = -s\theta(t-s) + c_2\,,$$

і тоді

$$G(t,s) = (t-s)\theta(t-s) + c_1 t + c_2 \ \ (c_1, c_2 \text{ – довільні сталі});$$

з крайових умов

$$G(0,s) = -s\theta(-s) + c_2 = 0\,,$$
$$G(T,s) = (T-s)\theta(T-s) + c_1 T + c_2 = 0\,,$$

звідки

$$c_2 = s\theta(-s) = 0, \quad c_1 T = -(T-s)\theta(T-s) = -(T-s)\,,$$

а отже,

$$G(t,s) = (t-s)\theta(t-s) - \tfrac{t}{T}(T-s)\,,$$
$$G(t,s) = t - s - \tfrac{t}{T}(T-s) = \tfrac{tT - sT - tT + ts}{T} = -\tfrac{s(T-t)}{T} \text{ при } 0 \le s \le t\,,$$
$$G(t,s) = -\tfrac{t(T-s)}{T} \text{ при } 0 \le t \le s\,.$$

Зауважимо, що можна було знаходити фундаментальний розв'язок $G_1(t)$ рівняння $G_1'' = \delta(t)$, а потім, як для довільного рівняння зі сталими коефіцієнтами, записати, що $G(t,s) = G_1(t-s)$, і далі підставляти $G(t,s)$ у крайові умови задачі.

Маємо

$$(Av)(t) = \int\limits_0^T G(t,s) f(s, v(s), v'(s)) ds\,,\ |f(s,u,z)| \le M \ \text{ в } \Omega\,,$$

$$|G(t,s)| \le \max_{t\in[0,T]} \tfrac{t(T-t)}{T} = T/4 \ => ||Av||_{C[0,T]} \le MT^2/4\,,$$

$$(Av)'(t) = \tfrac{d}{dt}[-\int\limits_0^t \tfrac{s(T-t)}{T}\, f(s,v(s),v'(s))ds - \int\limits_t^T \tfrac{t(T-s)}{T} f(s,v(s),v'(s))ds] =$$

$$= \int\limits_0^t \tfrac{s}{T}\, f(s,v(s),v'(s))ds - \tfrac{t(T-t)}{T}\, f(t,v(t),v'(t)) -$$

$$- \int\limits_t^T \tfrac{T-s}{T} f(s,v(s),v'(s))ds + \tfrac{t(T-t)}{T}\, f(t,v(t),v'(t))\,,$$

$$||(Av)'||_{C([0,T])} \le \int\limits_0^T |f(s,v(s),v'(s))|\, ds \le MT\,,$$

$$||Av||_E = \max\{||Av||_{C([0,T])}, ||(Av)'||_{C([0,T])}\} \le$$

$$\le \max\{MT^2/4, MT\} = MT\max\{T/4, 1\}\,,$$

а отже, множина функцій Av ($v \in E$) рівномірно обмежена за нормою простору E;

$$|(Av)(t_1) - (Av)(t_2)| \le \int\limits_0^T |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, |f(s,v(s),v'(s))| ds \le$$

$$\le 2M|t_1 - t_2|\,,\ |(Av)'(t_1) - (Av)'(t_2)| \le 2M|t_1 - t_2|\,,$$

і тоді множина функцій (Av) ($v \in E$) одностайно неперервна за нормою простору E.

За лемою Арцела-Асколі оператор A цілком неперервний. За теоремою Шаудера існує така функція $u \in E$, що $Au = u$ – інтегральне рівняння (1.35), а отже, й задача (1.34) мають розв'язки.

При дослідженні крайових задач для півлінійних рівнянь з узагальненими функціями в крайових умовах виникають інтегральні рівняння у вагових просторах Лебега (див., наприклад, [11,14,16]).

Примітка. Якщо ядро нелінійного інтегрального рівняння вироджене, то його розв'язання, як у випадку лінійного інтегрального рівняння з виродженим ядром, можна також звести до розв'язання (уже нелінійної) алгебричної системи рівнянь, як було доведено у підрозділі 1.2.

1.11 Інтегральні рівняння першого роду

Лінійні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду можуть не мати розв'язків навіть при неперервних ядрах (на відміну від лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду). Наприклад, необхідною умовою існування неперервного на $[a,b]$ розв'язку рівняння

$$\int_a^x K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [a,b]$$

є умова $f(a) = 0$. Вона не виконується, зокрема, для рівнянь [17]:

$$\int_0^t (s+t)y(s)ds = \sin(t) + 1,$$
$$\int_0^t y(s)ds + 2ty(t) = \cos(t).$$

Також лінійне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{1.36}$$

навіть з неперервним ядром може не мати розв'язків.

Приклади:

1) $\int_0^1 u(y)dy = x$;

2) $\int_a^b [a_0(y)x^m + \cdots + a_{m-1}(y)x + a_m(y)]u(y)dy = f(x)$ може мати розв'язок тільки коли $f(x)$ також є певним поліномом;

3) для рівняння з симетричним ядром необхідно, щоб $f(x)$ розкладалась в ряд за власними функціями ядра (див. наступну теорему 19).

Ядро інтегрального рівняння Фредгольма називається *замкненим*, якщо

$$\int_a^b K(x,y)\omega(y)dy = 0, \ x \in [a,b] \ => \ \omega(x) = 0, \ x \in [a,b]. \tag{1.37}$$

Теорема 19 (Пікара). *При $f \in L_2(a,b)$ інтегральне рівняння Фредгольма першого роду (1.36) з замкненим симетричним ядром $K(x,y)$ має (причому* *єдиний) розв'язок у* $L_2(a,b)$ *тоді й тільки тоді, коли збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2. \tag{1.38}$$

Тут $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$, $f_k = (f, \varphi_k)$, λ_k *– характеристичні числа ядра* $K(x,y)$, $\varphi_k(x)$ *– його власні функції:* $\varphi_k(x) = \lambda_k \int\limits_a^b K(x,y)\varphi_k(y)dy$.

Доведення. Нехай існує розв'язок $u \in L_2(a,b)$ рівняння (1.36). Тоді для ортонормальної системи власних функцій ядра $K(x,y)$, використавши симетричність ядра $K(x,y)$, одержуємо

$$f_k = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int\limits_a^b \big[\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy\big]\varphi_k(x)dx =$$
$$= \int\limits_a^b \big[\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_k(x)dx\big]u(y)dy =$$
$$= \int\limits_a^b \big[\int\limits_a^b K(y,x)\varphi_k(x)dx\big]u(y)dy = \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_a^b u(y)\varphi_k(y)dy,$$

а отже, $\lambda_k f_k = (u, \varphi_k)$, тобто числа $c_k = \lambda_k f_k$ є коефіцієнтами Фур'є функції u. Відомо, що ряд із квадратів коефіцієнтів Фур'є функції з $L_2(a,b)$ збігається. Отримали збіжність ряду (1.38).

Навпаки, нехай збігається ряд (1.38). Тоді за теоремою Фішера-Ріса існує функція $u \in L_2(a,b)$, що має коефіцієнти $\lambda_k f_k$. Доведемо, що ця функція є розв'язком рівняння (1.36). За побудовою $f(x)$ і $\int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy$ мають однакові коефіцієнти Фур'є. І саме тільки так має бути для розв'язку рівняння (1.36) із замкненим ядром.

Примітка. Якщо (1.37) не виконується, то також може не бути розв'язку рівняння (1.36), або він може бути неєдиним. Справді, якщо існують такі функції ω_j ($j = 1, \ldots, m$), відмінні від тривіальних, що

$$\int\limits_a^b K(x,y)\omega_j(y)dy = 0,\ x \in [a,b],$$

то, крім u, функція $u + \sum\limits_{k=1}^{m} C_k \omega_k$ також є розв'язком рівняння (1.36) при довільних сталих C_k.

Теорема 20. *Якщо* L_2*-ядро* $K(x,y)$ *симетричне, додатно визначене, а рівняння (1.36) однозначно розв'язне, то послідовність*

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) + \lambda\big[f(x) - \int\limits_a^b K(x,y)u_{k-1}(y)dy\big], \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \lambda < \lambda_1,$$

де $u_0 \in L_2[a,b]$, λ_1 *– найменше характеристичне число ядра* $K(x,y)$, *збігається в* $L_2[a,b]$ *до розв'язку.*

Доведення. Нехай u – розв'язок рівняння, $u_k = u + v_k$. Тоді

$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,y)v_{k-1}(y)dy$,

$\int\limits_a^b v_k(x)\varphi_j(x)dx = \int\limits_a^b v_{k-1}(x)\varphi_j(x)dx - \lambda \int\limits_a^b \varphi_j(x)dx \int\limits_a^b K(x,y)v_{k-1}(y)dy \iff$

$c_{k,j} = c_{k-1,j} - \lambda \int\limits_a^b \big[\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_j(x)dx\big]v_{k-1}(y)dy \quad (c_{k,j} = \int\limits_a^b v_k(x)\varphi_j(x)dx)$,

$c_{k,j} = c_{k-1,j} - \frac{\lambda}{\lambda_j}c_{k-1,j} \iff c_{k,j} = c_{k-1,j}\big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\big) = \cdots = c_{0,j}\big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\big)^k$.

Маємо

$$\int\limits_a^b v_k^2 dx = \int\limits_a^b [u_k - u]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,j}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{0,j}^2\big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\big)^{2k}.$$

Тому що $\big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\big)^2 \le 1$, для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$

$$\int\limits_a^b v_k^2 dx = \int\limits_a^b [u_k - u]^2 dx < \varepsilon \iff u_k \to u \text{ в } L_2(a,b).$$

Примітка. Якщо ядро не є симетричним, то можна використовувати *метод невизначених коефіцієнтів*: шукаємо розв'язок рівняння (1.36) у вигляді розвинення за деякою повною ортонормальною системою функцій $\omega_k(x)$ на (a,b) з невідомими a_k: $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\omega_k(x)$. Підставляючи в рівняння, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_a^b K(x,y)\omega_k(y)dy = f(x) \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(x) = f(x),$$

де $h_k(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\omega_k(y)dy$ – відомі функції.

1.12 Поняття регуляризації. Згладжувальний функціонал

Означення. Операторне рівняння

$$Au = f, \quad A : X \to X \tag{1.39}$$

називається коректним, якщо воно має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від даних.

Звідси випливає, що оператор A^{-1} неперервний (якщо існує). Ця умова виконується, якщо оператор A є обмеженим знизу, тобто

$$\exists C > 0 : \ ||Ax|| \geq C||x|| \quad \forall x \in X.$$

Якщо A не є обмеженим знизу, то порушується неперервна залежність розв'язку від даних. Справді, тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n \in X : \ ||Au_n|| \leq \frac{1}{n}||u_n||,$$

при $x \in X$, $x_n = x + \sqrt{n}\frac{u_n}{||u_n||}$ матимемо

$$||A(x_n - x)|| = \sqrt{n}\frac{||Au_n||}{||u_n||} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

але за побудовою $||x_n - x|| = \sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Означення. *Регуляризацією* некоректного рівняння (1.39) називається заміна рівняння (1.39) сім'єю близьких коректних рівнянь.

Якщо оператор A у рівнянні (1.36) є обмеженим знизу, то іноді можна одержати його регуляризацію, замінивши рівняння (1.36) рівнянням

$$\tau u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f_\tau(x), \tag{1.40}$$

де $||f - f_\tau|| < \tau$.

Приклади:

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{t-s}u(s)ds = \frac{1}{4}e^t$; замінимо його рівнянням

$\tau u_\tau(t) + \int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{t-s}u_\tau(s)ds = \frac{1}{4}e^t$; $u_\tau(t) = \frac{1}{4\tau}e^t - \frac{e^t}{\tau}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-s}u_\tau(s)ds$;

одержане рівняння другого роду має вироджене ядро, його розв'язок

$u_\tau(t) = \frac{e^t}{1+4\tau}$ => $u(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} u_\tau(t) = e^t$;

2) $\int\limits_0^1 (4se^t + 3)u(s)ds = e^t + 1$; $u = t^2$ є розв'язком, але ще є інший, який можна знайти, замінивши це рівняння рівнянням [17]

$$\tau u_\tau(t) + \int\limits_0^1 (4se^t + 3)u_\tau(s)ds = e^t + 1,$$

а потім переходячи до границі при $\tau \to 0$. Справді, знаходимо розв'язок цього рівняння як рівняння з виродженим ядром:

$$V_1 = \int\limits_0^1 su_\tau(s)ds, \ V_2 = \int\limits_0^1 u_\tau(s)ds,$$

тоді

$$u_\tau(t) = \tfrac{1}{\tau}[-4e^t V_1 - 3V_2 + e^t + 1],$$

$$V_1 = \tfrac{1}{\tau}\int\limits_0^1 s[-4e^s V_1 - 3V_2 + e^s + 1]ds,$$

$$V_2 = \tfrac{1}{\tau}\int\limits_0^1 [-4e^s V_1 - 3V_2 + e^s + 1]ds,$$

$$\tau V_1 = -4V_1 - \tfrac{3}{2}V_2 + \tfrac{3}{2}, \ \tau V_2 = -4(e-1)V_1 - 3V_2 + e,$$

$$(\tau+4)V_1 + \tfrac{3}{2}V_2 = \tfrac{3}{2}, \ 4(e-1)V_1 + (\tau+3)V_2 = e,$$

$$V_1 = \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3-e+\tau}{\tau^2+7\tau-6e+18)}, \ V_2 = \tfrac{(\tau-2)e+6}{\tau^2+7\tau-6e+18)},$$

$$u(t) = \lim_{\tau\to 0} u_\tau(t) = \lim_{\tau\to 0}\tfrac{1}{\tau}[-4e^t V_1 - 3V_2 + e^t + 1] =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\tfrac{e^t(\tau+3)+\tau+7-3e}{\tau^2+7\tau-6e+18} = \tfrac{3e^t+7-3e}{6(3-e)}.$$

Не завжди так просто отримати регуляризацію некоректного рівняння.

Регуляризованим за Тихоновим розв'язком операторного рівняння

$$Au = f, \quad A: \ X \to X \tag{1.41}$$

називається елемент $u_\tau(f) = R_\tau(f)$ простору X, який мінімізує в $L_2(0,b)$ *функціонал Тихонова (згладжувальний функціонал)*

$$M_\tau(u,f) = ||Au - f|| + \tau||u||'$$

з деяким параметром τ, який називається параметром регуляризації.

Для рівняння

$$\int\limits_0^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [0,b] \tag{1.42}$$

з неперервними ядром і f вибирають

$$||u||' = \int_0^b \{p(y)[u'(y)]^2 + q(y)[u(y)]^2\} dy$$

з $p \in C^1([0,b])$, $q \in C([0,b])$ і шукають мінімум функціонала $M_\tau(u,f)$ у класі таких $u \in C^2[0,b]$, що

$$u'(0) = 0, \quad u'(b) = 0. \tag{1.43}$$

З курсу варіаційного числення відомо, що мінімум функціонала реалізується на тій функції, за якої варіація цього функціонала дорівнює нулю (вона називається екстремаллю функціонала). Знайдено, що екстремаллю функціонала $M_\tau(u,f)$ є розв'язок рівняння

$$(pu')'(x) - (qu)(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^b \tilde{K}(x,t)u(t)dt - \frac{1}{\tau}\tilde{f}(x), \tag{1.44}$$

де $\tilde{K}(x,t) = \int\limits_0^b K(y,t)K(y,x)dy$, $\tilde{f}(x) = \int\limits_0^b K(y,x)f(y)dy$.

Можна довести, що при $p(x) > 0$, $q(x) \leq 0$, $x \in [0,b]$ крайова задача

$$(pu')'(x) - (qu)(x) = 0, \ x \in (0,b), \ \ u'(0) = 0, \ u'(b) = 0$$

має єдиний розв'язок $u(x) = 0$. Тому існує функція Гріна $G(x,y)$ цієї крайової задачі, а задача (1.44) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_0^b G(x,y)\Big\{\frac{1}{\tau}\int_0^b \tilde{K}(y,t)u(t)dt - \frac{1}{\tau}\tilde{f}(y)\Big\}dy,$$

тобто інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду

$$u(x) = \int_0^b T(x,t)u(t)dt + F(x), \ x \in [0,b], \tag{1.45}$$

з неперервним ядром, що має єдиний розв'язок.

Теорема 21. *При неперервних ядрі і f існує єдина функція $u \in C^2[0,b]$, що задовольняє умови (1.43) і мінімізує функціонал M_τ.*

Розділ 2

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Рівняння з дробовими похідними та задачі для них

Багато важливих фізичних процесів описують за допомогою задач для рівнянь з похідними дробових порядків, які можна подати як інтегро-диференціальні рівняння, в окремих випадках як інтегральні рівняння.

1. Нехай $f{*}g$ – згортка звичайних функцій f і g

$$(f{*}g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Якщо $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q \geq 1$, то існує $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$, де $1/r = 1/p + 1/q - 1$, причому

$$||f * g||_{L_r} \leq ||f||_{L_p} \, ||g||_{L_q},$$

зокрема, $r = 1$ при $p = q = 1$, $r = \infty$ при $p = 1$, $q = \infty$ або $p = q = 2$.

Якщо $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то існує $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Якщо $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ і хоч одна з них фінітна, то існує $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Якщо $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ й обидві функції мають носії на $[0, +\infty)$, то існує $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $f * g$ має носій на $[0, +\infty)$ і визначається формулою

$$(f * g)(x) = \theta(x) \int\limits_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi\,,$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда. В усіх цих випадках згортка комутативна.

Позначаємо через $\widehat{*}$ операцію *згортки узагальненої функції g та основної функції φ*

$$(g\widehat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)).$$

Нагадаємо, що *згорткою узагальнених функцій f і g* називається узагальнена функція $f*g$:

$$(f*g, \varphi) = (f, g\widehat{*}\varphi) \text{ для кожної основної функції } \varphi.$$

Якщо $f, g \in \mathcal{D}'$ і хоч одна з них фінітна, то існує $f*g \in \mathcal{D}'$.

За умови існування $f*g$ правильна формула диференціювання згортки

$$D^\gamma(f*g) = D^\gamma f * g = f * D^\gamma g = D^\beta f * D^{\gamma-\beta} g;$$

також $\delta * f = f * \delta = f$, $\quad D^\gamma\delta * f = D^\gamma(\delta * f) = D^\gamma f$.

Алгебра згортки $\mathcal{D}'_+$ і дробове диференціювання

Нехай $D'_+(\mathbb{R}) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$.

Це простір узагальнених функцій з носіями на $[0, \infty)$. Якщо $f \in D'_+(\mathbb{R})$, то $f' \in D'_+(\mathbb{R})$, $af \in D'_+(\mathbb{R})$ для довільної $a \in C^\infty$.

Якщо $f, g \in \mathcal{D}'_+$, то існує комутативна згортка $f*g \in \mathcal{D}'_+$.

Із врахуванням цієї теореми простір $D'_+(\mathbb{R})$ є комутативною (та асоціативною) алгеброю згортки (операцією "множення"елементів f, g є їхня згортка, одиничним елементом є δ-функція Дірака).

Використовують функцію з $D'_+(\mathbb{R})$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0,$$
$$f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Правильні співвідношення $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Зауважимо, що

$f_1(t) = \theta(t)$, $f_0(t) = \delta(t)$, $f_{-1}(t) = f'_0(t) = \delta'(t)$,
$f_{-n}(t) = f_0^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t)$ при $n \in \mathbb{N}$, а тоді
$(f_{-n} * g)(t) = (\delta^{(n)} * g)(t) = g^{(n)}(t)$ для довільної $g \in \mathcal{D}'_+$.

Враховуючи цей факт, визначають *похідну дробового порядку* $\alpha > 0$ (похідну Рімана-Ліувілля) функції $v \in \mathcal{D}'_+$ формулою

$$v^{(\alpha)}(t) = f_{-\alpha}(t) * v(t) = f^{(n)}_{n-\alpha}(t) * v(t) = \frac{d^n}{dt^n}\big(f_{n-\alpha}(t) * v(t)\big),$$

первісну дробового порядку $\alpha > 0$ функції $v \in \mathcal{D}'_+$ формулою

$$I_\alpha(t) = f_\alpha(t) * v(t),$$

похідну Вейля $f_\alpha(t) \widehat{*} v(t)$ порядку α,

похідну Капуто (Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто) порядку $\alpha \in (n-1, n)$

$$D^\alpha v(t) = f_{n-\alpha}(t) * v^{(n)}(t) \quad (D^1 v(t) = v'(t)).$$

У цій формулі похідна $v^{(n)}(t)$ у класичному розумінні.

Зокрема, похідна $v^{(\alpha)}(t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(t)$

$$v^{(\alpha)}(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \tfrac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} v(\tau) d\tau \text{ при } \alpha \in (n-1, n)\,,$$

регуляризована дробова похідна (похідна Капуто)

$$D_t^\alpha v(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tfrac{d^n}{d\tau^n} v(\tau) d\tau \text{ при } \alpha \in (n-1, n)$$

за умов існування інтегралів.

Звідси при $\alpha \in (0, 1)$ одержуємо

$$v^{(\alpha)}(t) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha} v(\tau) d\tau\,,$$

$$\begin{aligned} D^\alpha v(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha} v'(\tau) d\tau = \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \tau^{-\alpha} v'(t-\tau) d\tau = \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} [\tfrac{d}{dt} \int\limits_0^t \tau^{-\alpha} v(t-\tau) d\tau - t^{-\alpha} v(0)] = \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha} v(\tau) d\tau - \tfrac{v(0)}{\Gamma(1-\alpha) t^\alpha}\,, \end{aligned}$$

і зв'язок між регуляризованою похідною та похідною Рімана-Ліувілля дробового порядку $\alpha \in (0, 1)$

$$D^\alpha v(t) = v^{(\alpha)}(t) - f_{1-\alpha}(t) v(0). \tag{2.1}$$

Відоме рівняння Абеля

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{-\gamma} u(\xi) d\xi = g(x), \quad \gamma \in (0, 1),$$

яке є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри першого роду з різницевим полярним ядром, записуємо у вигляді рівняння у згортках

$$\Gamma(1-\gamma)f_{1-\gamma}(x) * u(x) = g(x).$$

Фундаментальною функцією є $\omega(x) = \frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)}$ ($f_{1-\gamma}(x) * f_{\gamma-1}(x) = f_0(x) = \delta(x)$). Знаходимо єдиний розв'язок рівняння Абеля

$\frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)} * \Gamma(1-\gamma)f_{1-\gamma}(x) * u(x) = \frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)} * g(x)$,

$$u(x) = \frac{f_{\gamma-1}(x)}{\Gamma(1-\gamma)} * g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} f'_{\gamma}(x) * g(x),$$

який за умов $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $g(0) = 0$ набуває класичного вигляду

$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} f_{\gamma}(x) * g'(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^x (x-\xi)^{\gamma-1} g'(\xi) d\xi.$

Розглянемо тепер рівняння

$$T^{(\alpha)} + \lambda T = f(t). \tag{2.2}$$

Зауважимо, що лінійне однорідне рівняння

$${}^C D^{\alpha} u + a(t) u = 0,$$

(різновид дробових диференціальних рівнянь Ріккаті) є рівнянням ядерного розпаду. Тут $u(t)$ – кількість радіонуклідів, наявних у радіоактивному середовищі. Розв'язання цієї форми рівнянь надзвичайно важливе через його застосування в галузі ядерної енергетики.

Використовуємо функцію Міттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\Gamma(p\alpha + \mu)} \quad (E_{1,1}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} = e^x).$$

Функція $E_{\alpha,\mu}(-x)$ ($x > 0$)– нескінченно диференційовна при $\alpha \in (0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ та має оцінку

$E_{\alpha,\mu}(-x) \leq \frac{r_{\alpha,\mu}}{1+x}, \quad x > 0,$ де $r_{\alpha,\mu}$ – додатна стала.

Лема 1. *При довільних сталих* $\lambda > 0$, $\alpha \in (0,2)$ *функція*

$$T(t) = \theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) \tag{2.3}$$

є фундаментальним розв'язком рівняння (2.2), тобто

$$T^{(\alpha)} + \lambda T = \delta(t) \tag{2.4}$$

($\delta(t)$ – дельта-функція Дірака). Цей розв'язок єдиний у $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Доведення. Записуємо рівняння (2.4) у вигляді

$$f_{-\alpha} * T + \lambda T = \delta(t).$$

Діючи на нього оператором $f_\alpha *$, одержуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з полярним ядром

$$T = -\lambda f_\alpha * T + f_\alpha,$$

$$T(t) = \frac{\theta(t)}{\Gamma(\alpha)}[-\lambda \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} T(\tau) d\tau + t^{\alpha-1}],$$

яке розв'язуємо методом послідовних наближень

$$T^0(t) = f_\alpha(t),$$
$$T^1(t) = f_\alpha(t) - \lambda f_\alpha(t) * f_\alpha(t) = f_\alpha(t) - \lambda f_{2\alpha}(t),$$
$$T^2(t) = T^0(t) - \lambda f_\alpha(t) * T^1(t) = f_\alpha(t) - \lambda f_{2\alpha}(t) + \lambda^2 f_{3\alpha}(t),$$
$$\ldots$$

За методом математичної індукції знаходимо

$$T(t) = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} f_{p\alpha}(t) = \theta(t) \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^m f_{m\alpha+\alpha}(t)$$
$$= \theta(t) \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^m \tfrac{t^{m\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha+\alpha)} = \theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha).$$

Приклади:

1) $T^{(3/2)} + \lambda T = \delta$;

$$T(t) = \theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) = \theta(t) t^{1/2} E_{3/2,3/2}(-\lambda t^{3/2}),$$
$$T(t) = \theta(t) t^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda t^{3/2})^p}{\Gamma(\frac{3p+3}{2})};$$

2) $T^{(3/2)} + \lambda T = 2t$;

$$T(t) = \theta(t) t^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda t^{3/2})^p}{\Gamma(\frac{3p+3}{2})} * (2t),$$
$$T(t) = 2 \int\limits_0^t \tau^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda \tau^{3/2})^p}{\Gamma(\frac{3p+3}{2})} (t-\tau) d\tau.$$

Лема 2. *При довільних сталих $\lambda > 0$, $\alpha \in (0,1)$ функція*

$$T(t) = f(t) - \lambda \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau$$

$$(T(t) = f(t) - \lambda \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^\alpha) f(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \ \ (A))$$

є розв'язком рівняння

$$T(t) = -\lambda \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} T(\tau) d\tau + f(t).$$

Доведення. За методом послідовних наближень:

$$T^0(t) = f(t),$$
$$T^1(t) = f(t) - \lambda f_\alpha(t) * f(t),$$
$$T^2(t) = f(t) - \lambda f_\alpha(t) * T^1(t) =$$
$$= f(t) - \lambda f_\alpha(t) * [f(t) - \lambda f_\alpha(t) * f(t)] =$$
$$= f(t) - \lambda(f_\alpha * f)(t) + \lambda^2 (f_\alpha * f_\alpha * f)(t) =$$
$$= f(t) - \lambda(f_\alpha * f)(t) + \lambda^2 (f_{2\alpha} * f)(t),$$
$$\ldots$$

За методом математичної індукції знаходимо

$$T(t) = f(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-\lambda)^m (f_{m\alpha} * f)(t) =$$
$$[p = m-1, m = p+1]$$
$$= f(t) + \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^{p+1} (f_{p\alpha+\alpha} * f)(t) =$$
$$= f(t) - \theta(t) \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^{p+1} \tfrac{t^{p\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(p\alpha+\alpha)} * f(t) =$$
$$= f(t) - \theta(t) \lambda t^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^{p} \tfrac{t^{p\alpha}}{\Gamma(p\alpha+\alpha)} * f(t) =$$
$$= f(t) - \lambda[\theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)] * f(t).$$

Приклад. $T(t) = -\lambda \int\limits_0^t (t-\tau)^{1/2} T(\tau) d\tau + \sin(t)$;

$$T(t) = f(t) - \lambda \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^\alpha) f(t-\tau) d\tau,$$

$$T(t) = \sin(t) - \lambda \int\limits_0^t \tau^{1/2} E_{3/2,3/2}(-\lambda\tau^{3/2}) \sin(t-\tau) d\tau,$$

$$T(t) = \sin(t) - \lambda \int\limits_0^t \sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{(-\lambda\tau^{3/2})^p}{\Gamma(\frac{3p+3}{2})} \sin(t-\tau) d\tau;$$

2. У застосуваннях часто трапляються рівняння

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^\alpha}+\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_2^\alpha}=f(x_1,x_2),\ \ \alpha\in(1,2),$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ \beta\in(0,2).$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}=\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}+f(x,t),\ \ \beta,\alpha\in(0,2),$$

а електромагнітні хвилі в діелектриках описуються такими рівняннями при $\beta\in(1,2)$ і $\beta\in(2,3)$.

Перехід до дробової похідної за часом (на відміну від похідної цілого порядку, яка є локальною) дає змогу врахувати ефекти пам'яті системи.

Як виникають рівняння дробової дифузії. Закон Фур'є

$$q(x,t)=-k\, grad\, u(x,t)\,,$$

враховуючи пам'ять, замінюють на закон

$$q(x,t)=-k\int\limits_0^t K(t-\tau) grad\, u(x,\tau)d\tau$$

або

$$q(x,t)=-k\tfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau) grad\, u(x,\tau)d\tau\,,$$

і тоді замість рівняння $u_t=a^2\Delta u$ одержують

$$u_t=a^2\int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau \ \text{ або } \ u_t=a^2\tfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau\,.$$

З цього, інтегруючи, знаходимо

$$u(x,t)-u(x,0)=a^2\int\limits_0^t f_\alpha(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau\ \ (=a^2 I_\alpha\Delta u(x,t))\,,$$

а діючи оператором D^α і враховуючи, що $D^\alpha 1=0$, $D^\alpha I_\alpha u=u$, одержимо

$${}^C D^\alpha u=a^2\Delta u\,.$$

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$D_t^\alpha u-u_{xx}=g(t)F_0(x)+h(x,t),\ (x,t)\in(0,l)\times(0,t_0]:=Q, \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t\in[0,t_0], \tag{2.6}$$

$$u(x,0)=F_1(x),\quad u_t(x,0)=F_2(x),\quad x\in[0,l]. \tag{2.7}$$

Розв'язком задачі (2.5)-(2.7) називається функція $u\in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$, що задовольняє рівняння (2.5) в Q та умови (2.6), (2.7). Другої початкової умови немає при $\alpha \in (0,1]$. Тут $C(Q_0)$, $C(\bar{Q}_0)$, $C([0,t_0])$ – класи неперервних, відповідно, в Q_0, $\bar{Q}_0$ та на $[0,t_0]$ функцій,

$C_{2,\alpha}(Q_0) = \{v \in C(Q_0):\ v_{xx}, D_t^\alpha v \in C(Q_0)\}$,

$C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) = C_{2,\alpha}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0)$ при $\alpha \in (0,1]$.

Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (x,t) \in Q \tag{2.8}$$

за власними функціями $\sin\frac{k\pi x}{l}$ ($k = 1,2,\dots$) задачі Штурма-Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,l), \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{2.9}$$

Для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ одержуємо задачі Коші

$$D^\alpha T_k + \lambda_k T_k = g(t)F_{0k} + h_k(t) \quad t \in (0,t_0), \tag{2.10}$$

$$T_k(0) = F_{1k}, \quad T_k'(0) = F_{2k}, \quad k = 1,2,\dots \tag{2.11}$$

де $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, F_{0k}, F_{1k}, F_{2k}, $h_k(t)$ – коефіцієнти розвинення, відповідно, функцій $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $h(x,t)$ за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля

$h(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$,

$F_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_{jk} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad j = 0,1,2$.

Використовуючи зв'язок (2.1) між похідними дробового порядку Капуто та Рімана-Ліувілля, зводимо кожну з задач (2.10), (2.11) при $\alpha \in (0,1]$ до рівняння

$$T_k^{(\alpha)} + \lambda_k T_k = g(t)F_{0k} + h_k(t) + f_{1-\alpha}(t)F_{1k},\ \ t \in (0,t_0]$$

і за лемою 1 одержуємо його розв'язок

$$T_k(t) = F_{0k} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t) + \tag{2.12}$$

$$+ t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * h_k(t) + F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha),\ t \in (0,t_0].$$

Нехай

$\tilde{C}^1(0,l) = \{F \in C[0,l] \cap C^1(0,l):\ F(0) = F(l) = 0\}$,

$\tilde{C}^1(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) : v(\cdot,t) \in \tilde{C}^1(0,l) \quad \forall t \in (0,t_0]\}$.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \in (0,1]$, $g \in C[0,t_0]$, $h \in \tilde{C}^1(Q_0)$, $F_1 \in \tilde{C}^1(0,l)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ *задачі (2.5)–(2.7). Він має вигляд (2.8), де* $T_k(t)$ *визначаються формулою (2.12). Правильні оцінки*

$$||u||_{C(Q_0)} \leq a_0||h||_{C(Q_0)} + a_0||F_0||_{C(0,l)} + a_1||F_1||_{C(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q_0)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q_0)} \leq \widehat{a}_0||h||_{C^1(Q_0)} + \widehat{a}_0||F_0||_{C^1(0,l)} + \widehat{a}_1||F_1||_{C^1(0,l)},$$

де $a, a_0, a_1, \widehat{a}, \widehat{a}_0, \widehat{a}_1$ *– додатні сталі.*

Тут $\quad ||v||_{C(Q_0)} = \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |v(x,t)|$, $||v||_{C^r(0,l)} = \max\limits_{m=\overline{0,r}} \sup\limits_{x\in(0,l)} |v^{(m)}(x)|$,

$$||v||_{C^r(Q_0)} = \max_{m=\overline{0,r}} \max_{t\in[0,t_0]} \sup_{(x,t)\in Q_0} |\tfrac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m}|, \; r = 0,1,\ldots$$

2.2 Інтегральні рівняння Фредгольма з полярними ядрами у методі потенціалу

Багато задач практики мають математичними моделями крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Одним з методів їх розв'язання є метод зведення до інтегральних рівнянь. Проілюструємо його на прикладі крайових задач для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \; x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

яке коротко записуємо як

$$\Delta u = 0,$$

і рівняння Пуассона

$$\Delta u = f(x).$$

Вивчаємо ці рівняння і задачі для них в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою поверхнею S класу C^1, тобто такою, що у кожній точці поверхні S визначена дотична площина, а отже, і нормаль. Далі $\nu(x)$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S у точці $x \in S$,

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)), \; \nu_j(x) = \cos(\nu(x), Ox_j), \; j = 1,2,3.$$

Тоді рівняння всієї поверхні або кожної її частини можна задати за допомогою неперервно диференційовних функцій.

Також задачі розглядаємо в області Ω_e ззовні поверхні S. Зовнішня нормаль до Ω_e направлена всередину області Ω.

Рівняння Лапласа в плоскій області

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,\ x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

коротко записуємо також як

$$\Delta u = 0,$$

а рівняння Пуассона як $\Delta u = f(x)$. Тут межею області Ω є плоска лінія S, а $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$ – орт зовнішньої нормалі до неї у точці $x \in S$.

Класичні розв'язки рівнянь належать $C^2(\Omega)$, тобто двічі неперервно диференційовні в області. Вони, як відомо, називаються *гармонічними* функціями. *Фундаментальні* розв'язки мають особливості в точці. Це

$$\omega_3(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x-x_0|},\ x_0 \in \mathbb{R}^3,\ \omega_2(x, x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-x_0|},\ x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

1. Формули Гріна

Основні властивості розв'язків рівнянь і крайових задач для них виплива-ють із формул Гріна:

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\, dx = \int\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS - \int\limits_{\Omega} [\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}]\, dx \qquad (2.13)$$

– перша формула Гріна для оператора Лапласа,

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_{S} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\, dS, \quad u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}). \qquad (2.14)$$

– друга формула Гріна для оператора Лапласа, які правильні для довільних $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S} (\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\frac{1}{|y-x|} - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\frac{1}{|y-x|})\, dS_y - \qquad (2.15)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta u(y)\frac{1}{|y-x|}dy = u(x),\ x \in \Omega$$

– третя формула Гріна для оператора Лапласа, яка правильна для довільної функції $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Це інтегральне зображення довільної функції

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ через її значення на S, значення її похідної за напрямом нормалі $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}$ в точках поверхні S ($y \in S$) і значення Δu в Ω. Також

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y - \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \Delta u(y) \frac{1}{|y-x|} dy = 0, \ x \in \Omega_e,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y - \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \Delta u(y) \frac{1}{|y-x|} dy = \frac{1}{2} u(x), \tag{2.16}$$

$x \in S$ (остання рівність, на S, є за додаткової умови, що S – поверхня Ляпунова).

Якщо Ω – область в $\mathbb{R}^2$, то так само одержуємо інтегральне зображення довільної функції $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{|y-x|} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \ln \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_\Omega \Delta u(y) \ln \frac{1}{|y-x|} \, dy, \ x \in \Omega.$$

Якщо додатково функція $u(x)$ гармонічна в області, тобто ще й

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega,$$

то в останніх чотирьох формулах доданка, що містить інтеграл по Ω, не буде.

Ці формули – базові для методу крайових елементів (числового методу розв'язування крайових задач). Ідея така: якщо треба розв'язати, наприклад, внутрішню задачу Діріхле (те саме, що першу внутрішню крайову задачу)

$$\Delta u(x) = f(x), \ \ x \in \Omega, \ \ u|_{x \in S} = f_1(x), \ \ x \in S,$$

то з (2.15) одержуємо

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|y-x|} - f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\right) dS_y -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega f(y) \frac{1}{|y-x|} \, dy, \ \ x \in \Omega.$$

Тут ми не знаємо $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}$, $y \in S$. Нехай $\mu(y) = \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}$, $y \in S$. Тоді з формули (2.16)

$$\int\limits_S \mu(y) \frac{1}{|y-x|} dS = \int\limits_S f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|}\, dS_y + \tag{2.17}$$

$$+ \int\limits_\Omega f(y) \frac{1}{|y-x|}\, dy, \quad x \in \Omega_e.$$

Права частина відома. Позначимо її через $F(x)$. Одержане рівняння

$$\int\limits_S \mu(y) \frac{1}{|y-x|} dS = F(x), \quad x \in \Omega_e$$

– це інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для знаходження невідомої функції $\mu(y)$, $y \in S$. Розв'язавши його, з попередньої рівності знайдемо розв'язок задачі Діріхле

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left[\mu(y) \frac{1}{|y-x|} - f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|} \right] dS_y - \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega f(y) \frac{1}{|y-x|} dy, \ x \in \Omega.$$

Рівняння (2.17) збігається з певним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду на межі області (поверхні S). Вивчено наближені методи розв'язування рівняння (2.17).

Також із формул (2.15) і (2.16) випливає, що задача Коші

$$\Delta u(x) = f(x), \ \ x \in \Omega, \ \ u|_{x \in S} = f_1(x), \ \ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}|_{x \in S} = f_2(x), \ \ x \in S$$

для рівняння Пуассона (і Лапласа) не при довільних даних f_1, f_2 на межі має розв'язок. Справді, з формули (2.15) маємо сам розв'язок

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left[f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|} - f_2(y) \frac{1}{|y-x|} \right] dS_y -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega f(y) \frac{1}{|y-x|}\, dy, \ \ x \in \Omega.$$

Тут права частина відома. Але з формули (2.16)

$$\int\limits_S (f_1(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y-x|} - f_2(y) \frac{1}{|y-x|}) dS_y - \int\limits_\Omega f(y) \frac{1}{|y-x|} dy = 0, \ \ x \in \Omega_e.$$

А це зв'язок між даними (f, f_1, f_2), тобто довільними вони не можуть бути.

Із формул Гріна виводяться основні властивості гармонічних функцій (а отже, і розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа).

2. Властивості потенціалів для оператора Лапласа

У формулі (2.15) є три інтеграли – інтеграли, залежні від параметра x (точніше, від параметрів x_1, x_2, x_3). Це *об'ємний потенціал*

$$V(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(y) \frac{1}{|y-x|}\, dy$$

із густиною $\varrho(y) = \frac{\Delta u(y)}{4\pi}$, *поверхневий потенціал простого шару*

$$v(x) = \int\limits_{S} \mu(y) \frac{1}{|y-x|}\, dS_y$$

з *густиною* $\mu(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)}$, *поверхневий потенціал подвійного шару*

$$w(x) = \int\limits_{S} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|y-x|}\, dS_y$$

з *густиною* $\mu(y) = \frac{u(y)}{4\pi}$.

Ці означення не випадкові, а мають фізичний зміст.

Підінтегральні функції мають оцінки $\frac{A}{|x-y|^{\gamma}}$, де $\gamma = 1$ для потенціалів $V(x)$ і $v(x)$ із неперервними (а отже, обмеженими деякою сталою A густинами), $\gamma = 2$ для потенціалу $w(x)$.

Із математичного аналізу відомо, що інтеграл $\int\limits_D \frac{1}{|y-x|^{\gamma}}\, dy$ рівномірно в D збігається при $\gamma < dimD$ і є неперервною функцією в D .

Поверхня S має розмірність $dimS = 2$, а $dim\Omega = 3$. Тому потенціали $V(x)$ і $v(x)$ є неперервними функціями в усій області (поза областю інтегрування підінтегральні функції не мають особливостей, бо $x \neq y$, y – змінна інтегрування).

Також $|\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}| \leq \frac{A_1}{|x-y|^2}$, $2 < 3$, а отже, $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Але $\gamma = 2 = dimS$ для поверхневого потенціалу подвійного шару $w(x)$,

$|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_j^2}| \leq \frac{A_2}{|x-y|^3}$ ($\gamma = 3 = dim\Omega$) для об'ємного потенціалу $V(x)$, тому без додаткових припущень такі інтеграли не існують: не існує потенціал $w(x)$

при $x \in S$, а потенціал $V(x)$ при $x \in \Omega$ (при x поза S інтеграл $w(x)$ є нескінченно диференційовною функцією, бо $y \in S$ і тому $x \neq y$, так само при x поза Ω інтеграл $V(x)$ є нескінченно диференційовною функцією, бо $y \in \Omega$ і тому $x \neq y$).

Для існування $\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_j^2}$ робиться додаткове припущення на густину $\rho(y)$. При $\rho \in C^1(\Omega)$ і обмеженій похідній другого порядку об'ємного потенціалу існують, є неперервними в усьому просторі та

$$\Delta V(x) = -4\pi\rho(x), \;\; x \in \Omega, \quad \Delta V(x) = 0, \;\; x \in \Omega_e. \tag{2.18}$$

Для існування поверхневого потенціалу подвійного шару $w(x)$ у точках $x \in S$ можна також додатково припускати, що $\mu \in C^1(S)$, але можна залишати $\mu \in C(S)$, якщо поверхня S має більшу гладкість – є поверхнею Ляпунова.

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial \nu_y}\big(\tfrac{1}{|x-y|}\big) = \tfrac{\partial}{\partial y_1}\big(\tfrac{1}{|x-y|}\big)\nu_1(y) + \tfrac{\partial}{\partial y_2}\big(\tfrac{1}{|x-y|}\big)\nu_2(y) + \tfrac{\partial}{\partial y_3}\big(\tfrac{1}{|x-y|}\nu_3(y)\big) = \\
&\qquad = -\tfrac{y_1-x_1}{|x-y|^3}\nu_1(y) - \tfrac{y_2-x_2}{|x-y|^3}\nu_2(y) - \tfrac{y_3-x_3}{|x-y|^3}\nu_3(y) = \\
&\qquad = -\tfrac{1}{|x-y|^2}\big[\tfrac{y_1-x_1}{|x-y|}\nu_1(y) + \tfrac{y_2-x_2}{|x-y|}\nu_2(y) + \tfrac{y_3-x_3}{|x-y|}\nu_3(y)\big] = \\
&\qquad = -\tfrac{1}{|x-y|^2}[\cos(\overline{xy}, Oy_1)\nu_1(y) + \cos(\overline{xy}, Oy_2)\nu_2(y) + \cos(\overline{xy}, Oy_3)\nu_3(y)] = \\
&\qquad = -\tfrac{1}{|x-y|^2}[\cos(\overline{xy}, Oy_1)\cos(\overline{\nu}_y, Oy_1) + \cos(\overline{xy}, Oy_2)\cos(\overline{\nu}_y, Oy_2) + \\
&\qquad + \cos(\overline{xy}, Oy_3)\cos(\overline{\nu}_y, Oy_3)] = -\tfrac{\cos(\overline{xy},\overline{\nu}_y)}{|x-y|^2} = \tfrac{\cos(\overline{yx},\overline{\nu}_y)}{|x-y|^2},
\end{aligned}$$

де $\overline{xy}$ – вектор з початком у точці x і кінцем у точці y. Подібно

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial \nu_x}\tfrac{1}{|x-y|} = -\tfrac{1}{|x-y|^2}\big[\tfrac{x_1-y_1}{|x-y|}\nu_1(x) + \tfrac{x_2-y_2}{|x-y|}\nu_2(x) + \tfrac{x_3-y_3}{|x-y|}\nu_3(x)\big] = \\
&\qquad = -\tfrac{\cos(\overline{yx},\overline{\nu}_x)}{|x-y|^2} = \tfrac{\cos(\overline{xy},\overline{\nu}_x)}{|x-y|^2}.
\end{aligned}$$

Якщо S є поверхнею Ляпунова, то

$|\cos(\overline{yx}, \overline{\nu}_y)| \leq C|x-y|^\alpha$ (також $|\cos(\overline{xy}, \overline{\nu}_x)| \leq C|x-y|^\alpha$)
при близьких $x, y \in S$, $\alpha \in (0,1)$.

Тоді одержимо, що

$$|\frac{\partial}{\partial \nu_y}(\frac{1}{|y-x|})| \leq \frac{A_3}{|x-y|^{2-\alpha}}$$

при малих $|x-y|$, $x,y\in S$ і при деякому числі $\alpha\in(0,1)$, якщо S є поверхнею Ляпунова, а отже, $\gamma=2-\alpha<2$, і цей інтеграл (поверхневий потенціал подвійного шару $w(x)$) рівномірно збігається на S.

Хоч поверхневий потенціал подвійного шару є неперервною функцією у точках поверхні S (якщо S – поверхня Ляпунова), нескінченно диференційовним поза S, він має розрив у точках поверхні S (граничні значення його на S зсередини і ззовні різні). Це випливає з формул (2.15) і (2.16): ліва частина (2.15) дорівнює $u(x)$ при $x\in\Omega$, дорівнює нулю при $x\in\Omega_e$, а коли S – поверхня Ляпунова, то дорівнює $\frac{1}{2}u(x)$ при $x\in S$. І це саме через поверхневий потенціал подвійного шару у лівій частині (2.15).

Відомі [4] формули стрибків (формули граничних значень на S, відповідно, зсередини області Ω і ззовні) для поверхневого потенціалу подвійного шару

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|}dS_y=\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y-2\pi\mu(x_0), \quad (2.19)$$

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|}dS_y=\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y+2\pi\mu(x_0).$$

Подібні властивості мають похідні першого порядку від поверхневого потенціалу простого шару $\frac{\partial}{\partial\nu_x}v(x)=\int\limits_S\mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y$ при x поза S,

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x-y|}dS_y=\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y+2\pi\mu(x_0), \quad (2.20)$$

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e}\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x-y|}dS_y=\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y-2\pi\mu(x_0).$$

Ми розглянули основні властивості потенціалів. Тепер про їх застосування.

3. Метод потенціалу

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле для рівняння Пуассона: знайти функцію $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ таку, що

$$\Delta u(x)=f(x),\ \ x\in\Omega,\ \ u|_{x\in S}=f_1(x),\ \ x\in S,$$

де крайову умову розуміємо так:

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega} u(x) = f_1(x_0), \ \ \forall x_0 \in S.$$

Якщо $f \in C^1(\Omega)$ і обмежена в Ω, то об'ємний потенціал

$$u_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} f(y)\frac{1}{|y-x|}dy$$

є розв'язком рівняння Пуассона $\Delta u(x) = f(x), \ \ x \in \Omega$.

Зробимо заміну $u = u_0 + \tilde{u}$. Для функції $\tilde{u}$ одержимо внутрішню задачу Діріхле вже для рівняння Лапласа

$$\Delta\tilde{u}(x) = 0, \ \ x \in \Omega, \ \ \tilde{u}|_{x\in S} = f_1(x) - u_0(x), \ \ x \in S.$$

Замінимо тепер $\tilde{u}$ на u і будемо розглядати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа: знайти $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ таку, що

$$\Delta u(x) = 0, \ \ x \in \Omega, \ \ u|_{x\in S} = f_2(x) <=> \tag{2.21}$$

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega} u(x) = f_2(x_0), \ \forall x_0 \in S.$$

Згідно з методом потенціалу, розв'язок її шукають у вигляді поверхневого потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \int\limits_{S} \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}\,dS_y, \ \ x \in \Omega \tag{2.22}$$

з невідомою густиною $\mu(y)$.

При довільній неперервній $\mu(y)$ функція (2.22) є гармонічною в Ω. Справді, $x \neq y$ при $x \in \Omega$ (інтегрування у (2.22) відбувається за змінними $y \in S$), тому можна диференціювати функцію (2.22) під знаком інтеграла,

$$\Delta v(x) = \int\limits_{S} \mu(y)\Delta_x\frac{1}{|y-x|}\,dS_y = 0, \quad x \in \Omega,$$

оскільки $\Delta_x\frac{1}{|y-x|} = 0$ при $x \neq y$.

Щоб задовольнити крайову умову, використаємо першу з формул (2.19):

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega} u(x) = \int\limits_{S} \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y - 2\pi\mu(x_0).$$

Одержуємо

$$\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y - 2\pi\mu(x_0) = f_2(x_0) \quad \forall x_0 \in S. \tag{2.23}$$

Це інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. Далі доведемо, що при неперервній $f_2(y)$, $y \in S$ існує єдиний неперервний розв'язок $\mu(y)$, $y \in S$ рівняння (2.23). Підставивши знайдену $\mu(y)$ у формулу (2.22), матимемо розв'язок шуканої задачі (2.21) – задачі Діріхле.

Згідно з методом потенціалу, розв'язок *зовнішньої задачі Діріхле* для рівняння Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \;\; x \in \Omega_e, \;\; u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\bar{\Omega}_e)\,,$$
$$u|_{x\in S} = f_2(x) \;\; <=> \lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e} u(x) = f_2(x_0) \;\; \forall x_0 \in S,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

шукають також у вигляді поверхневого потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}\,dS_y, \;\; x \in \Omega_e \tag{2.24}$$

з невідомою густиною $\mu(y)$. При довільній неперервній $\mu(y)$ функція (2.24) є гармонічною в Ω_e і

$$\lim_{|x|\to\infty}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}\,dS_y = 0.$$

Щоб задовольнити крайову умову, використаємо формулу стрибка потенціалу ззовні S (другу з формул (2.19))

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e} u(x) = \int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y + 2\pi\mu(x_0).$$

Одержуємо

$$\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y + 2\pi\mu(x_0) = f_2(x_0) \quad \forall x_0 \in S. \tag{2.25}$$

Рівняння (2.25) складніше щодо розв'язання, ніж рівняння (2.23).

Згідно з методом потенціалу, розв'язок *внутрішньої задачі Неймана* (те саме, що другої внутрішньої крайової задачі)

$$\Delta u(x) = 0, \;\; x \in \Omega, \;\; u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\Big|_{x \in S} = f_2(x) \;\; <=> \lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}} = f_2(x_0) \;\; \forall x_0 \in S,$$

шукають у вигляді поверхневого потенціалу простого шару

$$u(x) = \int\limits_S \mu(y) \frac{1}{|y - x|}\, dS_y, \;\; x \in \Omega \tag{2.26}$$

з невідомою густиною $\mu(y)$.

При довільній неперервній $\mu(y)$ функція (2.26) є гармонічною в Ω, тобто задовольняє рівняння Лапласа. Щоб задовольнити крайову умову, використаємо першу з формул (2.20)

$$\lim_{x \to x_0 \in S, x \in \Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{x_0}} = \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \frac{1}{|x_0 - y|} dS_y + 2\pi \mu(x_0),$$

звідки для знаходження невідомої функції $\mu(y)$ одержуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \frac{1}{|x_0 - y|} dS_y + 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0) \quad \forall x_0 \in S.$$

Аналогічно, шукаючи розв'язок завнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа у вигляді (2.26), для знаходження невідомої функції $\mu(y)$ одержуємо інтегральне рівняння

$$\int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \frac{1}{|x_0 - y|} dS_y - 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0) \quad \forall x_0 \in S.$$

4. Дослідження розв'язності інтегральних рівнянь

$$\int\limits_S \mu(y) \tfrac{\partial}{\partial \nu_y} \tfrac{1}{|x_0 - y|} dS_y - 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0), \;\; \forall x_0 \in S, \tag{Di}$$
$$\int\limits_S \mu(y) \tfrac{\partial}{\partial \nu_y} \tfrac{1}{|x_0 - y|} dS_y + 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0), \;\; \forall x_0 \in S, \tag{De}$$
$$\int\limits_S \mu(y) \tfrac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \tfrac{1}{|x_0 - y|} dS_y + 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0), \;\; \forall x_0 \in S, \tag{Ni}$$
$$\int\limits_S \mu(y) \tfrac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \tfrac{1}{|x_0 - y|} dS_y - 2\pi \mu(x_0) = f_2(x_0), \;\; \forall x_0 \in S. \tag{Ne}$$

Запишемо ці рівняння у стандартному вигляді:

$$\mu(x) - \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \mu(y) \tfrac{\partial}{\partial \nu_y} \tfrac{1}{|x - y|} dS_y = f(x), \;\; \forall x \in S, \tag{Di}$$

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|}dS_y = f(x), \quad \forall x \in S, \qquad (De)$$

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = f(x), \quad \forall x \in S, \qquad (Ni)$$

$$\mu(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = f(x), \quad \forall x \in S. \qquad (Ne)$$

Маємо $K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|x-y|}$, $K^*(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|} = K(y,x)$, $\alpha \in (0,1)$.

Рівняння (Ne) є спряженим до (Di), а рівняння (Ni) – спряжене до (De). Ядра полярні $|K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{2-\alpha}}$.

Доведемо, що $\lambda = 1$ не є характеристичним числом ядра $K(x,y)$, а за другою теоремою Фредгольма і ядра $K^*(x,y)$. Від супротивного, якщо μ^* – власна функція ядра $K^*(x,y)$, то $\mu^* \in C(S)$,

$$\mu^*(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu^*(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = 0, \quad x \in S.$$

Розлянемо поверхневий потенціал простого шару

$$V_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu^*(y)\frac{1}{|x-y|}dS_y.$$

Функція $V_0(x)$ – гармонічна в Ω і поза S, $V_0(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, за формулою стрибка похідної за напрямом нормалі поверхневого потенціалу простого шару

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e}\frac{\partial}{\partial\nu}V_0(x) = \mu^*(x_0) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu^*(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y = 0,$$

так що $V_0(x)$ – розв'язок зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа з нульовою крайовою умовою. За єдиністю її розв'язку $V_0(x) = 0$, $x \in \bar{\Omega}_e$, а за неперервністю поверхневого потенціалу простого шару $V_0(x) = 0$, $x \in S$. Тоді $V_0(x)$ – розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа з нульовою крайовою умовою. За єдиністю її розв'язку $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$, а отже, $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Із формул стрибків

$$4\pi\mu^*(x_0) = \lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y -$$

$$-\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_e}\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = 0,\ x_0\in S,$$

звідки $\mu^*(x)=0,\ x\in S$.

З'ясували, що $\lambda = 1$ не є характеристичним числом ядер $K(x,y)$ і $K^*(x,y)$. За першою теоремою Фредгольма інтегральні рівняння (Di) і (Ne) за довільної $f\in C(S)$ однозначно розв'язні, їхні розв'язки неперервні на S.

Доведемо, що $\lambda=-1$ є простим характеристичним числом ядра $K^*(x,y)$. За властивістю інтеграла Гауса

$$J(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = -1,\ x\in S,$$

тому функція $\mu(x)=1$ є розв'язком рівняння (De) при $f(x)=0$. А тоді за другою теоремою Фредгольма існує розв'язок $\mu_0(x)$ (відмінний від тотожного нуля) спряженого однорідного рівняння

$$\mu_0(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu_0(y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-y|}dS_y = 0,\ x\in S. \tag{2.27}$$

Розлянемо поверхневий потенціал простого шару

$$V_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu_0(y)\frac{1}{|x-y|}dS_y.$$

Функція $V_0(x)$ – гармонічна в $\mathbb{R}^3$, $V_0(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, а за формулою стрибка похідної за напрямом нормалі поверхневого потенціалу простого шару

$$\lim_{x\to x_0\in S, x\in\Omega_i}\frac{\partial}{\partial\nu}V_0(x)=\mu_0(x_0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu_0(y)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\frac{1}{|x_0-y|}dS_y = 0.$$

Отже, $V_0(x)$ – розв'язок внутрішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа з нульовою крайовою умовою. За теоремою єдиності для внутрішньої задачі Неймана $V_0(x)=C$, $x\in\bar{\Omega}$, де C –довільна стала. Якби $C=0$, то як при дослідженні попереднього випадку ($\lambda=1$) ми одержали б $\mu_0(x)=0$, $x\in S$, тобто суперечність. Отже, $C\neq 0$.

Доведемо, що $\lambda=-1$ є простим характеристичним числом ядра $K^*(x,y)$. Якщо є ще один розв'язок $\mu_1(x)=C_1$ рівняння (2.27), то, міркуючи подібно, одержимо $\frac{C_1}{C}V_0(x) - V_1(x) = 0,\ x \in S$ для потенціалу з густиною $\frac{C_1}{C}\mu_0(x) - \mu_1(x)$, а тоді, як при дослідженні випадку $\lambda = 1$, матимемо $\mu_1(x) = \frac{C_1}{C}\mu_0(x)$ (власна функція $\mu_1(x)$ лінійно залежить від власної функції $\mu_0(x)$ цього ядра).

За третьою теоремою Фредгольма для розв'язності інтегрального рівняння (Ni) необхідно і достатньо, щоб

$$\int\limits_S f(x) \cdot 1 dS = 0,$$

а для розв'язності інтегрального рівняння (De) необхідно і достатньо, щоб

$$\int\limits_S f(x) \cdot \mu_0(x) dS = 0.$$

Для таких f розв'язок рівняння (Ni) має вигляд $\mu(x) + C\mu_0(x)$ (C–довільна стала), а розв'язок рівняння (De) набув вигляду $\mu(x) + C$.

Досліджуючи крайові задачі для рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t),$$

яке має фундаментальний розв'язок

$$G(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a)^n [\pi t]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

подібно використовують параболічні потенціали

$$\begin{aligned}
V(x,t) &= \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(2a)^n [\pi(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}} \int\limits_\Omega e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} \rho(y,\tau) dy = \\
&= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x-y, t-\tau) \rho(y,\tau) dy, \\
v_0(x,t) &= \int\limits_\Omega G(x-y,t) \rho(y) dy, \\
v(x,t) &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G(x-y,t-\tau) \mu(y,\tau) dy, \\
w(x,t) &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y,t-\tau) \mu(y,\tau) dy.
\end{aligned}$$

Дослідження основних крайових задач для рівняння теплопровідності зводиться до дослідження лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Такі інтегральні рівняння однозначно розв'язні при довільних неперервних функціях у їхніх правих частинах.

2.3 Узагальнені розв'язки та інтегральні рівняння

1. Поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння

Нехай $P(x,D) = \sum\limits_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x) D^\gamma$ — лінійний диференціальний вираз порядку m, $a_\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\gamma| \le m$.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння

$$P(x,D)u = f(x), \qquad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{2.28}$$

у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (узагальненим розв'язком рівняння) називається узагальнена функція $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, що задовольняє тотожність

$$(P(x,D)u, \varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{2.29}$$

тобто

$$(u, P^*(x,D)\varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

де $P^*(x,D)$ — формально спряжений вираз до $P(x,D)$

($(P(x,D)u,\varphi) = (u, P^*(x,D)\varphi)$ для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Використовуючи означення основних операцій у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, знаходимо

$$P^*(x,D)\varphi = \sum_{|\gamma|\le m} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma (a_\gamma \varphi).$$

За означенням, значення узагальненого розв'язку u задано на множині $\{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \psi(x) = P^*(x,D)\varphi(x)$, де $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. Щоб розв'язати рівняння, треба продовжити функціонал із цієї множини на весь простір $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Класичним (або регулярним) розв'язком диференціального рівняння (2.28) називається функція $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$, яка задовольняє тотожність

$$P(x,D)u(x) \equiv f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Зрозуміло, для цього необхідно, щоб $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Кожний класичний розв'язок диференціального рівняння (1) є його узагальненим розв'язком. Якщо $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \cap C^m(\mathbb{R}^n)$ та є узагальненим розв'язком рівняння (2.28), то u — класичний розв'язок рівняння (2.28).

Перше твердження очевидне. Якщо ж u є узагальненим розв'язком рівняння (2.28), то $(P(\cdot, D)u - f, \varphi) = 0$ для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. За умов теореми $P(\cdot, D)u - f \in C(\mathbb{R}^n) \subset L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Тоді за лемою Дюбуа-Реймона $P(x, D)u(x) - f(x) = 0$ майже всюди в $\mathbb{R}^n$, а позаяк $P(\cdot, D)u - f \in C(\mathbb{R}^n)$, то $P(x, D)u(x) - f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Відомо, що *лінійні нормальні звичайні однорідні диференціальні рівняння (з нескінченно диференційовними коефіцієнтами) у просторі узагальнених функцій не мають інших розв'язків, крім класичних.*

Для лінійних однорідних рівнянь з частинними похідними (навіть із нескінченно диференційовними коефіцієнтами) можуть бути сингулярні розв'язки. Позначимо через $\mathcal{L}_0$ множину узагальнених розв'язків рівняння

$$P(x, D)u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.30}$$

і відзначимо деякі її властивості (властивості узагальнених розв'язків лінійних однорідних рівнянь).

1. Множина $\mathcal{L}_0$ лінійна та замкнена.

Справді, якщо $u, v \in \mathcal{L}_0$, c, d — числа, то

$$P(x, D)(cu + dv) = cP(x, D)u + dP(x, D)v = 0$$

(за лінійністю операцій додавання та диференціювання). Отже, $cu+dv \in \mathcal{L}_0$.

Якщо $u_k \in \mathcal{L}_0$, $u_k \to u$ при $k \to \infty$ у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то

$P(x, D)u_k = 0$ у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$\lim\limits_{k\to\infty} P(x, D)u_k = P(x, D)(\lim\limits_{k\to\infty} u_k) = P(x, D)u$,

тобто одержуємо $P(x, D)u = 0$ у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а отже, $u \in \mathcal{L}_0$.

2. Якщо $a_\gamma(x) = a_\gamma = const$, $|\gamma| \le m$, g – фінітна узагальнена функція, $u \in \mathcal{L}_0$, то також $u * g \in \mathcal{L}_0$.

Справді, згортка $u * g$ існує, а за лінійністю операції згортки та правилом її диференціювання

$$P(u * g) = (Pu) * g = 0 * g = 0.$$

Як наслідок цієї властивості одержуємо, що похідні узагальнених розв'язків лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є також узагальненими розв'язками цих рівнянь:

$$D^\beta u = D^\beta(\delta * u) = (D^\beta \delta) * u = u * (D^\beta \delta)\,,\ \text{тут}\ g = D^\beta \delta\,,$$

також якщо $u \in \mathcal{L}_0$, то й $u(x - x_0) = u(x) * \delta(x - x_0)$ належить $\mathcal{L}_0$.

Розв'язки диференціальних рівнянь визначаються неоднозначно (як і первісні узагальнених функцій).

2. Поняття узагальненого розв'язку задачі

Узагальненим розв'язком задачі Коші

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \ \ u(x_0) = u_0$$

називають розв'язок інтегрального рівняння

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(y, u(y))dy + u_0.$$

Класичним розв'язком задачі Коші для рівняння коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in R, \ \ t > 0, \tag{2.31}$$

називається функція $u = u(x,t)$, двічі неперервно диференційовна в $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, неперервно диференційовна в $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ (клас таких функцій позначаємо через $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$), підставляючи яку у рівняння й початкові умови одержуємо тотожності, відповідно, в $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ та $\mathbb{R}$.

Її розв'язок при $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}. \tag{2.32}$$

Сильним узагальненим розв'язком цієї задачі Коші називається границя $u(x,t) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t)$ послідовності $u_k(x,t)$ розв'язків задач

$$(u_k)_{tt} = a^2 (u_k)_{xx}, \quad (u_k)|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad (u_k)_t|_{t=0} = \psi_k(x), \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \tag{2.33}$$

якщо $\varphi_k \in C^2(R)$, $\psi_k \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi_k(x) \to \psi(x)$, $\varphi_k \to \varphi$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Розглянемо першу мішану задачу при однорідних крайових умовах

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T := (0,l) \times (0,T], \tag{2.34}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ u_t(x,0)=\psi(x)\,,\quad x\in(0,l)\,,$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0\,,\quad t\in[0,T]\,.$$

Її єдиний класичний розв'язок при $f(x,t)=0$, $\varphi(x)$ на відрізку $[0,l]$ двічі неперервно диференційовній, що має кусково-неперервну третю похідну та задовольняє умови

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0,\qquad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0,$$

$\psi(x)$ неперервно диференційовній, що має кусково-неперервну другу похідну та задовольняє умови

$$\psi(0)=\psi(l)=0,$$

можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(\frac{ak\pi}{l}t)+B_k\sin(\frac{ak\pi}{l}t)]\sin(\frac{k\pi x}{l})\qquad(2.35)$$

із коефіцієнтами Фур'є A_k, B_k.

Сам ряд рівномірно й абсолютно збігається у слабших припущеннях – при $\varphi(x)$ на відрізку $[0,l]$ неперервно диференційовній, $\psi(x)$ неперервній, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. У цьому випадку він є узагальненим розв'язком задачі в такому сенсі.

Нехай $L_2(0,l)=\{v:\int\limits_0^l v^2(x)dx<+\infty\}$. Це банахів простір із нормою $||v||_{L_2(0,l)}:=||v||_0=[\int\limits_0^l v^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$.

Означення. Кажемо, що послідовність $v_k(x)\to v(x)$ при $k\to\infty$ у просторі $L_2(0,l)$, якщо

$||v_k-v||_0=[\int\limits_0^l |v_k(x)-v(x)|^2dx]^{\frac{1}{2}}\to 0,\ k\to\infty$.

Нехай $C\big([0,T];L_2(0,l)\big)$ – клас функцій $v(x,t)$ ($x\in(0,l)$, $t\in[0,T]$), неперервних за змінною t на відрізку $[0,T]$ зі значеннями в $L_2(0,l)$, а саме таких, що $\int\limits_0^l v^2(x,\cdot)dx\in C[0,T]$. Це банахів простір із нормою

$$||v||_{C\big([0,T];L_2(0,l)\big)}:=\max_{t\in[0,T]}[\int\limits_0^l v^2(x,t)dx]^{\frac{1}{2}}.$$

Означення. Кажемо, що послідовність $v_k(x,t) \to v(x,t)$ при $k \to \infty$ у просторі $C\big([0,T];L_2(0,l)\big)$ (або $v_k(x,t) \to v(x,t)$ при $k \to \infty$ у просторі $L_2(0,l)$ рівномірно за $t \in [0,T]$), якщо

$$||v_k - v||_{C\left([0,T];L_2(0,l)\right)} = \max_{t\in[0,T]} [\int_0^l |v_k(x,t) - v(x,t)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \to 0\,,\ k \to \infty\,.$$

Теорема 2. *Якщо* $f_k \in C(\overline{\Pi}_T)$ *для кожного скінченого* $T > 0$, $\varphi_k \in C^1(0,l) \cap C([0,l])$, $\psi_k \in L_2(0,l)$, $k \in N$,

$f_k(x,t) \to f(x,t)$, $k \to \infty$ *у просторі* $C\big([0,T];L_2(0,l)\big)$,

$\varphi_k(x) \to \varphi(x)$, $k \to \infty$ *рівномірно на* $[0,l]$,

$\varphi_k'(x) \to \varphi'(x)$ *та* $\psi_k(x) \to \psi(x)$, $k \to \infty$ *у* $L_2(0,l)$,

при кожному $k \in N$ *існує класичний (класу* $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\overline{\Pi}_T)$*) розв'язок* $u_k(x,t)$ *задачі*

$$(u_k)_{tt} = (u_k)_{xx} + f_k(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{2.36}$$

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x)\,,\ (u_k)_t(x,0) = \psi_k(x)\,, \quad x \in (0,l)\,,$$
$$u_k(0,t) = u_k(l,t) = 0\,, \quad t \in [0,T]\,,$$

то для довільного скінченного $T > 0$ *послідовність* $u_k(x,t)$ *рівномірно на* $\overline{\Pi}_T$ *збігається при* $k \to \infty$ *до деякої функції* $u(x,t)$ *(зрозуміло, неперервної на* $\overline{\Pi}_T$ *).*

Означення. Границя $u(x,t)$ послідовності $u_k(x,t)$ розв'язків задач (2.36) називається *сильним узагальненим розв'язком* задачі (2.34).

Теорема 3. *Якщо* $f \in C(\overline{\Pi}_T)$ *для кожного скінченого* $T > 0$, $\varphi \in C^2(0,l) \cap L_2(0,l) \cap C^1([0,l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi \in L_2(0,l)$, *то сильний узагальнений розв'язок задачі (2.34) існує та може бути поданий у вигляді ряду Фур'є (ряду (2.35) при* $f \equiv 0$ *у* $\overline{\Pi}_T$ *).*

Як бачимо з наведеної теореми, сильний узагальнений розв'язок задачі (2.34) є неперервною функцією в $\overline{\Pi}_T$, задовольняє крайові та початкові умови задачі, однак рівняння задачі не задовольняє у класичному сенсі. Він задовольняє рівняння в узагальненому сенсі

$$\int_0^T \int_0^l u(\eta_{tt} - \eta_{xx}) dxdt = \int_0^T \int_0^l f(x,t)\eta(x,t) dxdt \tag{2.37}$$

для довільної $\eta \in C^2(\Pi_T)$ та фінітної з носієм у Π_T, тобто $\eta(x,t) \equiv 0$ для всіх (x,t) поза деяким компактом у Π_T.

Справді, інтегруючи частинами, матимемо

$$\int_0^T\int_0^l[(u_k)_{tt}-(u_k)_{xx}]\eta dxdt=\int_0^T\int_0^l u_k(\eta_{tt}-\eta_{xx})dxdt\,,\ k\in N$$

(неінтегральні доданки пропадають за фінітністю функції η). Переходячи у цій тотожності до границі при $k\to\infty$ та враховуючи, що $(u_k)_{tt}-(u_k)_{xx}=f_k$ у Π_T, $f_k\to f$, $u_k\to u$ рівномірно в $\overline{\Pi}_T$, одержуємо (2.37).

При довільній $\eta\in C^2(\Pi_T)\cap C^1(\overline{\Pi}_T)$ і такій, що $\eta(x,T)=\eta_t(x,T)=0$, інтегруючи частинами, матимемо

$$\int_0^T\int_0^l[(u_k)_{tt}-(u_k)_{xx}]\eta dxdt=\int_0^T\int_0^l u_k(\eta_{tt}-\eta_{xx})dxdt+,$$

$$+\int_0^l[u_k(x,0)\eta_t(x,0)-(u_k)_t(x,0)\eta(x,0)]dx\,,\quad k\in N\,,$$

звідки

$$\int_0^T\int_0^l u_k(\eta_{tt}-\eta_{xx})dxdt=\int_0^t\int_0^l f_k(x,t)\eta(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^l[\varphi_k(x)\eta_t(x,0)-\psi_k(x)\eta(x,0)]dx\,,\quad k\in N\,.$$

Переходячи у цій тотожності до границі при $k\to\infty$ (за умов існування сильного узагальненого розв'язку задачі (2.34)) одержуємо

$$\int_0^T\int_0^l u(\eta_{tt}-\eta_{xx})dxdt=\int_0^t\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt+ \tag{2.38}$$

$$+\int_0^l[\varphi(x)\eta_t(x,0)-\psi(x)\eta(x,0)]dx$$

$$\forall\eta\in C^2(\Pi_T)\cap C^1(\overline{\Pi}_T),\ \ \eta(x,T)=\eta_t(x,T)=0\,.$$

Означення. Функція $u(x,t)$, що задовольняє тотожність (2.38), називається *слабким узагальненим розв'язком* задачі (2.34).

Ми з'ясували, що за умов існування сильний узагальнений розв'язок задачі (2.34) є також її слабким узагальненим розв'язком. Зрозуміло, що не кожний слабкий узагальнений розв'язок задачі (2.34) може бути її сильним узагальненим розв'язком.

3. Застосування формул Гріна та функції Гріна

Можна використати для визначення узагальненого розв'язку крайової задачі відомі інтегральні формули (формули Гріна). Доведемо це на прикладі задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Подібні властивості мають інші рівняння еліптичного типу (бо рівняння Лапласа і Пуассона – це їхні канонічні форми).

Вивчаємо ці рівняння в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою поверхнею S класу C^∞. Тоді рівняння всієї поверхні або кожної її частини можна задати за допомогою нескінченно диференційовних функцій.

Нехай

$$D(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega}),\ D_0(\bar{\Omega}) = \{v \in D(\bar{\Omega}) : v|_S = 0\}.$$

Враховуючи другу формулу Гріна

$$\int\limits_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_S (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})dS,\ u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),$$

узагальненим розв'язком задачі Діріхле

$$\Delta u = f_0(x),\ x \in \Omega,\ \ u|_S = f_1 \tag{2.39}$$

при $f_0 \in D_0'(\bar{\Omega})$, $f_1 \in D'(S)$ називають [8] таку узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$, що для довільної $v \in D_0(\bar{\Omega})$ виконується тотожність

$$(u, \Delta v) = (f_0, v) + (f_1, \frac{\partial v}{\partial \nu}). \tag{2.40}$$

Існує її єдиний розв'язок, який можна подати за допомогою функції Гріна $G(x, y)$

$$(u, v) = \big(f_0(y), \int\limits_\Omega G(x, y)v(x)dx\big) + \big(f_1(y), \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y)v(x)dx\big) \tag{2.41}$$

$$\forall v \in D(\bar{\Omega}).$$

Функція Гріна $G(x, y)$ – це фундаментальний розв'язок оператора Лапласа, що задовольняє нульову крайову умову, тобто розв'язок задачі

$$\Delta G(x, y) = \delta(x - y),\ x, y \in \Omega,\ \ G|_{x \in S} = 0.$$

Функція

$$G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + g(x,y)\,,\ \Delta g(x,y) = 0\,,\ x,y \in \Omega$$

є сумою фундаментального розв'язку оператора Лапласа і його класичного розв'язку, що задовольняє умову $g|_{x\in S} = \frac{1}{4\pi|y-x|}|_{x\in S}$ для кожної точки $y \in \Omega$.

Фундаментальні розв'язки рівнянь із частинними похідними у випадку сталих коефіцієнтів можна побудувати, використовуючи перетворення Фур'є за просторовими змінними чи перетворення Лапласа за часовою змінною, або й обидва такі перетворення, а у випадку змінних коефіцієнтів рівнянь за методом Леві, розв'язуючи певні інтегральні рівняння.

4. Випадок регулярних правих частин рівняння

Якщо f_0 – регулярна узагальнена функція, зокрема $f_0(x) = 0$, $x \in \Omega$, але $f_1 \in D'(S)$, то можливий такий (можна довести, що еквівалентний) підхід: узагальненим розв'язком задачі Діріхле

$$\Delta u = 0,\ x \in \Omega,\ \ u|_S = f_1 \tag{2.42}$$

при $f_1 \in D'(S)$ називають [7] регулярний (класичний) розв'язок рівняння

$$\Delta u = 0,\ x \in \Omega,$$

що задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)v(x_\varepsilon)dS = (f_1, v)\ \ \forall v \in D(S). \tag{2.43}$$

Тут $x_\varepsilon = x - \varepsilon\nu(x),\ x \in S$, S_ε – паралельна до S поверхня в Ω.

Розв'язок задачі шукають у вигляді аналогу поверхневого потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \big(F(y), \frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x|}\big),\ \ x \in \Omega \tag{2.44}$$

з невідомою узагальненою функцією $F \in D'(S)$.

При довільній $F \in D'(S)$ функція (2.44) є гармонічною в Ω. Справді,

$$\Delta u(x) = \big(F(y), \frac{\partial}{\partial\nu_y}(\Delta_x\frac{1}{|y-x|})\big) = 0,\ \ x \in \Omega.$$

Підставляючи (2.44) у крайову умову (2.43), одержують

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)v(x_\varepsilon)dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\big(F(y), \frac{\partial}{\partial\nu_y}\frac{1}{|y-x_\varepsilon|}\big)v(x_\varepsilon)dS =$$

$$= \Big(F(y), \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|y - x_\varepsilon|} v(x_\varepsilon) dS\Big) = (f_1, v),$$

а з використанням формули стрибка похідної за нормаллю потенціалу простого шару

$$\big(F(y), \int\limits_S v(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} dS_x - 2\pi v(y)\big) = (f_1, v) \ \ \forall v \in D(S),$$

тобто

$$(F, g) = (f_1, v_g) \quad \forall g \in D(S),$$

де v_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$\int\limits_S v(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} dS_x - 2\pi v(y) = g(y),$$

яке є спряженим до того, що одержують при знаходженні методом потенціалу розв'язку задачі Діріхле з неперервною f_1 на S.

У подібних формулюваннях вивчають і задачі для параболічних рівнянь. Для гіперболічних рівнянь це трохи складніше, бо їхні фундаментальні розв'язки мають особливості не в точках, а на характеристичних конічних поверхнях чи всередині них.

Контрольні запитання і завдання

1. Записати інтегральне рівняння, еквівалентне задачі

$y' = t - siny\,,\; y(1) = 2\,.$

2. Записати лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду.

3. Коли можна звести ЛІР Вольтерри першого роду до ЛІР Вольтерри другого роду і як.

4. Записати ЛІР Фредгольма другого роду і спряжене йому.

5. Сформулювати другу теорему Фредгольма для ЛІР Фредгольма другого роду з неперервним ядром.

6. Достатня умова існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром.

7. Означення похідної Рімана-Ліувілля порядку α.

8. Критерій компактності множини в $C([a,b])$.

9. Критерій компактності множини в $L_p(a,b)$.

10. Означення компактного оператора.

11. Ядра яких інтегральних рівнянь є виродженими (полярними, симетричними):

1) $u(x) + \lambda \int_0^2 (x+y)u(y)dy = f(x)$;
2) $u(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, u(y)dy = f(x)$;
3) $u(x,t) + \lambda \int_0^2 \int_0^1 (x - s + 2y)u^2(y,s)dy\, ds = f(x,t)$;
4) $u(x) + \lambda \int_0^1 \frac{2}{x+2y-1} u(y)dy = f(x)$.

12. Які з наведених у пункті 11 інтегральних рівнянь є:

1) інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду;

2) інтегральними рівняннями Вольтерри другого роду;

3) інтегральними рівняннями Гаммерштейна.

13. Серед поданих інтегральних рівнянь вибрати лінійні інтегральні рів-

няння Фредгольма першого роду (Вольтерри першого роду, Вольтерри другого роду):

1) $u(x) + \lambda \int_0^2 (x+y)u(y)dy = f(x)$;

2) $u(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, u(y)dy = f(x)$;

3) $\int_0^t \int_0^1 (x - s + 2y)u^2(y,s)dy\, ds = f(x,t)$;

4) $\int_0^1 (x + 2y - 1)u(y)dy = f(x)$.

14. За яких умов на ядро і праву частину розв'язне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду?

15. За яких умов на ядро і праву частину розв'язне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду?

16. Якими методами доцільно розв'язувати наведені рівняння:

1) $u(x) + \lambda \int_0^x \sqrt{x-y}\; u(y)dy = f(x)$;

2) $u(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^2\, u(y)dy = f(x)$;

3) $u(x) + \lambda \int_0^1 \sin(x-y)\, u(y)dy = f(x)$;

4) $u(x) + \lambda \int_0^x \sqrt{x+y}\; u(y)dy = f(x)$.

17. Знайти оцінку знизу характеристичнних чисел інтегрального рівняння

$$u(x) + \lambda \int_0^1 \sqrt{x+y}\; u(y)dy = f(x).$$

18. Якого типу інтегральне рівняння (Вольтерри чи Фредгольма) одержують для рівняння зі звичайною дробовою похідною і з яким ядром.

19. Якого типу інтегральне рівняння одержують у методі потенціалу для задачі Діріхле і з яким ядром.

20. Означення перетворення Фур'є звичайних і узагальнених функцій.

21. Написати приклад інтегрального рівняння, яке можна розв'язувати за допомогою перетворення Фур'є.

22. Означення перетворення Лапласа звичайних і узагальнених функцій.

23. Написати приклад інтегрального рівняння, яке можна розв'язувати за допомогою перетворення Лапласа.

24. Які лінійні інтегральні рівняння еквівалентні алгебричним системам рівнянь.

25. Означення ермітового оператора.

26. Сформулювати теорему Гільберта-Шмідта.

27. Означення регуляризації операторного рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Акбаров Д. Є. Застосування принципу стискаючого відображення для дослідження розв'язків нелінійних функціональних рівнянь у банахових просторах / Д. Є. Акбаров, Х. Ш. Туракулов // Вісник КПІ. Серія Приладобудування. – 2020. – Вип. 59(1). - С. 87-95.

[2] *Василишин Т.В.* Інтегральні рівняння: навчальний посібник / Т.В. Василишин, Т.П. Гой, І.В. Федак – Івано-Франківськ: Сімик, 2014. – 222 с.

[3] Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков - Київ: Наук. думка, 1986. - 544 с.

[4] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[5] *Головач Г.П.* Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. Р. 2 / Г.П. Головач, О.Ф. Калайда – Київ: Техніка, 1997. - 288 с.

[6] *Городецкий В.В.* Методы решения задач по функциональному анализу. Гл. 3, пар. 4 / Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. – Киев: Выща шк., 1990, 479 с.

[7] *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле / Г.С. Гупало // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – №7. – С. 843 - 846.

[8] *Гупало Г.С.* Задача Діріхле для рівняння Пуассона / Г.С. Гупало // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1976. – Вип. 11. – С. 21-25.

[9] *Задачин В.М.* Чисельні методи / В.М. Задачин, І.Г. Конюшенко – Х. Вид-во ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. - 180 с.

[10] Засядько А.А. Символічні моделі фізичних процесів, що описуються інтегральними рівняннями Фредгольма першого роду / А.А. Засядько // Системи обробки інформації. – 2019. – 2(157). – С. 45-56.
https://doi.org/10.30748/soi.2019.157.06

[11] Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська: монографія.- Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2002.- 287 с.

[12] *Лопушанська Г.П.* Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування: навч.-метод. посібник / Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М. – Вид-во Львів. ун-ту, 2014. - 153 с.

[13] Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: підручник –2-ге вид., виправ. і доп. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2017. - 372 с. – Серія "Університетська бібліотека".

[14] *Пасічник О.В.* Існування розв'язку задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом і узагальненими функціями в початковій умові / О.В. Пасічник // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2011. – Вип. 75. – С. 170-180.

[15] *Федак І.В.* Лінійні інтегральні рівняння: навч. посібник / І.В. Федак, Т.П. Гой – Івано-Франківськ: Голіней, 2011.–152с.

[16] *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / О.Ю. Чмир // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2003. - Вип. 62. – С. 134-143.

[17] *Чорноіван Ю.О.* Конспект лекцій з курсу інтегральних рівнянь та елементів функціонального аналізу / Ю.О. Чорноіван – 2017. – 203 с.

[18] *Avazzadeh Z.* Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem / Z. Avazzadeh, Heidari M., Loghmani G.B. // Appl. Math. Modelling.– 2011. – Vol. 35. – 2374-2383.

[19] *Molabahrami A.* An approach to the Fredholm integro-differential equations by using IMVM / A. Molababahrami // The extended abstract of the 5th seminar of Numerical analysis and its applications. 9-10 Sep. 2014. Vali-o-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.– 2014.– 275-278.

[20] *Molabahrami A.* An approach to the system of Fredholm integral equations of the second kind / A. Molabahrami, T. Ghodusinia // The extended abstract of the 5th seminar of Numerical analysis and its applications. 9-10 Sep. 2014. Vali-o-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.– 2014.– 133-136.

[21] Rui Weiguo. Separation method of semi-fixed variables together with dynamical system method for solving nonlinear time-fractional PDEs with higher-order terms / Weiguo Rui // Preprint: December 22nd, 2021.– P. 1-33. DOI: https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1155271/v1

Предметний покажчик

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лопушанська Галина Петрівна,
Лопушанський Андрій Олегович

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор Н.Й. Плиса
Комп'ютерне верстання Г.П. Лопушанська

Формат 60x84/8. Умовн. друк. арк. 13,5. Зам. 5 Е.
Видавець і виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.