

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

І.І. Дияк, І.А. Прокопишин

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕНЬ

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2006

ББК В19я73-5
Д – 44
УДК 519.6 (076)

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Г. А. Шинкаренко
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
д-р техн. наук, проф. Д. В. Федасюк
(Національний університет "Львівська політехніка")

*Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету
Протокол № 6 від 15.02.2006*

Дияк І.І., Прокопишин І.А.

Д – 44 Лабораторний практикум з методів обчислень. – Львів:
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 80 с.

Лабораторний практикум містить теоретичні відомості, завдання та навчально-методичні матеріали для виконання лабораторних робіт з курсу "Методи обчислень". Націлений на програмну реалізацію методів в середовищі Delphi і виконання завдань практичного характеру.

Для студентів математичних спеціальностей.

ББК – В19я73-5

© Дияк І. І., Прокопишин І. А., 2006

Передмова

Мета лабораторного практикуму – забезпечення ефективного засвоєння методів обчислювальної математики та їхнє застосування до практичних задач.

Практикум розрахований на 36 аудиторних годин занять в комп'ютерному класі. Він містить 8 лабораторних робіт різної складності. Для виконання кожному студенту пропонується 6 лабораторних робіт.

Основний результат кожної лабораторної роботи – це програма реалізації методу, підготовлена на мові Object Pascal в середовищі Delphi, результати її тестування та розв'язок практичної задачі. Лише перша лабораторна робота "Теорія похибок" виконується в середовищі Maple, яке забезпечує можливість проведення розрахунків з заданою кількістю значущих цифр.

Практикум розбито на розділи відповідно до лабораторних робіт. Кожен розділ містить теоретичні відомості, завдання для програмної реалізації, тестові і практичні задачі. За необхідності додаються методичні рекомендації з програмування у середовищі Delphi, задачі та вправи теоретичного спрямування.

Завдання і задачі підвищеної складності позначено зірочкою (*).

Теоретичний матеріал викладено на основі навчальних підручників та посібників [1, 6-8, 11, 17, 20, 23, 28, 29]. Для підготовки практичних завдань використано роботи [10, 13, 15, 16, 18, 19, 27, 30], а теоретичних задач і вправ – збірники [4, 22]. Чимало завдань, задач і вправ є оригінальними.

Лабораторна робота № 1 "Теорія похибок"

Теоретичні відомості

1. Види похибок

Відповідно до етапів розв'язування математичної задачі на комп'ютері розрізняють чотири види похибок:

- 1) похибки математичної моделі;
- 2) похибки методу розв'язування задачі;
- 3) похибки, зумовлені неточністю вхідних даних;
- 4) похибки обчислень, зумовлені округленнями при виконанні арифметичних операцій.

Похибку математичної моделі можна оцінити лише експериментально. Похибку методу в багатьох випадках можна оцінити теоретично – апіорі, або спеціальним аналізом числових результатів – апостеріорі. Неточності у вхідних даних неможливо усунути, проте можна визначити їхній вплив на результат теоретично чи шляхом обчислювального експерименту. Похибку, зумовлену округленнями при виконанні арифметичних операцій, важко оцінити теоретично, проте її можна зменшити, підвищуючи точність виконання арифметичних операцій.

2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай a^0 – точне значення деякої числової величини, а a – її наближене значення. *Істинною абсолютною похибкою* наближеного числа a називають величину

$$\Delta(a) = |a - a^0| > 0. \quad (1)$$

Істинною відносною похибкою наближеного числа $a \neq 0$ називають величину

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} > 0. \quad (2)$$

Верхні оцінки цих похибок, які можна встановити за даного способу отримання наближеного числа a , називають *абсолютною граничною похибкою* та *відносною граничною похибкою*. У багатьох випадках істинні похибки встановити неможливо і термін "похибка" вживають в сенсі "гранична похибка".

3. Похибка функції, зумовлена похибками аргументів

Розглянемо питання про похибку функції, зумовлену похибками аргументів за умови, що обчислення здійснюють точно – похибки округлень відсутні.

Нехай $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ – функція векторного аргументу, $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ – точне, а $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ – наближене значення деякої векторної величини. Позначимо через $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ вектор абсолютних похибок: $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = (\Delta(x_1), \Delta(x_2), \dots, \Delta(x_n))$, де $\Delta(x_i)$ – абсолютна похибка змінної i , тобто $|x_i^0 - x_i| \leq \Delta(x_i)$.

Абсолютною похибкою функції f , зумовленою похибками аргументів, називають величину $\Delta(f)(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)|$. Оцінку цієї похибки дає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $D \subset \mathbf{R}^n$ – випукла замкнута множина, $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in \text{int } D$ і $f \in C^{(1)}(D; \mathbf{R})$. Тоді справедлива така оцінка:*

$$\Delta(f)(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^n B_i \Delta(x_i), \quad B_i = \max_{\mathbf{x}' \in D} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x_i} \right|. \quad (3)$$

Якщо додатково припустити, що $f \in C^{(2)}(D; \mathbf{R})$, то

$$\Delta(f)(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i) + o(\|\mathbf{D}(\mathbf{x})\|). \quad (4)$$

На основі останньої формули в практичних розрахунках здебільшого покладають

$$\Delta(f)(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i), \quad (5)$$

$$\delta(f)(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln |f(\mathbf{x})|}{\partial \ln |x_i|} \right| \delta(x_i). \quad (6)$$

За допомогою приведених формул легко оцінити похибку основних арифметичних операцій, зумовлену похибками аргументів:

$$\Delta(u \pm v) \leq \Delta(u) + \Delta(v); \quad (7)$$

$$\Delta(uv) \leq \Delta(u)|v| + \Delta(v)|u|; \quad (8)$$

$$\Delta(u/v) \leq (\Delta(u)|v| + \Delta(v)|u|)/v^2, v \neq 0; \quad (9)$$

$$\delta(uv) \leq \delta(u) + \delta(v); \quad (10)$$

$$\delta(u/v) \leq \delta(u) + \delta(v). \quad (11)$$

Зазначимо, що коли $u, v > 0$, то відносна похибка суми менша або дорівнює сумі відносних похибок доданків, тобто:

$$\delta(u+v) \leq \frac{u}{u+v} \delta(u) + \frac{v}{u+v} \delta(v) \leq \delta(u) + \delta(v), \quad (12)$$

але відносна похибка різниці $\delta(u-v) = \frac{|u-u^0 - (v-v^0)|}{|u-v|}$ – може

бути як завгодно великою.

Формули (3)–(12) безпосередньо можна використати, наприклад, для оцінки впливу похибок вхідних даних. Абсолютну похибку суми n доданків x_i , кожен з яких має абсолютну похибку Δ , можна оцінити так:

$$\Delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \leq n\Delta. \quad (13)$$

4. Статистична оцінка похибок

Отримані за формулами (3)–(13) оцінки похибок дуже завищені і досягаються рідко. Розглянемо питання про статистичну оцінку похибки функції, зумовлену похибками аргументів.

Будь-який емпіричний параметр можна моделювати детермінованою або випадковою величиною. У першому випадку встановлюють найтісніший відрізок $[\alpha, \beta]$, якому належить цей параметр. За наближене значення параметра приймають його середину $a = (\beta + \alpha)/2$, що забезпечує мінімальну абсолютну похибку $\Delta(a) = (\beta - \alpha)/2$.

За стохастичного підходу до опису емпіричного параметра на основі серії вимірювань будують емпіричну функцію розподілу, яка, за необхідності, апроксимується відомим параметричним розподілом.

Можливий перехід від стохастичного опису емпіричного параметра до детермінованого, і навпаки. Наприклад, за наближене значення детермінованої величини можна взяти статистичну оцінку математичного сподівання стохастичної величини, а за допомогою функції розподілу останньої встановити окіл, якому ця величина належить з високою ймовірністю. Перехід до стохастичного опису від детермінованого можна здійснити, задаючи на $[\alpha, \beta]$ випадкову величину з математичним сподіванням $(\beta + \alpha)/2$.

Стохастична природа емпіричного параметра часто зумовлена впливом великої кількості незалежних випадкових чинників, що дає змогу моделювати його нормально розподіленою випадковою величиною ξ з параметрами a та σ . Тоді зв'язок між розглядуваними моделями дає "правило трьох сигм":

$$P\{|\xi - a| \leq 3\sigma\} \approx 0,9971. \quad (14)$$

Отже можна наближено покласти:

$$\Delta \approx 3\sigma. \quad (15)$$

Враховуючи сказане, дамо статистичну оцінку похибки суми за припущення рівномірного розподілу похибок аргументів.

Нехай

$$S_n = \sum_{i=1}^n y_i, \quad (16)$$

де $y_i = x_i + \xi_i$, x_i – детерміновані точні величини, ξ_i – незалежні, рівномірно розподілені на відрізьку $[-\Delta, \Delta]$ випадкові величини.

Очевидно, що похибка суми (16) визначається випадковою величиною:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (17)$$

Для достатньо великих n , відповідно до центральної граничної теореми, вона є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i) = 0, \quad \sigma(\xi) = \left[\sum_{i=1}^n D(\xi_i) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sqrt{n}. \quad (18)$$

Якщо скористатись "правилом трьох сигм" (14), то отримаємо таку статистичну оцінку абсолютної похибки суми:

$$\Delta(S_n) \approx \sqrt{3n} \Delta, \quad (19)$$

яка значно менша детермінованої оцінки (13).

Загалом для статистичної оцінки похибки функції, зумовленої похибками аргументів, потрібно побудувати емпіричну функцію розподілу методом статистичного моделювання.

5. Похибки, зумовлені округленням чисел

Для представлення дійсних чисел у комп'ютерах використовують формат з плаваючою комою (крапкою), який базується на нормалізованій формі представлення чисел.

Число a у нормалізованій (експонентній) формі записують так:

$$a = \pm q^p \sum_{i=1}^m a_i q^{-i} = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_m \cdot q^p, \quad a_i \in \{0, 1 \dots q-1\}, \quad a_1 \neq 0, \quad (20)$$

де $q \in \{2, 10, 8, 16\}$ – основа системи числення (на машинному рівні $q=2$); $0.a_1 a_2 \dots a_m$ – мантиса; $p \in \mathbf{Z}$ – порядок (експонента).

Зазначимо, що 32-розрядні процесори Intel використовують три типи чисел з плаваючою комою [9]: одинарної точності – довжиною 4 байти; подвійної точності – довжиною 8 байт; підвищеної точності – довжиною 10 байт. Ці числа мають такий формат:

- перший біт відведено для знака числа;
- наступні r біт займає порядок числа – ціле зі знаком з діапазону $[-2^{r-1}, 2^{r-1} - 1]$;
- останні m біт відведено для мантиси.

Конкретні параметри для вказаних типів чисел з плаваючою комою подано у таблиці 1.

Таблиця 1. Представлення чисел з плаваючою комою в процесорі Intel

Тип	Загальна довжина, біт	Довжина порядку, біт	Довжина мантиси, біт
Single	32	8	23
Double	64	11	52
Extended	80	15	64

Множина чисел, яку можна представити у форматі з плаваючою комою конкретного типу, є скінченною множиною раціональних чисел

$$F = \left\{ a \in \mathbf{Q} \mid a = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_m \cdot 2^p, a_i \in \{0,1\}, p \in \mathbf{Z}, p^- \leq p \leq p^+ \right\}. \quad (21)$$

Ці числа розташовані нерівномірно, відстань між двома найближчими числами з порядком p дорівнює 2^{p-m} . Відстань між одиницею і найближчим наступним за нею числом дорівнює 2^{1-m} . Цю величину називають машинним іпсилон і позначають ідентифікатором *macheps*.

Відповідно до формату чисел з плаваючою комою, найменший та найбільший двійкові порядки числа дорівнюють $p^- = -2^{r-1}$ та $p^+ = 2^{r-1} - 1$. Практично реалізований ширший діапазон порядків, передусім у від'ємній області – за рахунок зменшення кількості значущих цифр. Нижче подано таблицю допустимих модулів для чисел у форматі з плаваючою комою вказаних типів (для їхньої реалізації у середовищі Delphi).

Таблиця 2. Допустимі десяткові числа формату з плаваючою комою для середовища Delphi [2]

Тип	Наближений десятковий діапазон модуля	Кількість десяткових знаків мантиси
Single	$1,5 \cdot 10^{-45} - 3,4 \cdot 10^{38}$	7 – 8
Double	$5,0 \cdot 10^{-324} - 1,7 \cdot 10^{308}$	15 – 16
Extended	$3,6 \cdot 10^{-4932} - 1,1 \cdot 10^{4932}$	19 – 20

Числа, модуль яких менший за допустимий, називають *машинним нулем*, а числа, модуль яких перевищує допустимий – *машинною нескінченністю*. Якщо при виконанні арифметичних операцій модуль числа стає меншим від машинного нуля, то настає *переривання "зникнення порядку"*, а якщо більшим від машинної нескінченності, то – *переривання "переповнення порядку"*.

Округлення до m знаків мантиси – це деяке відображення множини дійсних чисел у множину чисел з плаваючою комою $fl(x): R \rightarrow F$. Якщо $fl(x) \neq 0$, тоді:

$$fl(x) = x(1 + \eta), \text{ де } |\eta| \leq \delta_m. \quad (22)$$

Очевидно, що при округленні відкиданням розрядів $\delta_m = q^{1-m} = \text{macheps}$. Якщо використати традиційне правило округлення, то оцінка відносної похибки буде вдвічі меншою:

$$\delta_m = \frac{1}{2} q^{1-m} = \frac{1}{2} \text{macheps}. \quad (23)$$

Позначимо результат арифметичної операції $*$ над числами $a, b \in F$ через $fl(a * b) \in F$. Якщо $fl(a * b) \neq 0$, тоді

$$fl(a * b) = a * b(1 + \eta), \text{ де } |\eta| \leq \delta_m. \quad (24)$$

Останнє співвідношення дає оцінку похибки, зумовленої округленням, для окремої операції. Аналіз процесу накопичення похибок округлення та оцінку сумарної похибки здійснюють за допомогою графа обчислювального процесу [16] з використанням оцінок (7)–(12).

Для прикладу, знайдемо похибку суми додатних чисел, зумовлену похибками округлень. Нехай числа $x_i > 0, i = \overline{1, n}$ –

задані точно. Розглянемо суму $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Вважатимемо, що

сумування відбувається в порядку зростання індексів, тобто спочатку знаходять суму $S_2 = x_1 + x_2$, далі – суму $S_3 = S_2 + x_3$ і т.д. Тоді, на основі співвідношень (24) та (7), легко записати оцінку сумарної абсолютної похибки:

$$\begin{aligned} \Delta(S_n) &\leq (x_1 + x_2)\delta_m + (x_1 + x_2 + x_3)\delta_m + \dots + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\delta_m = \\ &= [(n-1)(x_1 + x_2) + (n-2)x_3 + (n-3)x_4 + \dots + x_n] \delta_m. \end{aligned} \quad (25)$$

Отримана оцінка засвідчує, що сумарна похибка, зумовлена округленнями, залежить від порядку сумування. Найменша похибка виникне при сумуванні чисел у порядку зростання. Отже, асоціативний і комутативний закони додавання при обчисленнях з плаваючою комою виконуються наближено.

Завдання

У середовищі Maple виконайте завдання та зробіть висновки, які запишіть коментарем наприкінці програми. Кількість значущих цифр задавайте за допомогою оператора *Digits*.

1. Напишіть програму сумування 10-ти чисел з 10-ма та 4-ма значущими цифрами і різним порядком сумування. Дослідіть вплив кількості розрядів та порядку сумування на результат, обчисліть абсолютну та відносну похибки. Виконайте аналогічні обчислення для іншого набору чисел, а також іншого порядку сумування, наприклад, розбивши числа на дві групи. Зробіть загальний висновок.

2. Обчисліть з 10-ма та 4-ма значущими цифрами менший з коренів квадратного рівняння, скориставшись двома різними формулами: $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ та $x = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, якщо

$a = 1,000$, $b = 0,4002$, $c = 0,00008$. Обчисліть абсолютну та відносну похибки, зробіть загальний висновок.

3. Обчисліть розв'язки системи рівнянь за правилом Крамера з 10-ма та 4-ма значущими цифрами, порівняйте результати та зробіть висновок:

$$\begin{cases} 0,2038x + 0,1218y = 0,2014 \\ 0,4071x + 0,2436y = 0,4038 \end{cases}$$

4. Для обчислення середньоквадратичного відхилення можна використати одну з двох формул:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - X)^2 \quad \text{або} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - nX^2 \right), \quad \text{де} \quad X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i -$$

середнє арифметичне. Для набору з 10-ти близьких чисел x_i , заданих з 4-ма значущими цифрами, виконайте обчислення з різною точністю (4, 10 розрядів) та проаналізуйте, яка з формул дає точніший результат.

5. Обчисліть зета-функцію Рімана $\zeta(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ з шістьма точними знаками для параметра p рівного $N \bmod 13 + 2$ (N – порядковий номер у списку групи). Попередньо оцініть необхідну кількість доданків, враховуючи оцінку залишку ряду $R_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

Проведіть розрахунки з різною кількістю значущих цифр і порівняйте результати з отриманим стандартною функцією **Zeta(x)** системи **Maple**. Обчисліть абсолютну похибку.

- 6*. Обчисліть з шістьма точними знаками константу Ейлера, не використовуючи стандартні функції **Maple**

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Задачі і вправи

1. Доведіть формулу (6).
2. Оцініть похибку функції багатьох змінних, заданої неявно.
3. Оцініть похибку композиції функцій багатьох змінних.
4. Оцініть абсолютну похибку суми, зумовлену похибками аргументів, за припущення, що абсолютні похибки доданків є однаковими незалежними нормально розподіленими випадковими величинами.
5. Абсолютна похибка наближеного числа a дорівнює $\Delta(a)$. Вкажіть позицію останньої правильної цифри в позиційному записі цього числа у десятковій системі числення.
6. Наведіть приклад арифметичного виразу над дійсними числами, розрахунок якого з використанням типу **Single** спричинить ситуацію "зникнення порядку", що суттєво вплине на результат.

7. Потужність електричного приладу визначається за формулою $P = U^2 / R$, де R – внутрішній опір приладу, U – напруга в електричній мережі. Якою буде відносна похибка розрахунку спожитої електроенергії за номінальними параметрами приладу та мережі, якщо внутрішній опір приладу може відрізнятись від номінального на 5 %, а коливання напруги в мережі сягають 10 % ? Час вимірюється точно.

8. Площу трикутника визначають за формулою $S = 0,5 ab \sin \gamma$. При обмірванні земельної ділянки встановлено, що $a = 80 \pm 0.5 \text{ м}$, $b = 25 \pm 0.5 \text{ м}$, $\gamma = 45^\circ \pm 30'$. Якою буде абсолютна похибка розрахунку площі цієї земельної ділянки?

9. Обчисліть і оцініть похибку для теперішньої і майбутньої вартості постійної ренти постнумерандо:

$$P_0 = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \quad P_n = R \frac{(1+i)^n + 1}{i},$$

коли $n = 3$ – точно, а значення інших параметрів округлено до цілих: $R = 1000$ грн; $i = 20\%$.

10. Внутрішню ставку прибутковості (IRR) для деякого інвестиційного проекту визначають як розв'язок відносно невідомого i рівняння:

$$\frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} = A,$$

де округлені значення параметрів такі (тис. г.о.):

$$A = 100, \quad R_1 = -100, \quad R_2 = 144, \quad R_3 = 144.$$

Обчисліть IRR і визначте її похибку.

Лабораторна робота № 2 "Числові методи розв'язування нелінійних рівнянь"

Теоретичні відомості

1. Метод половинного ділення

Нехай $f(x) \in C[a, b]$. Розглянемо рівняння:

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Припустимо, що це рівняння має лише один корінь – x^* .

Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл: $[a, b] = [a, x_0] \cup [x_0, b]$, де точка $x_0 = (a + b)/2$ – центр відрізка $[a, b]$. Щодо розміщення кореня рівняння, можливий лише один з таких трьох випадків:

- 1) $x^* = x_0$, коли $f(x_0) = 0$;
- 2) $x^* \in (a, x_0)$, коли $\text{sign}(f(x_0)) = \text{sign}(f(b))$;
- 3) $x^* \in (x_0, b)$, коли $\text{sign}(f(x_0)) = \text{sign}(f(a))$.

Якщо виконується перша умова, то корінь знайдено. В інших випадках – відрізок локалізації кореня зменшився удвічі. Позначимо його через $[a_1, b_1]$.

Продовжуючи процедуру поділу n разів, ми знайдемо відрізок локалізації кореня $[a_n, b_n]$ довжиною $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$. Його середина – $x_n = (a_n + b_n)/2$ дає наближення кореня з абсолютною похибкою $\varepsilon = 2^{-n-1}(b - a)$, тобто:

$$\left| x^* - x_n \right| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

2. Метод простої ітерації

Нехай $f(x) \in C^1(V_a(x^*))$, $f'(x) > 0$, $x \in V_a(x^*)$, де x^* – корінь рівняння (1). Позначимо $M_1 = \max_{x \in V_a(x^*)} f'(x)$, $m_1 = \min_{x \in V_a(x^*)} f'(x)$.

Перетворимо рівняння (1) до вигляду

$$x = \varphi(x) \quad (3)$$

і розглянемо ітераційний процес:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad x_0 \in V_a(x^*). \quad (4)$$

Достатньою умовою збіжності послідовності (4) є умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in V_a(x^*). \quad (5)$$

Покладемо:

$$\varphi(x) = x - f(x)/K, \quad K > M_1/2. \quad (6)$$

Тоді умова (5) виконується, а параметр q оцінюється так:

$$q = \max\{|1 - m_1/K|, |1 - M_1/K|\}. \quad (8)$$

Він визначає швидкість збіжності, оскільки справедлива нерівність:

$$|x^* - x_n| \leq (q/(1-q))|x_n - x_{n-1}|. \quad (9)$$

Якщо сталі m_1 та M_1 не вдається оцінити теоретично чи графічно, то параметр $K > 0$ підбирають експериментально і використовують спрощену умову завершення ітераційного процесу:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

3. Метод Ньютона та споріднені методи

Метод Ньютона (метод дотичних). Нехай $f(x) \in C^2[a, b]$, $f'(x), f''(x)$ – знакосталі на $[a, b]$ і $f(a)f(b) < 0$.

Ітераційний процес методу Ньютона задають формулою:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad (11)$$

де $x_0 = a$, якщо $f(a)f''(x) > 0$; $x_0 = b$, якщо $f(b)f''(x) > 0$.

Метод дає монотонну послідовність, яка наближає корінь у першому випадку – зліва, а в другому – справа. Квадратична швидкість збіжності методу дає змогу використати спрощену умову

зупинки:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \Rightarrow x^* \approx x_n . \quad (12)$$

Якщо похідну обчислювати лише один раз, то отримаємо *спрощений метод Ньютона*, який має лише лінійну швидкість збіжності:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0) . \quad (13)$$

Метод січних. Для наближеного обчислення похідної в методі Ньютона застосуємо різницеву формулу:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} . \quad (14)$$

Тоді отримаємо ітераційний процес методу січних:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} . \quad (15)$$

Початкові точки x_0 , x_1 вибирають так само, як у методі Ньютона.

Метод хорд. Визначається ітераційним процесом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n) , \quad (16)$$

де $x_0 = a$, $x_1 = b$, якщо $f(a)f''(x) > 0$; $x_0 = b$, $x_1 = a$ якщо $f(b)f''(x) > 0$. У першому випадку метод дає наближення до кореня справа, у другому – зліва.

Комбінований метод хорд і дотичних. Поєднує методи хорд і дотичних з метою почергового наближення до кореня зліва і справа, що дає просту оцінку похибки. Метод дотичних використовують незалежно, він дає наближення для точки x_0 методу хорд.

Позначимо через x_n та \bar{x}_n наближення кореня з недостатчею та надлишком і покладемо $x_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$.

Для випадку $f(a)f''(x) > 0$ ітераційний процес записується так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n). \quad (17)$$

Коли $f(b)f''(x) > 0$, тоді

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \bar{x}_n}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)} f(x_n), \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}. \quad (18)$$

Умова завершення процесу $|\bar{x}_n - x_n| < \varepsilon$ забезпечує точність:

$$|x^* - (\bar{x}_n + x_n)/2| < \varepsilon/2. \quad (19)$$

Завдання

1. Програмна реалізація методу

У середовищі Delphi напишіть програму розв'язування нелінійного рівняння одним з методів відповідно до номера Nmodб+1 (N – номер студента у списку групи):

- 1) метод половинного ділення;
- 2) метод простої ітерації;
- 3) метод Ньютона;
- 4) метод січних;
- 5) метод хорд;
- 6) комбінований метод хорд і дотичних.

Загальні вимоги до програми такі:

1. Введення меж відрізка, точності та максимальної кількості ітерацій за допомогою вікна редагування **Edit**.
2. Формування таблиці значень функції (компонента **StringGrid**).
3. Побудова графіка вихідної функції (компонента **Chart**).
4. Виведення початкового наближення, визначеного за графіком.
5. Виведення значення кореня, значення функції, досягнутої точності та кількості ітерацій.

2. Тестування програми

Придумайте тестовий приклад і проведіть тестування програми.

3. Розв'язування практичної задачі

Розглянемо інвестиційний проект тривалістю n часових періодів. Позначимо через R_k повернення наприкінці k -го періоду. Внутрішня ставка дохідності IRR обчислюється як розв'язок відносно процентної ставки i нелінійного рівняння

$$\sum_{k=0}^n R_k / (1+i)^k = 0.$$

Знайдіть IRR для інвестиційного проекту з параметрами: $R_0 = -1500$, $R_1 = -1000$, $R_k = 500(1 + 1/(N \bmod 5 + 1))$, $k = \overline{2, n-1}$, $R_n = 1300$, $n = N \bmod 5 + 5$.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми, приведіть результати тестування програми, розв'язок практичної задачі та зробіть висновки.

Задачі і вправи

1. Дайте геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для випадків $-1 < \phi'(x) < 0$ та $0 < \phi'(x) < 1$.
2. Наведіть графічний приклад, коли метод простої ітерації розбігається.
3. Дайте геометричну інтерпретацію умови $a \leq \phi(x) \leq b$.
4. Для випадку $\phi(x) = x - f(x)/K$ знайдіть константу K , яка забезпечує виконання умови $-1 < \phi'(x) < 0$.
5. Доведіть, що коли Φ – стискуючий оператор в околі нерухомої точки $V_r(x^*)$, то він відображає цей окіл в себе.
6. Дайте геометричну інтерпретацію методу Ньютона.
7. Дайте геометричну інтерпретацію спрощеного методу Ньютона.

8. Дайте геометричну інтерпретацію методу січних.
9. Дайте геометричну інтерпретацію методу хорд.
10. Дайте геометричну інтерпретацію комбінованого методу хорд і дотичних.

Методичні рекомендації

1. Робота з компонентою **StringGrid** [2,3]

Компонента **StringGrid** розташована на сторінці **Additional** бібліотеки візуальних компонент **Delphi**. Вона представляє собою таблицю стрічок. Дані таблиці можуть редагуватися, або призначаються лише для читання. Таблиця **StringGrid** може мати лінійки прокручування з фіксованою зоною. Призначена, передусім, для введення і відображення текстової інформації.

Центральною властивістю компоненти є **Cells** – двовимірний масив комірок типу **String**, кожна з яких може містити довільний текст. Конкретна комірка визначається парою індексів – номером стовпчика і номером рядка, на перетині яких вона розташована (нумерація починається з нуля).

Кількість комірок по кожному з вимірів зберігає пара властивостей **ColCount** (кількість стовпчиків) і **RowCount** (кількість рядків). Їхні значення, а, отже, і розміри таблиці, можуть змінюватись програмно, однак вони повинні бути більшими принаймні на одиницю від значень властивостей **FixedColumn** і **FixedRows**, які визначають розміри фіксованої зони.

Вміст комірок можна редагувати. З цією метою властивість **goEditing** з множини **Options** встановлюється **True**.

Для перетворення числових даних у текст фіксованого формату зручно скористатись функцією **FloatToStrF(Value: Extended; Format: TFloatFormat; Precision, Digits: Integer): string**.

Ця функція перетворює числову величину **Value** у текстову стрічку заданого формату відповідно до значень параметрів **Format**, **Precision**, **Digits**.

Величина **Format** є типу **TFloatFormat = (ffGeneral, ffExponent, ffFixed, ffNumber, ffCurrency)**. Наприклад, її значення **ffExponent** задає такий формат з плаваючою крапкою **"-d.ddd...E+dddd"**.

Параметр **Precision** визначає кількість знаків у представленні числа (включаючи першу цифру перед крапкою і цифри після крапки). Параметр **Digits** задає мінімальну кількість цифр порядку (0 – 4).

Як приклад використання цієї компоненти, приведемо

процедури представлення масивів даних у таблиці та виводу даних з таблиці у текстовий файл.

Нехай маємо попередньо описані величини:

```
const m=10; n=4;
x: array [0..n] of real; y: array [0..m] of
real;
fxy: array [0..m, 0..n] of real;
```

Приклад процедури, яка реалізує формування таблиці **StringGrid**, наведено нижче:

```
procedure TForm1.But_TabFormClick(Sender:
TObject);
var u:real; i,j:integer; s0:string;
begin
StringGrid1.ColCount:=n+2;
StringGrid1.RowCount:=m+2;
for j=0 to n do
begin
if x[j]>=0 then s0:=' ' else s0:='';

StringGrid1.Cells[j+1,0]:=s0+FloatToStrF(x[j],
ffExponent,4,2);
for i:=0 to m do
begin
if y[i]>=0 then s0:=' ' else s0:='';

StringGrid1.Cells[0,i+1]:=s0+FloatToStrF(y[i],
ffExponent,4,2);
u:=fxy[i,j];
if u>=0 then s0:=' ' else s0:='';

StringGrid1.Cells[j+1,i+1]:=s0+FloatToStrF(u,f
ffExponent,6,2);
end;
end;
end;
```

Вивід даних з таблиці **StringGrid** у текстовий файл з використанням компоненти **SaveDialog** (сторінка **Dialogs**) реалізує

така процедура:

```
procedure TForm1.But_Tab1SaveClick(Sender:
TObject);
Var i,j:integer;  sx,sy,su:string;
begin
if SaveDialog1.Execute then
  begin
    AssignFile(File1,SaveDialog1.FileName);
    Rewrite(File1);
    Writeln(File1,'          x          y
u');
    for i:=0 to m do
      for j:=0 to n do
        begin
          sx:=StringGrid1.Cells[j+1,0];
          sy:=StringGrid1.Cells[0,i+1];
          su:=StringGrid1.Cells[j+1,i+1];
          WriteLn(File1,'  ',sx,'  ',sy,'  ',su);
        end;
      CloseFile(File1);
    end;
  end;
```

2. Робота з компонентою Chart [2,3]

Компонента **Chart** (сторінка **Additional**) представляє собою поле, на якому будуються графіки і діаграми. Вона керує координатними осями та формою відображення. Дані містяться в об'єктах **Series** типу **TChartSeries**.

Для побудови графіка розміщуємо компоненту на формі, задаємо у її властивості **Align** значення **AIClient** і здійснюємо подвійне натиснення лівою клавішею миші на цій компоненті. Відкривається вікно **Редактора Діаграм**, яке дає змогу задати загальні властивості компоненти, а також властивості діаграм для окремих серій даних.

Значення, які необхідно відобразити на графіку, заносять до серій методом **AddXY**. Перший параметр цього методу – значення аргумента, другий – значення функції, третій – підпис точки,

четвертий – колір. Наступну процедуру призначено для побудови графіків функцій синус і косинус на відрізьку $[a,b]$. Вхідні дані зчитуються з вікна редагування **LabeledEdit**.

```
procedure TForm1.But_GraphClick(Sender:
TObject);
var a,b,h,x,y1,y2: real; i,n:integer;
begin
a:=StrToFloat(LabEdit_a.text);
b:=StrToFloat(LabEdit_b.text);
n:=StrToInt(LabEdit_n.text);
h:=(b-a)/n; x:=a-h;
Series1.Clear; Series2.Clear;
for i:=0 to n do
begin
x:=x+h;
y1:=sin(x);
y2:=cos(x);
Series1.AddXY(x,y1,' ',clRed);
Series2.AddXY(x,y2,' ',clGreen);
end;
end;
```

Збереження графіків у форматі *.bmp здійснюють методом **SaveToBitmapFile** з використанням компоненти **SaveDialog** (сторінка **Dialogs**), наприклад:

```
begin
if SaveDialog2.Execute then
begin
File2:= SaveDialog2.FileName;
Chart1.SaveToBitmapFile(File2);
end;
end;
```


Лабораторна робота № 3

"Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь"

Теоретичні відомості

1. Метод Гаусса

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ або } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{in+1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Прямий хід

1. Нехай $a_{11} \neq 0$. Розділимо перший рядок матриці та правої частини на a_{11} , послідовно помножимо його на перші елементи нижніх рядків і віднімемо від цих рядків

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{2, n+1}. \quad (2)$$

2. На початку k -го кроку відмінними від нуля будуть лише елементи квадратної матриці порядку k в нижньому правому куті вихідної матриці. Нехай $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Розділимо k -й рядок матриці та правої частини на цей елемент, послідовно помножимо отриманий рядок на перші елементи нижніх рядків і віднімемо від цих рядків

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}, \quad i = \overline{k+1, n}, \quad j = \overline{k+1, n+1}. \quad (3)$$

Процес завершується на кроці $n-1$ зведенням матриці до трикутного виду.

Зворотний хід

Полягає у послідовному визначенні невідомих:

$$x_i = \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j \right) / a_{ii}^{(i-1)}, \quad i = \overline{n, 1}. \quad (4)$$

Визначник матриці обчислюють за формулою:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (5)$$

Розглянута найпростіша схема має суттєвий недолік – вона непридатна, коли головний елемент стає нульовим ($a_{kk}^{(k-1)} = 0$). Цей недолік усувають вибором найбільшого серед елементів $a_{ij}^{(k-1)} \neq 0, i = \overline{k, n}, j = \overline{k, n}$ як головного з відповідною перестановкою рядків і стовпців матриці та перепозначенням невідомих. При цьому потрібно підраховувати кількість перестановок рядків і стовпців, оскільки вони змінюють знак визначника.

Найпростіше вибирати головний елемент лише серед елементів k -го стовпчика, це не вимагає перепозначення невідомих. Таку схему називають *методом Гаусса з вибором головного елемента по рядках*.

2. Метод квадратного кореня

Розглянемо СЛАР (1). Нехай матриця \mathbf{A} – симетрична і додатно визначена. Тоді вона розкладається на добуток двох трикутних матриць:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}, \text{ де } \mathbf{S} = \{[s_{ij} \in \mathbf{R}] \mid i > j \Rightarrow s_{ij} = 0; i, j = \overline{1, n}\}. \quad (6)$$

Якщо елементи матриці \mathbf{S} знайдено, то розв’язування системи (1) зводиться до розв’язування двох систем з нижньою та верхньою трикутними матрицями:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (8)$$

Алгоритм реалізації методу квадратного кореня має три етапи:

- 1) визначення верхньої трикутної матриці \mathbf{S} ;
- 2) розв'язування системи рівнянь (7);
- 3) розв'язування системи рівнянь (8).

З рівності (6) отримаємо систему рівнянь для визначення елементів матриці \mathbf{S} :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n s'_{ik} s_{kj} = \sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} + s_{ii} s_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{i, n}, \quad (9)$$

розв'язок якої легко знайти у вигляді рекурентних формул. При $i=1$ отримаємо $s_{11}^2 = a_{11}$, $s_{11} s_{1j} = a_{1j}$, $j = \overline{2, n}$, звідки знайдемо всі елементи першого рядка матриці \mathbf{S} :

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = a_{1j} / s_{11}, \quad j = \overline{2, n}. \quad (10)$$

Далі аналогічно отримаємо:

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, \quad s_{ij} = \frac{1}{s_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} \right), \quad j = \overline{i+1, n}. \quad (11)$$

Значимо, що для додатно визначених матриць елементи s_{ii} – дійсні.

Систему рівнянь (7) представимо так:

$$\sum_{k=1}^n s'_{ik} y_k = \sum_{k=1}^n s_{ki} y_k = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} y_k + s_{ii} y_i = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Її розв'язок знаходять за допомогою рекурентних формул:

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{s_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} y_k \right), \quad i = \overline{2, n}. \quad (13)$$

Систему рівнянь (8) розв'язують аналогічно зворотному ходу методу Гаусса:

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{s_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n s_{ik} x_k \right), \quad i = \overline{n-1, 1}. \quad (14)$$

3. Метод простої ітерації

Розглянемо СЛАР (1) з невідродженою матрицею. Перетворимо її до еквівалентного вигляду:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad (15)$$

де $\mathbf{B} = \mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{b}$, $\alpha \in R$.

Введемо у розгляд норми $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$.

Якщо матриця \mathbf{A} має строгу діагональну перевагу у рядках і всі її діагональні елементи додатні

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad a_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

то вибір параметра α з умови $\alpha \in (0, 1/\|\mathbf{A}\|_{\infty})$ забезпечує виконання нерівності:

$$q = \|\mathbf{B}\|_{\infty} < 1. \quad (17)$$

Обираємо початкове наближення $\mathbf{x}^{(0)}$ (наприклад, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}$), наступні наближення розраховуємо за формулою:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad k \geq 1, \quad (18)$$

до виконання умови

$$\frac{\|\mathbf{B}\|_{\infty}}{1 - \|\mathbf{B}\|_{\infty}} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \varepsilon, \quad (19)$$

що гарантує оцінку $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_{\infty} \leq \varepsilon$, де \mathbf{x}^* – точний розв'язок системи рівнянь.

4. Метод Якобі

Розглянемо СЛАР з діагональною перевагою (1). Перетворимо її до еквівалентного вигляду:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad (20)$$

де $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$, $c_i = b_i/a_{ii}$, $b_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Обираємо початкове наближення $\mathbf{x}^{(0)}$ (наприклад, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}$), наступні наближення розраховуємо за формулою:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad k \geq 1, \quad (21)$$

до виконання умови:

$$\left(\|\mathbf{B}\|_{\infty} / (1 - \|\mathbf{B}\|_{\infty}) \right) \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \varepsilon, \quad (22)$$

що гарантує оцінку $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_{\infty} \leq \varepsilon$, де \mathbf{x}^* – точний розв’язок системи.

5. Метод прогонки

Розглянемо СЛАР $n+1$ -го порядку з тридіагональною матрицею:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad A_0 = 0, \quad C_n = 0. \quad (23)$$

Прямий хід методу прогонки

Визначимо коефіцієнти κ_i представлення

$$x_i = \kappa_i x_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (24)$$

за рекурентними формулами:

$$\kappa_i = -\frac{C_i}{A_i \kappa_{i-1} + B_i}, \quad v_i = \frac{F_i - A_i v_{i-1}}{A_i \kappa_{i-1} + B_i}, \quad \kappa_{-1} = 0, \quad v_{-1} = 0. \quad (25)$$

Зворотний хід методу прогонки

Спочатку знайдемо невідому x_n з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_{n-1} = \kappa_{n-1} x_n + v_{n-1} \\ A_n x_{n-1} + B_n x_n = F_n \end{cases} \quad (26)$$

Отримаємо:

$$x_n = \frac{F_n - A_n v_{n-1}}{A_n \kappa_{n-1} + B_n}. \quad (27)$$

Далі послідовно обчислюємо $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$ за формулою (24).

Метод можна застосовувати, коли знаменник у формулах

(25),(27) не перетворюється в нуль. Для цього достатньо виконання умов діагональної переваги, зі строгим виконанням їх лише для першого або останнього рядка матриці [23]. З цих умов випливає також нерівність $|k_i| \leq 1, i = \overline{1, n-1}$, що забезпечує стійкість розрахунків за формулою (24).

Завдання

1. Програмна реалізація методу

У середовищі Delphi напишіть програму розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь одним з викладених методів відповідно до номера $N \bmod 5 + 1$ (N – номер студента у списку групи).

* Модифікуйте програму для визначення оберненої матриці.

Загальні вимоги до програми:

1. Ввід розміру системи рівнянь, матриці та вектора правих частин. За допомогою компоненти **StringGrid** з текстового файла або безпосередньо.
2. Вивід розв'язку, досягнутої точності та кількості ітерацій для ітераційних методів. Збереження результату в текстовий файл.

3. Тестування програми

Придумайте тестовий приклад і проведіть тестування програми. Систему рівнянь для тестування отримайте так: задайтесь матрицею з додатними діагональними елементами та строгою діагональною перевагою у рядках (у якої модулі діагональних елементів перевищують суму модулів усіх інших елементів рядка) та вектором розв'язку, для яких знайдіть вектор правих частин.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Наведіть результати тестування програми, зробіть висновки.

Задачі та вправи

1. Доведіть, що норма матриці $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, породжена векторною нормою $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, обчислюється за формулою $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
2. Доведіть, що норма матриці $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, породжена векторною нормою $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, обчислюється за формулою $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
3. Доведіть, що спектральна норма симетричної додатно визначеної матриці \mathbf{S} дорівнює її максимальному власному числу $\|\mathbf{S}\|_2 = \lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.
4. Доведіть, що для симетричної додатно визначеної матриці \mathbf{S} спектральне число обумовленості дорівнює: $cond_2 \mathbf{S} = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$, де $\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$, $\lambda_n = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.
5. Доведіть, що для норми матриці, породженої векторною нормою, виконується нерівність $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$.

6. Доведіть, що діагональні елементи додатно визначеної матриці – додатні.

7. Знайдіть числа обумовленості матриць:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Доведіть, що найбільший елемент додатно визначеної матриці розташований на головній діагоналі.

9*. Нехай \mathbf{z} – випадковий вектор з матрицею коваріацій \mathbf{S} . Вкажіть матрицю лінійного перетворення, яка переводить вихідний вектор \mathbf{z} у вектор з одиничною матрицею коваріацій.

10*. Доведіть, що матриця коваріацій \mathbf{S} є симетричною невід’ємно визначеною матрицею, тобто $(\mathbf{S} = \mathbf{S}^T) \wedge (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0)$.

Підказка. Скористайтесь означенням матриці коваріацій через математичне сподівання, означенням невід’ємно визначеної матриці та властивостями математичного сподівання.

Лабораторна робота № 4 "Метод найменших квадратів"

Теоретичні відомості

1. Дискретне середньоквадратичне наближення

Розглянемо на відрізку $[a, b] \subset \mathbf{R}$ сітку вузлів $\Omega_n = \{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b\}$. Сіткові функції, задані на Ω_n , утворюють лінійний простір, який збігається з \mathbf{R}^{n+1} . Введемо в цьому просторі скалярний добуток за формулою:

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n \rho_i f(x_i) g(x_i), \quad \rho_i > 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (1)$$

Утворений таким способом гільбертів простір позначимо H_{n+1} . Якщо $\rho_i = 1, i = \overline{0, n}$, то цей простір збігається з евклідовим простором E^{n+1} .

Розглянемо на відрізку $[a, b]$ систему лінійно незалежних функцій $\{\varphi_k(x)\}_0^m$. Система лінійно незалежних функцій утворює систему Чебишева, якщо кожний ненульовий узагальнений многочлен по цій системі має на $[a, b]$ не більше n нулів.

Для системи Чебишева вектори $\mathbf{u}_k = (\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), \dots, \varphi_k(x_n))$, $k = \overline{0, m}$ є лінійно незалежними, а їхня лінійна оболонка утворює в H_{n+1} лінійний підпростір розмірності $m+1$, який позначимо H_{n+1}^{m+1} .

Розглянемо функцію $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ і відповідну їй сіткову функцію $\mathbf{f} \in H_{n+1}$. Найкраще наближення вектора $\mathbf{f} \in H_{n+1}$ елементами підпростору H_{n+1}^{m+1} позначимо через $\mathbf{f}_m = \sum_{k=0}^m a_k \mathbf{u}_k$.

Многочленом найкращого наближення функції $f(x)$ за дискретним методом найменших квадратів (МНК) називають узагальнений многочлен:

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x), \quad m \leq n. \quad (2)$$

При $m=n$ він збігається з інтерполяційним многочленом для функції $f(x)$ на сітці Ω_n .

Коефіцієнти представлення (2) визначаються з умови мінімуму дискретного середньоквадратичного відхилення:

$$\delta(f_m, f) = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (f_m(x_i) - f(x_i))^2} \quad (3)$$

і є розв'язками нормальної системи рівнянь МНК:

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

де $\mathbf{G} = [(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l)] \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R})$, $\mathbf{b} = [(\mathbf{u}_k, \mathbf{f})] \in \mathbf{R}^m$.

Матриця нормальної системи \mathbf{G} є матрицею Грама. Оскільки вектори \mathbf{u}_k – лінійно незалежні, то визначник цієї матриці не дорівнює нулю.

Значимо, що нормальна система МНК (4) для системи степеневих функцій $1, x, x^2, \dots, x^m$ є погано обумовленою при великих m і безпосередньо не використовується для $m > 5$.

2. Апроксимація емпіричних залежностей

Нехай значення f_i функції $f(x)$ у точках $x_i \in \Omega_n$, $i = \overline{0, n}$ визначаються в результаті експерименту. Припустимо, що похибки спостережень $\varepsilon_i = f_i - f_i^0$, $i = \overline{0, n}$ є незалежними випадковими величинами з нульовим середнім і дисперсією σ^2 .

Позначимо многочлени найкращого дискретного середньоквадратичного наближення (2), які відповідають точним \mathbf{f}^0 та наближеним \mathbf{f} значенням функції $f(x)$ у вузлах сітки відповідно через $f_m^0(x)$ та $f_m(x)$. Введемо в розгляд середньоквадратичні відхилення (3):

$$\delta_m = \delta(f_m, f); \quad \delta_m^0 = \delta(f_m^0, f^0); \quad d_m = \delta(f_m, f^0).$$

Зазначимо, що d_m – величина середньоквадратичного відхилення многочлена найкращого дискретного середньоквадратичного наближення $f_m(x)$, побудованого за вектором \mathbf{f} значень функції з випадковими помилками, від вектора \mathbf{f}^0 точних значень функції.

За зроблених припущень щодо випадкової похибки виконуються рівності [1]:

$$M[d_m^2] = (\delta_m^0)^2 + \frac{m+1}{n+1} \sigma^2, \quad (5)$$

$$M[\delta_m^2] = (\delta_m^0)^2 + \frac{n-m}{n+1} \sigma^2. \quad (6)$$

Практичним питанням є вибір степеня m апроксимуючого многочлена. Як бачимо, перший доданок в (5) зі зростанням m зменшується, а другий – збільшується. Отож варто очікувати, що величина $M[d_m]$ має мінімум при деякому $m = m^*$. Однак величину d_m^2 неможливо розрахувати безпосередньо.

Розглянемо величину

$$\sigma_m^2 \equiv \frac{n+1}{n-m} \delta_m^2. \quad (7)$$

Її математичне сподівання з урахуванням (6) дорівнює:

$$M[\sigma_m^2] = \frac{n+1}{n-m} (\delta_m^0)^2 + \sigma^2 \quad (8)$$

Припустимо, що функція $f^0(x)$ – близька до деякого узагальненого многочлена $f_{m_0}^0(x)$. Тоді величина δ_m^0 мінімальна при $m = m_0$, а при збільшенні m вона стабілізується в деякому діапазоні $m_0 \leq m \leq m_1$. Як наслідок, величина $M[\sigma_m^2]$ у цьому діапазоні стабілізується або починає зростати. Це дає практичне правило вибору параметра m .

Завдання

1. Програмна реалізація методу

Функція $y = f(x)$ задана таблицею значень на сітці Ω_n .

Знайдіть алгебричний многочлен $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ найкращого

дискретного середньоквадратичного наближення оптимального степеня $m \leq 4$. За оптимальну степінь многочлена візьміть таке значення m , для якого величина σ_m^2 (7) стабілізується або починає зростати. Для розв'язування нормальної системи скористайтесь методом розв'язування СЛАР, реалізованим раніше.

У середовищі **Delphi** напишіть відповідну програму.

Загальні вимоги до програми такі:

1. Вхідні дані: таблиця значень емпіричної величини.
2. Виведення середньоквадратичних відхилень для кожної величини m та його оптимальний вибір.
3. Виведення коефіцієнтів оптимального многочлена.
4. Виведення графіків емпіричної величини та многочлена найкращого наближення.

2. Тестування програми

У таблиці 1 представлені дані спостережень для 10-ти емпіричних величин, які залежать від параметра x . Знайдіть оптимальний многочлен найкращого дискретного середньоквадратичного наближення для емпіричної величини з номером $N \bmod 10 + 1$.

Таблиця 1. Значення емпіричних величин

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	0,09	-1,01	0,871	-0,89	0,977	-0,11	0,075	0,083	-0,960	0,889
-0,9	0,25	-0,82	1,025	-0,60	0,937	0,14	0,293	-0,029	-0,735	0,833
-0,8	0,33	-0,68	1,049	-0,25	0,777	0,10	0,712	0,138	-0,503	0,614
-0,7	0,48	-0,48	1,286	-0,06	0,696	0,07	0,642	0,196	-0,500	0,540
-0,6	0,41	-0,45	1,263	0,08	0,658	-0,07	0,707	0,353	-0,095	0,323
-0,5	0,60	-0,49	1,270	0,50	0,781	0,18	1,059	0,482	-0,021	0,229
-0,4	0,70	-0,23	1,204	0,69	0,650	0,00	0,792	0,574	-0,117	0,152
-0,3	0,89	-0,16	1,101	0,77	0,711	0,12	0,918	0,635	-0,193	0,141
-0,2	0,72	-0,28	1,018	0,69	0,894	0,16	0,950	0,644	-0,053	0,159
-0,1	0,95	-0,12	1,050	0,97	1,076	0,03	0,926	0,903	-0,082	-0,011
0	0,84	-0,09	1,108	1,24	0,823	0,12	1,027	1,033	0,058	0,094
0,1	1,05	0,03	1,019	0,92	1,061	-0,19	0,953	1,235	0,035	-0,006
0,2	1,23	0,45	1,075	1,29	1,077	-0,07	1,047	1,269	0,158	0,123
0,3	1,25	0,39	1,050	1,30	1,357	0,16	1,121	1,500	0,059	0,057
0,4	1,66	0,75	1,113	1,45	1,582	0,21	1,109	1,412	0,152	0,106
0,5	1,74	0,88	1,529	1,80	1,712	0,32	1,044	1,481	0,172	0,517
0,6	2,34	1,09	1,606	1,60	1,977	0,52	1,499	1,530	0,334	0,364
0,7	2,54	1,69	1,943	2,12	2,029	0,80	1,309	1,625	0,379	0,527
0,8	2,93	2,08	1,963	2,25	2,421	1,25	1,671	1,837	0,586	0,701
0,9	3,43	2,41	2,565	2,70	2,636	1,75	1,486	1,853	0,685	0,637
1	3,92	3,01	2,960	3,09	3,046	1,97	1,959	2,091	1,084	1,066

3. Розв'язування практичних задач

Розв'яжіть дві подані практичні задачі.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Подайте результати тестування програми і розв'язок практичної задачі, зробіть висновки.

Практичні задачі

1. Наближення емпіричних залежностей

У таблиці 2 наведено дані про залежність модуля пружності деяких металів від температури [5]. Для металу, який відповідає параметру N_{mod5} , дайте апроксимацію цієї залежності квадратичною або кубічною параболою.

Таблиця 2. Модуль Юнга деяких металів

T, °C	Модуль Юнга, ГПа				
	Fe	Mn	Cu	Ag	Al
-100	223,5	197,3	–	–	–
0	211,2	188,1	122,5	93,8	70,6
100	201,3	180,4	116,7	87,0	65,9
200	194,5	164,9	107,8	79,0	59,6
300	177,3	154,2	99,6	73,2	54,9
400	164,0	138,7	84,0	61,8	47,1
500	149,5	120,2	69,1	53,8	36,9
600	132,3	92,5	57,9	45,8	27,5
700	99,6	74,0	44,9	37,8	–
800	63,8	55,5	32,7	28,6	–

2. Короткотермінове прогнозування

У таблиці 3 наведено деякі дані про населення України за 1990–2004 роки [31]. Для показника, який відповідає параметру N_{mod5} , зробіть прогноз на наступний рік і порівняйте з реальними даними Держкомстату України.

Таблиця 3. Деякі дані про населення України за 1990–2004 роки

Рік	Кількість населення наприкінці року, млн. осіб	Кількість народжених, тис. осіб	Прийом студентів у закладах I–II рівнів акредитації, тис. осіб	Прийом студентів у закладах III–IV рівнів акредитації, тис. осіб	Кількість виконавців НДР, тис. осіб
1990	51,9	657,2	241,0	174,5	313,1
1991	52,1	630,8	237,5	173,7	295,0
1992	52,2	596,8	212,6	170,4	248,5
1993	52,1	557,5	198,9	170,0	222,1
1994	51,7	521,5	194,0	198,0	207,4
1995	51,3	492,9	188,8	206,8	179,8
1996	50,8	467,2	183,4	221,5	160,1
1997	50,4	442,6	166,2	264,7	142,5
1998	49,9	419,2	164,9	290,1	134,4
1999	49,4	389,2	170,1	300,4	126,0
2000	48,9	385,1	190,1	346,4	120,8
2001	48,5	376,4	201,2	387,1	113,3
2002	48,0	390,7	203,7	408,6	107,4
2003	47,6	408,6	202,5	432,5	104,8
2004	47,3	427,3	182,2	475,2	106,6

Лабораторна робота № 5 "Обчислення визначених інтегралів"

Теоретичні відомості

1. Квадратурні формули

Розглянемо визначений інтеграл:

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Відрізок інтегрування $[a, b]$ розіб'ємо на n частин з кроком $h = (b - a)/n$ і позначимо $x_i = a + ih$, $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Обчислення інтеграла можна здійснити за такими наближеннями:

1) *метод центральних прямокутників*:

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) + h^2 C_0 + O(h^4), \quad C_0 = \frac{1}{24} \int_a^b f^{(2)}(x) dx; \quad (2)$$

2) *метод трапецій*:

$$I = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) + h^2 C_1 + O(h^4), \quad C_1 = -\frac{1}{12} \int_a^b f^{(2)}(x) dx; \quad (3)$$

3) *метод парабол (Симпсона)*:

$$I = \frac{h}{3} (f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})) + h^4 C_2 + O(h^6), \quad (4)$$
$$C_2 = -\frac{1}{180} \int_a^b f^{(4)}(x) dx.$$

Обчислення інтегралів з заданою точністю ε здійснюється шляхом автоматичного вибору кроку h (наприклад, послідовним поділом його навпіл) з використанням правила Рунге практичної оцінки похибки.

2. Правило Рунге

Нехай S – невідоме точне значення деякої величини, S_h – відоме наближене значення цієї величини, залежне від малого параметра h . Припустимо, що має місце представлення:

$$S = S_h + Ch^k + O(h^{k+m}), \quad C = \text{const}, \quad (5)$$

тоді справедлива оцінка

$$S - S_{h/2} = \frac{S_{h/2} - S_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}). \quad (6)$$

Це дає критерій практичного завершення обчислювального процесу при послідовному згущенні сітки:

$$\frac{1}{(2^k - 1)} |S_h - S_{h/2}| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Окрім того, дає змогу отримати уточнене (за Річардсоном) значення $S_{h/2}^*$:

$$S_{h/2}^* = \frac{2^k S_{h/2} - S_h}{2^k - 1}, \quad (8)$$

для якого

$$S - S_{h/2}^* = O(h^{k+m}). \quad (9)$$

3. Обчислення невластивого інтеграла з нескінченними межами

Обчислення такого інтеграла здійснюють послідовним наближенням його інтегралом зі скінченними межами.

Наприклад, для збіжного інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ необхідно

виконуватися умова $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} f(x)dx = 0$, отож потрібно знайти таке b ,

для якого $|\int_b^{\infty} f(x)dx| \leq \varepsilon/2$. Тоді $\int_0^{\infty} f(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$. Останній інтеграл необхідно обчислити з точністю $\varepsilon/2$.

У деяких випадках параметр b можна визначити аналітично.

Наприклад, $\int_b^{\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_b^{\infty} e^{-t/2} dt = 2e^{-b/2} \leq \varepsilon/2$.

4. Адитивний спосіб виділення особливостей

Адитивний спосіб виділення особливостей полягає в представленні підінтегральної функції $f(x)$ з особливістю як суми:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (10)$$

де $f_1(x)$ – має особливість, однак інтегрована аналітично, а $f_2(x)$ – достатню кількість разів неперервно диференційована.

Розглянемо цей спосіб для підінтегральної функції виду

$$f(x) = (x-c)^\alpha \varphi(x), \quad c \in [a, b], \quad -1 < \alpha < 0, \quad \varphi(x) \in C^{m+1}[a, b], \quad m \geq 0. \quad (11)$$

Розкладемо функцію $\varphi(x)$ за формулою Тейлора в околі точки c :

$$\varphi(x) = \varphi_m(x) + r_m(x), \quad (12)$$

де

$$\varphi_m(x) = \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c) + \dots + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(c)(x-c)^m - \text{многочлен Тейлора,}$$

$$r_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\xi)(x-c)^{m+1}, \quad \xi \in (a, b) - \text{залишковий член.}$$

Знаначимо, що за зроблених припущень $r_m^{(k)}(c) = 0, 0 \leq k \leq m$.

На основі розкладу (12) представимо вихідну функцію так:

$$f(x) = (x-c)^\alpha \varphi_m(x) + (x-c)^\alpha (\varphi(x) - \varphi_m(x)). \quad (13)$$

Перший доданок в (13) добре інтегрується аналітично, а другий є m раз неперервно диференційованим.

Для прикладу, розглянемо інтеграл $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x^2} dx$.

Обмежившись двома членами у формулі Тейлора, представимо його

так: $I = \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{\sqrt{x}} dx$. Перший інтеграл інтегрується

аналітично. У другому інтегралі підінтегральна функція є тричі неперервно диференційована, отож для його розрахунку можна скористатись формулою центральних прямокутників.

Завдання

1. Програмна реалізація методу

В середовищі Delphi напишіть програму обчислення визначеного інтеграла одним з методів відповідно до номера $N \bmod 3 + 1$ (N – номер студента у списку групи):

- 1) метод прямокутників;
- 2) метод трапецій;
- 3) метод Симпсона.

Обчислення інтегралів здійснюйте з заданою точністю ε шляхом автоматичного вибору кроку h за правилом Рунге (7)–(8). Передбачте мінімальну кількість звернень до підпрограми обчислення підінтегральної функції [14].

Загальні вимоги до програми такі:

1. Вхідні дані: відрізок інтегрування, точність і максимальна кількість вузлів.
2. Виведення значення інтеграла, досягнутої точності та кількості вузлів.

2. Тестування програми

Придумайте тестовий приклад і проведіть тестування програми.

3. Розв'язування практичної задачі

Відповідно до параметра $N \bmod 5 + 1$ розв'яжіть одну з поданих практичних задач.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому подайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Наведіть результати тестування програми і розв'язок практичної задачі, зробіть висновки.

Практичні задачі

1. Розрахунок функції стандартного нормального розподілу

Складіть таблицю функції стандартного нормального розподілу $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ для $x = 1(0,1)2$ з абсолютною точністю 0,0001 і побудуйте її графік.

2. Розрахунок інтегральної показникової функції

Побудуйте графіки інтегральної показникової функції $E_n(x) = \int_1^{\infty} \exp(-xt) t^{-n} dt$ на проміжку $x \in [0,5]$ для $n = 1,2,3$.

3. Розрахунок повного еліптичного інтеграла першого роду

Складіть таблицю значень повного еліптичного інтеграла першого роду $K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 x}}$ з чотирма вірними знаками для $\alpha \in [0, \pi/2]$ з кроком $\pi/18$.

4. Розрахунок повного еліптичного інтеграла другого роду

Складіть таблицю значень повного еліптичного інтеграла другого роду $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 x} dx$ з чотирма вірними знаками для $\alpha \in [0, \pi/2]$ з кроком $\pi/18$.

5.* Ефективність електричної лампочки [16]

Спектральна щільність потужності електромагнітного випромінювання одиницею поверхні абсолютно чорного тіла

визначають за законом Планка $u_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (\exp(hc/k\lambda T) - 1)}$,

де λ – довжина хвилі, T – абсолютна температура тіла, c – швидкість світла, h, k – сталі Планка і Больцмана.

Інтегрування по довжині хвилі від 0 до ∞ дає повну потужність випромінювання – закон Стефана-Больцмана:

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^2}.$$

Потужність випромінювання у діапазоні хвиль $\lambda \in [a, b]$

виражається інтегралом $u_L = \int_a^b u_\lambda d\lambda$, а ефективність джерела – величиною $eff(T) = u_L / u$. Для світлового діапазону, коли $a = 0,38$ мкм, $b = 0,78$ мкм, отримаємо:

$$eff(T) = 0,66 \cdot 10^{16} \int_{0,38}^{0,78} \frac{d\lambda}{\lambda^5 (\exp(1,44 \cdot 10^4 / \lambda T) - 1)}.$$

Складіть таблицю ефективності світлового джерела для значень абсолютної температури $T = 500$ (500)8000 °K з трьома значущими цифрами і побудуйте графік функції $eff(T)$.

Яка ефективність електричної лампочки розжарювання, якщо температура її нитки приблизно дорівнює 3500 °K ?

Лабораторна робота № 6 "Метод Монте-Карло"

Теоретичні відомості

1. Обчислення інтегралів методом Монте-Карло [24]

Розглянемо інтеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

де $f(x)$ – функція, інтегрована з квадратом $\int_a^b f^2(x) dx < +\infty$.

Нехай ξ – випадкова величина, задана на $[a, b]$ з густиною розподілу $p_\xi(x) \geq \delta > 0$. Введемо функцію випадкового аргумента:

$$\eta = \frac{f(\xi)}{p_\xi(\xi)}. \quad (2)$$

Її математичне сподівання дорівнює розглядуваному інтегралу:

$$M(\eta) = M\left(\frac{f(\xi)}{p_\xi(\xi)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{p_\xi(x)} p_\xi(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I, \quad (3)$$

а дисперсія, за зроблених припущень, обмежена:

$$b^2 = D(\eta) = \int_a^b \frac{f^2(x)}{p_\xi(x)} dx - I^2 < +\infty. \quad (4)$$

Нехай ξ_i – незалежні реалізації випадкової величини ξ , тоді незміщеною оцінкою математичного сподівання випадкової величини η є середнє арифметичне:

$$M(\eta) = I \approx \bar{\eta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)}{p_{\xi}(\xi_i)}. \quad (5)$$

Статистика $\bar{\eta}_n$ є сумою незалежних однаково розподілених випадкових величин. Отож легко знайти її математичне сподівання та дисперсію:

$$M(\bar{\eta}_n) = M(\eta) = I, \quad (6)$$

$$D(\bar{\eta}_n) = \frac{1}{n^2} nD(\eta) = \frac{b^2}{n}. \quad (7)$$

З іншого боку, за центральною граничною теоремою, за великих n статистика $\bar{\eta}_n$ має розподіл, близький до нормального з параметрами $a=I$ та $\sigma=b/\sqrt{n}$. Тоді, за “правилом 3σ ” справедлива оцінка:

$$P\{|\bar{\eta}_n - I| < 3\sigma\} \approx 0,9973. \quad (8)$$

Останнє співвідношення дає у ймовірнісному сенсі оцінку похибки методу Монте-Карло:

$$\varepsilon \leq 3b/\sqrt{n}, \quad (9)$$

з якої знаходимо необхідну кількість симуляцій n

$$n \geq 9b^2/\varepsilon^2. \quad (10)$$

Величина дисперсії b^2 оцінюється статистикою:

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta}_n)^2. \quad (11)$$

Розігрування випадкової величини ξ з густиною $p_{\xi}(x)$ здійснюється шляхом розв’язування рівняння:

$$\int_a^{\xi_i} p_{\xi}(x) dx = \zeta_i, \quad (12)$$

де ζ_i – реалізація рівномірно розподіленої на інтервалі $[0,1]$ випадкової величини ζ .

Наприклад, для рівномірного розподілу з густиною:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b] \quad (13)$$

отримаємо

$$\xi_i = a + (b-a)\zeta_i. \quad (14)$$

2. Розрахунок ціни опціонів методом Монте-Карло [26]

Опціон – це контракт, який укладають між двома інвесторами, один з яких продає (виписує) опціон, а другий купує його і тим самим отримує право (але не зобов'язання) до настання чи на момент визначеної дати купити, або продати за фіксованою ціною оговорену кількість чи значення конкретного базисного активу. Розрізняють опціони двох типів: опціони, які дають право купити – *опціони купівлі (call options)*, та опціони, які дають право продати – *опціони продажу (put options)*.

Опціони з фіксованим терміном виконання називають *європейськими*, а опціони, які можуть бути виконані в будь-який момент до фіксованої крайньої дати – *американськими*.

Для європейських опціонів на купівлю та продаж премію власника, дисконтовану на початковий момент часу, розраховують за формулами:

$$C = e^{-rt}(S_t - K)^+ \quad P = e^{-rT}(K - S_T)^+, \quad (15)$$

де K – ціна виконання, S_T – ринкова вартість активу на час T , r – ставка неперервно-нарошуваного безризикового процента, $(X)^+ = \max\{0, X\}$.

Для опціонів американського стилю, відповідно, маємо:

$$C = \max_{0 \leq t \leq T} \left[e^{-rt}(S_t - K)^+ \right], \quad P = \max_{0 \leq t \leq T} \left[e^{-rt}(K - S_t)^+ \right]. \quad (16)$$

Випадкову ринкову вартість активу на час T можна подати так:

$$S_T = S_0 e^{r_1+r_2+\dots+r_T}, \quad (17)$$

де $r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$ – випадкова величина дохідності активу за день t .

За справедливої ціни опціону вважають математичне сподівання випадкової величини премії, статистичною оцінкою якого є середнє арифметичне окремих реалізацій.

Нехай $S_t^{(i)}$ – окремі симуляції випадкової ціни активу, тоді розрахункові формули методу Монте-Карло для європейських опціонів запишемо так:

$$M(C) \approx \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n (S_T^{(i)} - K)^+, \quad M(P) \approx \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n (K - S_T^{(i)})^+ . \quad (18)$$

Для американських опціонів, аналогічно, матимемо:

$$M(C) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{0 \leq t \leq T} \left[e^{-rt} (S_t^{(i)} - K)^+ \right],$$

$$M(P) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{0 \leq t \leq T} \left[e^{-rt} (K - S_t^{(i)})^+ \right]. \quad (19)$$

Теоретичну оцінку похибки методу Монте-Карло дає формула (9).

Зазначимо, що за припущення про нормальний розподіл дохідностей активу $r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$ з волатильністю σ та математичним

сподіванням $\mu = \frac{r}{T} - \frac{\sigma^2}{2}$, ціну європейських опціонів можна

визначити за формулами Блека-Шоулса:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad (20)$$

$$P = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2),$$

де

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$N(x)$ – функція стандартного нормального розподілу.

Завдання

1. Програмна реалізація методу

Підготуйте програму обчислення інтеграла (1) методом Монте-Карло, використовуючи випадкові величини з різною густиною розподілу:

- а) з постійною густиною розподілу;
- б) з лінійною густиною “пропорційною” підінтегральній функції

$$p(x) = \lambda [(f(b) - f(a))(x - a)/(b - a) + f(a)], \quad x \in [a, b].$$

Загальні вимоги до програми такі:

3. Вхідні дані: відрізок інтегрування, варіант густини, точність і максимальна кількість симуляцій методу Монте-Карло.
4. Результат: значення інтеграла, досягнута точність та кількість симуляцій методу Монте-Карло.

2. Тестування програми

Протестуйте програму для табличних інтегралів. Порівняйте графіки залежності реальної абсолютної похибки та її теоретичної оцінки від кількості симуляцій n .

3. Розв’язування практичної задачі

Розв’яжіть одну з поданих практичних задач.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Наведіть результати тестування програми і розв’язок практичної задачі, зробіть висновки.

Практичні задачі

Нехай початкова ціна активу $S_0 = 1000$, ціна виконання опціонного контракту $K = 1000$, термін виконання – рік ($T = 250$ днів), річна безризикова відсоткова ставка $r = 0,06$, а дохідність активу $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ за торговий день є нормально розподіленою величиною з волатильністю $\sigma = \frac{0,1}{\sqrt{250}}$ і математичним сподіванням

$$\mu = \frac{r}{250} - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Відповідно до параметра $N \bmod 4 + 1$ виконайте завдання:

1. Знайдіть ціну європейського опціону на купівлю і порівняйте її з отриманою за формулою Блека-Шоулса (20). Дослідіть практичну збіжність методу Монте-Карло.
2. Знайдіть ціну європейського опціону на продаж і порівняйте її з отриманою за формулою Блека-Шоулса (20). Дослідіть практичну збіжність методу Монте-Карло.
3. Знайдіть ціну американського опціону на купівлю. Порівняйте її з ціною відповідного європейського опціону, отриманою за формулою Блека-Шоулса.
4. Знайдіть ціну американського опціону на продаж. Порівняйте її з ціною відповідного європейського опціону, отриманою, за формулою Блека-Шоулса.

Методичні вказівки

У середовищі Delphi 6 реалізовано такі функції та процедури для генерації псевдовипадкових величин [2].

Функція *Random [(Range: Integer):Real* (Модуль **System**). Повертає випадкові числа, рівномірно розподілені на відрізку $[0, Range)$: якщо параметр *Range* не задано, то на відрізку $[0, 1)$. Для ініціалізації початкового значення генератора необхідно активізувати процедуру ***Randomize*** або задати значення системної змінної ***RandSeed***.

Функція *RandG(Mean, StdDev: Extended): Extended* (Модуль **Math**). Повертає випадкові числа, розподілені за нормальним законом з параметрами *Mean* та *StdDev*.

Функція *RandomFrom* (Модуль **Math**) має такі форми:
function RandomFrom(const AValues: array of Double): Double; overload;

function RandomFrom(const AValues: array of Integer): Integer; overload;

function RandomFrom(const AValues: array of Int64): Int64; overload.

Перелічені функції повертають випадковий елемент з масиву ***AValues***.

Функція *RandomRange(const AFrom, ATo: Integer): Integer* (Модуль **Math**). Повертає випадкове ціле число з діапазону ***[AFrom, Ato]***.

Для всіх перелічених функцій для ініціалізації початкового значення потрібно активізувати процедуру ***Randomize*** або задати змінну ***RandSeed***.

Процедура *Randomize* (Модуль **System**). Ініціалізує вбудований генератор випадкових чисел випадковим числом, отриманим з системного годинника. Ця процедура активізується лише раз перед використанням функцій генерації випадкових величин.

Системна змінна *RandSeed: LongInt = 0* (Модуль **System**). Задаючи специфічне значення цієї змінної за допомогою функцій генерації випадкових величин, можна повторно генерувати ту ж саму послідовність цих величин.

Лабораторна робота № 7

"Числові методи розв'язування задачі Коші"

Теоретичні відомості

1. Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи m звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad u_i(t_0) = u_{i0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

або у векторному записі:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \quad (2)$$

Нехай функція $\mathbf{f} : \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^m$ неперервна в деякій області $G = \mathbf{R}^{m+1}$ і задовольняє в ній умову Лівшиця по \mathbf{u} :

$$\exists L > 0 \quad \forall (t, \mathbf{u}), (t, \mathbf{v}) \in G \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\|_{\mathbf{R}^m} \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{R}^m}.$$

Тоді, для довільної точки $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \text{int } G$ розв'язок задачі (2) існує і єдиний в деякому околі $|t - t_0| < T$ точки t_0 [21]. Ці ж умови при $T < \infty$ забезпечують неперервну залежність розв'язку задачі від початкових умов і правих частин.

Зауважимо, що задача Коші для звичайного диференціального рівняння m -го порядку, розв'язаного щодо старшої похідної:

$$v^{(m)} = f(t, v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)}), \quad v(t_0) = v_0, \quad v'(t_0) = v_1, \dots, v^{(m-1)}(t_0) = v_{m-1}, \quad (3)$$

після введення змінних $u_1 = v$, $u_2 = v'$, $u_3 = v^{(2)}$, ..., $u_m = v^{(m-1)}$ перетворюється у задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (1)–(2).

Надалі розглядатимемо задачу Коші для одного звичайного диференціального рівняння, вважаючи в (2) $\mathbf{u}(t)$ та $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ скалярними функціями, оскільки методи інтегрування систем диференціальних рівнянь формально є такими ж.

2. Числові методи розв'язування задачі Коші

Наближений розв'язок задачі (2) на проміжку $[t_0, T]$ шукатимемо на сітці $\Omega_h = \{t_0, t_{i+1} = t_i + h_i, h_i > 0, i = 0, n-1\}$. Позначимо $u_i = u(t_i)$ – точне значення розв'язку у вузлі i , а $y_i = y(t_i)$ – наближене значення розв'язку.

Більшість числових схем розв'язування задачі Коші можна записати так:

$$y_{i+1} = F(y_{i-q}, y_{i-q+1}, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+s}), \quad (4)$$

де F – деяка відома функція. При $q=0$ і $0 \leq s \leq 1$ такі числові схеми називають *однокроковими*, а при $q \geq 1$ або $s > 1$ – *багатокроковими*. Як однокрокові, так і багатокрокові схеми виду (4) називають *явними* у випадку $s=0$ і *неявними* при $s=1$.

Числовий метод розв'язування задачі Коші має порядок p , якщо його локальна похибка дорівнює $O(h^{p+1})$, тобто:

$$\|\tilde{u}(t_i + h_i) - y_{i+1}\| \leq C(h_i)^{p+1}, \quad C > 0, \quad (5)$$

де $\tilde{u}(t)$ – розв'язок задачі Коші з початковою умовою $\tilde{u}(t_i) = y_i$. Доведено, що в цьому випадку за достатньо загальних умов глобальна похибка на рівномірній сітці матиме порядок $O(h)^p$.

Для побудови числових схем можна безпосередньо використати різницеві апроксимації похідної в точці $t = t_i$. Наприклад, найпростіші апроксимації похідної першого порядку точності дають *схеми явного та неявного методу Ейлера*:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

які мають перший порядок точності.

Апроксимація похідної центрованою формулою другого порядку точності приводить до *уточненого методу Ейлера*:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (8)$$

Це двокроковий метод 2-го порядку точності. Другу початкову точку можна отримати методом Ейлера.

Методи Рунге-Кутти ґрунтуються на ідеї покращення апроксимації вихідного рівняння за рахунок розрахунку правих частин не лише в точках сітки, але й деяких проміжкових точках. Наведемо найпоширеніші схеми.

Методи Рунге-Кутти другого порядку точності:

метод предиктор-коректор (метод Хойна):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))]; \quad (9)$$

явний метод середньої точки:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right); \quad (10)$$

неявний метод середньої точки:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right). \quad (11)$$

Методи Рунге-Кутти четвертого порядку точності.

Найуживанішими є класичний метод Рунге-Кутти та метод "3/8". Класичний метод Рунге-Кутти задається формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3).$$

Схему методу "3/8" записують так:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \quad k_1 = f(t_i, y_i),$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right), \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{2h}{3}, y_i - \frac{h}{3}k_1 + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (13)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$$

3. Апостеріорна оцінка похибки

Теоретичні оцінки похибки виду (5) безпосередньо непридатні для практичного застосування. Апостеріорна оцінка похибки здійснюється за правилом Рунге.

Користуючись схемою p -го порядку розв'язування задачі Коші, робимо два кроки довжиною h_i і один крок довжиною $2h_i$. У першому випадку отримуємо значення $y_{j+1}^{(1)}$, $y_{j+2}^{(1)}$ наближеного розв'язку в точках $t_{i+1} = t_i + h_i$, $t_{i+2} = t_{i+1} + h_i$.

Похибка розв'язку $y_{j+2}^{(1)}$ складається з похибки апроксимації, допущеної на другому кроці – $Ch_i^{p+1} + O(h_i^{p+2})$, і похибки, перенесеної через початкову умову з першого кроку – $Ch_i^{p+1} + O(h_i^{p+2})$. Отож для точного розв'язку в точці t_{i+2} справедливе представлення

$$u(t_i + 2h_i) = y_{i+2}^{(1)} + 2Ch_i^{p+1} + O(h_i^{p+2}). \quad (14)$$

Наближене значення розв'язку в точці t_{i+2} , отримане кроком $2h_i$ позначимо $y_{i+2}^{(2)}$. У цьому випадку справедливе представлення

$$u(t_i + 2h_i) = y_{i+2}^{(2)} + C(2h_i)^{p+1} + O(h_i^{p+2}). \quad (15)$$

Визначаючи з наведених рівностей невідому константу C , отримуємо таку оцінку похибки в точці t_{i+2} :

$$u(t_i + 2h_i) - y_{i+2}^{(1)} = \frac{y_{i+2}^{(1)} - y_{i+2}^{(2)}}{2^p - 1} + O(h_i^{p+2}). \quad (16)$$

Це дає змогу побудувати розв'язок на порядок точніший, ніж два попередні:

$$y_{i+2}^{(3)} = y_{i+2}^{(1)} + \frac{y_{i+2}^{(1)} - y_{i+2}^{(2)}}{2^p - 1}. \quad (17)$$

Приведені співвідношення дають змогу сформулювати алгоритм автоматичного вибору кроку, який забезпечує досягнення локальної похибки меншої заданої величини [10].

4. Числове розв'язування задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь

У випадку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь (2) розглянуті методи інтегрування формально залишаються такими ж, лише функції u , y , f і величини k_i в методах Рунге-Кутти замінюються, відповідно, на вектор функції \mathbf{u} , \mathbf{y} , \mathbf{f} і \mathbf{k}_i . Порядок точності методів не змінюється. Правило Рунге застосовують до кожної компоненти окремо.

Завдання

1. Програмна реалізація методу

У середовищі Delphi напишіть програму розв'язування задачі Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь на відрізку $[t_0, t_e]$ на рівномірній сітці. Відповідно до номера $N \bmod 6 + 1$ (N – номер студента у списку групи) використайте один з перелічених явних методів:

- 1) уточнений метод Ейлера (8);
- 3) метод Хойна (9);
- 4) метод середньої точки (10);
- 5) класичний метод Рунге-Кутти (12);
- 6) метод Рунге-Кутти "3/8" (13).

* Модифікуйте програму для реалізації автоматичного вибору кроку, який забезпечить досягнення локальної похибки меншої заданої величини eps .

Загальні вимоги до програми такі:

5. Введення меж відрізка, кроку розбиття, кількості рівнянь, початкових значень.
6. Вектор-функція правих частин задається зовнішньою процедурою.
7. Табличне та графічне виведення розв'язків.
8. Порівняння з точним розв'язком з виведенням глобальної точності.

2. Тестування програми

Тестування програми виконайте за одним з наведених прикладів відповідно до параметра $N \bmod 5 + 1$.

Знайдіть наближений розв'язок на сітках з кроком $h = 0,1$ та $h = 0,05$. Порівняйте з точним розв'язком і переконайтеся у справедливості апостеріорної оцінки похибки (16) та ефективності екстраполяції за Річардсоном (17).

№	Початкова задача	Точний розв'язок
1	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + t^2 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1, t \in [0,1]$	$\begin{aligned} x(t) &= \sin t + 3\cos t + t^2 - 2 \\ y(t) &= -3\sin t + \cos t + 2t \end{aligned}$
2	$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2, t \in [0,1]$	$\begin{aligned} x(t) &= (1 + 2t)e^{-t} \\ y(t) &= 2(1 + t)e^{-t} \end{aligned}$
3	$\begin{cases} x' = x - y + \sin t \\ y' = -2x + y \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0, t \in [0,1]$	$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(1 + t)\sin t - \frac{1}{2}t \cos t \\ y(t) &= \sin t - t \cos t \end{aligned}$
4	$y'' - 2y' + y = 1$ $y(1) = 1, y'(1) = 1, t \in [1,2]$	$y(t) = (t - 1)e^{t-1} + 1$
5	$y'' + \frac{2}{t-2}y' + (t-2)y = 1$ $y(0) = -0.5, y'(0) = -0.25, t \in [0,1]$	$y(t) = \frac{1}{t-2}$

3. Розв'язування практичної задачі

Відповідно до параметра Nmod5+1 розв'яжіть одну з поданих практичних задач.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Наведіть результати тестування програми і розв'язок практичної задачі, зробіть висновки.

Практичні задачі

1. Задача про демпфування механічних коливань [30]

Вантаж масою m розташований на вертикальній в'язко-пружній ресорі. Припустимо, що ресора є комбінацією лінійної пружини з жорсткістю k , "кубічної" пружини з жорсткістю k^* і демпфера з коефіцієнтом в'язкості c .

Відхилення вантажу від положення рівноваги позначимо через y . Руху ресори протидіє сила протилежного напрямку, яка дорівнює:

$$F = -ky - k^* y^3 - cy'. \quad (1)$$

Якщо нижня точка ресори закріплена у вертикальному напрямі, то за другим законом Ньютона отримаємо рівняння вільних коливань вантажу:

$$my'' + cy' + ky + k^* y^3 = 0. \quad (2)$$

Коли нижня точка ресори здійснює вертикальний рух за законом $z = \varphi(t)$, то приходимо до рівняння вимушених коливань:

$$my'' + cy' + ky + k^* y^3 = -c\varphi' - k\varphi - k^* \varphi^3. \quad (3)$$

Розв'яжіть рівняння (2) на часовому проміжку $0 \leq t \leq 2c$ за початкових умов $y(0) = 10$ см, $y'(0) = 0$ см/с і таких значень параметрів: $k = 2$ Н/см, $k^* = 2$ Н/см³, $c = 0,15$ Н·с/см, $m = 1$ кг.

2. Моделювання опалювальної системи

Систему опалення будинку можна описати таким диференціальним рівнянням [30]:

$$C \frac{dT}{dt} = P_H - P_O,$$

де T – температура у внутрішніх приміщеннях за шкалою Цельсія;
 C – узагальнена теплоємність будинку; P_H – потужність нагрівача;
 P_O – інтенсивність теплових втрат.

Припустимо, що потужність нагрівача P_H – постійна, а інтенсивність втрат тепла дорівнює

$$P_O = a_1(T - T_e) + a_4((T + 273)^4 - (T_e + 273)^4),$$

де T_e – температура оточуючого середовища за шкалою Цельсія;
 a_1 – узагальнений коефіцієнт теплообміну за законом Ньютона;
 a_4 – узагальнений коефіцієнт променевого теплообміну.

Отож отримуємо нелінійне диференціальне рівняння:

$$C \frac{dT}{dt} = P_H - a_1(T - T_e) - a_4((T + 273)^4 - (T_e + 273)^4).$$

Нехай $C = 4 \cdot 10^4$ КДж/К, $P_H = 40$ кВт, $a_1 = 0,2$ кВт/К,
 $a_4 = 0,2 \cdot 10^{-8}$ кВт/К⁴, $T_e = -10$ °С. Система опалення має регулятор температури, який вмикає нагрівач при зменшенні температури до 21 °С і вимикає його – при досягненні температури 23 °С.

Скільки часу триває один цикл роботи опалювальної системи – нагрівання від 21 °С до 23 °С і подальше охолодження до 21 °С ? За який час будинок охолоне від 23 °С до 0 °С ?

3. Політ ракети малої дальності

Розглянемо задачу про політ ракети на незначну відстань – до 100 км [15,19].

Нехай t – час, $x(t), y(t)$ – координати ракети, $v(t)$ – швидкість, $\theta(t)$ – кут нахилу траєкторії до горизонту, m_P – маса ракети без палива, m_F – початкова маса палива, $m(t)$ – маса ракети в момент часу t , c – коефіцієнт опору повітря, ρ – густина повітря, S – площа поперечного перерізу ракети.

На ракету діє сила тяги двигуна – T , сила тяжіння – mg , сила опору повітря – $c\rho S v^2/2$. Загальна система диференціальних рівнянь руху така:

$$x' = v \cos \theta, \quad y' = v \sin \theta,$$

$$v' = \frac{1}{m} \left(T - \frac{1}{2} c \rho S v^2 \right) - g \sin \theta - \frac{m'}{m} v, \quad \theta' = -\frac{g}{v} \cos \theta.$$

Сила тяги двигуна T дорівнює добутку швидкості згоряння палива $\mu = -\frac{dm}{dt}$ на швидкість витоку газів з сопла u , тобто $T = \mu u$. Якщо прийняти швидкість згоряння палива сталою, то час роботи двигуна дорівнюватиме $t_F = m_F / \mu$. Отож масу ракети і силу тяги, як функції часу, можна записати так:

$$m(t) = \begin{cases} m_P + m_F - t\mu, & 0 \leq t \leq t_F \\ m_P, & t > t_F \end{cases}, \quad T(t) = \begin{cases} \mu u, & 0 \leq t \leq t_F \\ 0, & t > t_F \end{cases}.$$

Нехай маса ракети без палива $m_P = 10$ кг, маса палива $m_F = 100$ кг, швидкість згоряння палива $\mu = 10$ кг/с, швидкість газів з сопла $u = 1000$ м/с, площа поперечного перерізу ракети $S = 0,04$ м², константи – $c = 0,2$, $\rho = 1,29$ кг/м³, $g = 9,81$ м/с². Знайдіть траєкторію польоту ракети за таких початкових даних $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $v(0) = 0,01$ м/с, $\theta(0) = \pi/3$.

Дослідіть вплив коефіцієнта тертя на дальність польоту ракети.

* Знайдіть кут, який забезпечує максимальну дальність польоту.

4. Динаміка популяцій

Динаміку чисельності популяцій двох конкуруючих видів, які проживають в одному ареалі, описують системою диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерра [15]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = N_1(r_1 - b_{11}N_1 - b_{12}N_2),$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = N_2(r_2 - b_{21}N_1 - b_{22}N_2),$$

де N_1 , N_2 – чисельності першого та другого виду.

Простежте динаміку чисельності видів для таких значень вхідних параметрів: $r_1 = 1$, $b_{11} = 0,5$, $b_{12} = 1$, $r_2 = 1$, $b_{21} = 0,5$, $b_{22} = 0,5$, $N_1(0) = 1$, $N_2(0) = 1$ на проміжку часу $t \in [0, 10]$. Зробіть висновки.

5. Нелінійна хімічна реакція

Нелінійна хімічна реакція типу "брюсселятор" за ряду додаткових спрощень описується системою диференціальних рівнянь [27]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A - (B + 1)x + x^2 y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Bx - x^2 y,$$

де A, B – концентрація вхідних речовин, x, y – концентрація проміжних продуктів.

Покладаючи $A = 1$, $B = 0,5$, визначіть динаміку концентрації проміжних продуктів на часовому горизонті $t \in [0, 20]$ за початкових умов $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Зробіть висновок.

6. Перехідний режим в моделі Солоу

Перехідний режим у моделі економічного росту Солоу для випадку, коли виробнича функція є функцією Коба-Дугласа $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, описується задачею Коші [13]:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1 - a)Ak^\alpha, \quad k(0) = k_0,$$

де k – фондоозброєність, a – коефіцієнт прямих затрат ($0 < a < 1$), ρ – норма накопичення ($0 < \rho < 1$), $\lambda = \mu + \nu$, μ – частка вибулих основних виробничих фондів ($0 < \mu < 1$), ν – річний темп приросту числа зайнятих $-1 < \nu < 1$.

Для значень параметрів $A = 2$, $\alpha = 0,2$, $a = 0,7$, $\rho = 0,5$, $\lambda = 1$ знайдіть розв'язок задачі на часовому проміжку $t \in [0, 10]$ за початкових умов $k_0 = 0,1$ та $k_0 = 0,3$. Зробіть висновок.

Лабораторна робота № 8 "Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь"

Теоретичні відомості

1. Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$\alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = \gamma_0, \quad (2)$$

$$\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1. \quad (3)$$

Якщо $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$, то на i -му кінці відрізка задано значення шуканого розв'язку. Таку умову називають *крайовою умовою першого роду*. Якщо $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$, то на кінці відрізка задане значення похідної – *крайова умова другого роду*. В загальному випадку, коли $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$, умову називають *крайовою умовою третього роду*.

Припустимо, що виконуються умови:

$$p, q, f \in C_2[a, b], \quad q(x) \leq 0, \quad \alpha_0 > 0, \beta_0 \leq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0. \quad (4)$$

Тоді крайова задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $u \in C_4[a, b]$ [7].

2. Метод скінченних різниць

Задамо на відрізку $[a, b]$ рівномірну сітку вузлів $\Omega_h = \{x_i = a + ih, h = (b - a)/n, i = \overline{0, n}\}$. Нехай $u_i = u(t_i)$ – точне значення розв'язку у вузлі i , а $y_i = y(t_i)$ – наближене значення розв'язку.

Для внутрішніх вузлів $\Omega'_h = \Omega_h \setminus \{a, b\}$ скористаємося апроксимаціями похідних другого порядку точності щодо h :

$$p(x_i)u'(x_i) = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$u''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2),$$

а для крайових умов – першого порядку точності:

$$u'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \quad u'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h).$$

Тоді отримаємо тридіагональну систему рівнянь для визначення наближеного розв'язку:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (5)$$

де $A_0 = 0, B_0 = -h\beta_0 + h^2\alpha_0, C_0 = h\beta_0, F_0 = h^2\gamma_0,$

$$A_i = 1 - \frac{h}{2} p_i, B_i = -2 + h^2 q_i, C_0 = 1 + \frac{h}{2} p_i, F_i = h^2 f_i, i = \overline{1, n-1},$$

$$A_n = -h\beta_1, B_n = h\beta_1 + h^2\alpha_1, C_n = 0, F_n = h^2\gamma_1.$$

За умов (4) і додаткових умов $\alpha_1 > 0, h < h_0 = \min\{1, 2/\|p\|_C\}$ система (5) є системою з діагональною перевагою, що забезпечує існування та єдиність її розв'язку.

Для розв'язування системи рівнянь (5) ефективним є метод прогонки, описаний у лабораторній роботі № 3.

Доведено, що за умов (4) розглянута різницева схема є збіжною зі швидкістю $O(h^2)$ [6,7].

2. Метод суперпозиції зведення до задачі Коші

Розв'язок задачі (1)-(3) шукатимемо у вигляді

$$u = Cv + w, \quad (6)$$

де v – розв'язок відповідного однорідного рівняння, а w – деякий розв'язок неоднорідного рівняння.

Поставимо вимогу, щоб перша крайова умова виконувалася для функції u для будь-якої сталої C , тоді отримаємо:

$$\alpha_0 v(a) + \beta_0 v'(a) = 0, \quad \alpha_0 w(a) + \beta_0 w'(a) = \gamma_0. \quad (7)$$

Для забезпечення першої рівності достатньо покласти

$$v(a) = \beta_0 K, \quad v'(a) = -\alpha_0 K, \quad K = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Друга рівність буде виконана, коли

$$w(a) = 0, \quad w'(a) = \gamma_0 / \beta_0, \quad (\beta_0 \neq 0), \quad (9)$$

або

$$w(a) = \gamma_0 / \alpha_0, \quad w'(a) = 0 \quad (\alpha_0 \neq 0). \quad (10)$$

За припущення

$$\alpha_1 v(b) + \beta_1 v'(b) \neq 0, \quad (11)$$

підберемо сталу C так, щоб виконувалась друга крайова умова:

$$C = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 w(b) - \beta_1 w'(b)}{\alpha_1 v(b) + \beta_1 v'(b)}. \quad (12)$$

Якщо умова (11) виконується, то задача має єдиний розв'язок.

Отже, вихідна крайова задача зведена до розв'язування двох задач Коші для знаходження функцій v та w .

Метод стрільби зведення до задачі Коші

Розглянемо крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$u'' = f(x, u, u'), \quad x \in (a, b), \quad (13)$$

з крайовими умовами (2)-(3).

Перепишемо рівняння (13) як систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = v \\ \frac{dv}{dx} = f(x, u, v) \end{cases} \quad (14)$$

Якщо $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то позначимо

$$u(a) = s, \quad (15)$$

а другу початкову умову визначимо з (2)

$$v(a) = u'(a) = \gamma_0 / \beta_0. \quad (16)$$

У випадку $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$ матимемо:

$$u(a) = \gamma_0 / \alpha_0, \quad v(a) = s. \quad (17)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти таке значення параметра s , за якого розв'язок задачі Коші (14)-(16), або (14),(17) задовольняє граничній умові (3), тобто:

$$\varphi(s) \equiv \alpha_1 u(b, s) + \beta_1 u'(b, s) - \gamma_1 = 0. \quad (18)$$

Розв'язування нелінійного рівняння (18) можна проводити різними числовими методами (див. лабораторну роботу № 2). Ефективним є застосування методу Ньютона та його модифікацій.

Похідну $\frac{d\varphi(s)}{ds}$ можна обчислити чисельно. Якщо частинні похідні по u та по v від $f(x, u, v)$ можна знайти аналітично, то використовують такий спосіб визначення цієї похідної.

Введемо у розгляд функції $U(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} u(x, s)$ та $V(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} v(x, s)$. Тоді $\frac{d\varphi(s)}{ds} = \alpha_1 U(b, s) + \beta_1 V(b, s)$.

Продиференціюємо (14) і (15)-(16) по s . Отримаємо задачу Коші для визначення цих функцій для фіксованого значення параметра s : $\frac{\partial U}{\partial x} = V$, $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} U + \frac{\partial f}{\partial v} V$, $U(a, s) = 1$, $V(a, s) = 0$.

Цю задачу необхідно розв'язувати паралельно з задачею (14)-(16), оскільки вона залежить від u та v .

Завдання

1. Програмна реалізація методу

У середовищі Delphi підготуйте програму розв'язування крайових задач для рівняння 2-го порядку. Відповідно до номера $N \bmod 3 + 1$ (N – номер студента у списку групи) використайте один з перелічених методів:

- 1) метод сіток;
- 2) метод суперпозиції зведення до задачі Коші;
- 3)* метод стрільби зведення до задачі Коші.

Загальні вимоги до програми такі:

1. Введення меж відрізка, кроку розбиття, крайових значень.
2. Всі вхідні функції задаються зовнішніми процедурами.
3. Табличне та графічне виведення розв'язків.

2. Тестування програми

Тестування програми проведіть на одному з вказаних прикладів відповідно до параметра $N \bmod 4 + 1$.

Знайдіть наближений розв'язок на сітках з кроком $h = 0,04$, $h = 0,02$ та $h = 0,01$ і порівняйте з точним розв'язком.

*За правилом Рунге (лабораторна робота № 5) оцініть порядок збіжності.

№	Крайова задача	Точний розв'язок
1	$u'' - (x+1)u' - u = \frac{2}{(1+x)^3},$ $u(0) = 1, u(1) = 0,5$	$u = \frac{1}{1+x}$
2	$x^2 u'' - 2u = 0,$ $u(1) = 5/6, u(2) = 13/6$	$u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3x}$
3	$u'' - 2u^3 = 0,$ $u(0) = 1, u(1) = 0,5$	$u = \frac{1}{1+x}$
4	$(1+x^2)u'' + (u')^2 + 1 = 0,$ $u(0) = 1, u(1) = 2 \ln 2$	$u = 1 - x + 2 \ln(1+x)$

3. Розв'язування практичної задачі

Відповідно до параметра $N_{\text{mod}4+1}$ розв'яжіть одну з поданих практичних задач.

4. Оформлення звіту

Засобами текстового редактора Word підготуйте короткий звіт, у якому дайте опис використаного методу, алгоритму і програми. Наведіть результати тестування програми і розв'язок практичної задачі. Зробіть висновки.

Практичні задачі

1. Стаціонарний розподіл температури в стержні [18]

Розглянемо круглий циліндричний стержень довжини L та радіуса R . Вісь Ox спрямована по осі стержня (рис.1).

Припустимо, що температура стержня постійна по його товщині і є функцією лише координати x , тобто $T = T(x)$. Температуру оточуючого середовища позначимо через T_e .

Запишемо закон збереження теплової енергії для нескінченно малого об'єму стержня dV , який відповідає приросту dx координати x .

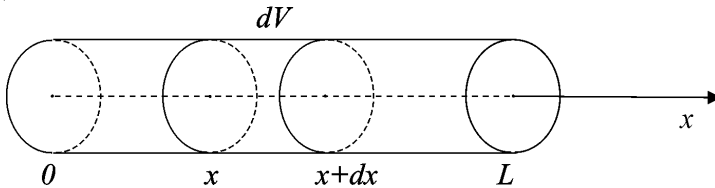


Рис. 1

Притік тепла через лівий торець циліндра dV дорівнює його відтоку за рахунок конвекції через циліндричну поверхню та через правий торець:

$$\pi R^2 q_x = \alpha(T - T_e)2\pi R dx + \pi R^2 (q_x + dq_x), \quad (1)$$

де q_x – інтенсивність теплового потоку вздовж осі Ox ,

α – коефіцієнт конвективного теплообміну.

Розділивши останню рівність на $\pi R^2 dx$ після граничного переходу $dx \rightarrow 0$, отримаємо:

$$\frac{d}{dx} q_x + \frac{2\alpha}{R}(T - T_e) = 0. \quad (2)$$

За законом теплопровідності Фур'є інтенсивність теплового потоку пропорційна градієнту температури:

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (3)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності. Підставляючи цей вираз у (2), остаточно отримуємо рівняння:

$$-\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{2\alpha}{R}(T - T_e) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (4)$$

На лівому краю стержня задана інтенсивність теплового потоку:

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad x = 0, \quad (5)$$

а на правому здійснюється теплообмін за законом Ньютона:

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha(T - T_e), \quad x = L. \quad (6)$$

Отже, функція розподілу температури $T(x)$ є розв'язком крайової задачі (4)–(6).

Завдання

Вістря електричного паяльника має форму циліндра і виготовлене з міді. Довжина вістря дорівнює $L = 0,05$ м, діаметр – $2R = 0,005$ м. Його нагрівання здійснюється з лівого краю тепловим джерелом потужністю $Q = 10$ Вт. Температура оточуючого середовища $T_e = 20^\circ \text{C}$. Коефіцієнт теплопровідності міді $\lambda = 370$ Вт/м·К, коефіцієнт теплообміну поверхні паяльника з повітрям $\alpha = 40$ Вт/м²К. Припускаючи, що температура паяльника постійна по товщині, знайдіть її розподіл вздовж довжини у стаціонарних умовах. Чи буде температура на краю достатня для плавлення олова ($T_{пл} = 230^\circ \text{C}$) ?

2. Розподіл температури у пластині радіатора

Пластинчасті радіатори широко використовують для охолодження елементів електронних пристроїв, зокрема процесорів. Вони складаються з прямокутних металевих пластин, розташованих паралельно з деяким кроком на пластині-основі. Фрагмент такого радіатора у розрізі проілюстровано на рис. 2.

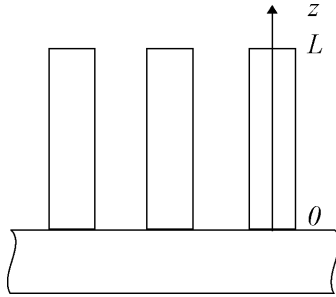


Рис. 2

Нехай L – висота окремої пластини, D – її довжина, H – товщина. Вісь Oz спрямуємо по серединній поверхні пластини вгору. Припустимо, що температура пластини $T(z)$ постійна по товщині і мало змінюється по довжині.

Тепловідвід з поверхні пластини з нормаллю \mathbf{n} здійснюється за законом конвективного теплообміну:

$$-\lambda \frac{dT}{dn} = \alpha(T - T_e) \quad (1)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, α – коефіцієнт конвективного теплообміну, T_e – температура оточуючого середовища.

За зроблених припущень, рівняння стаціонарної теплопровідності для окремої пластини набуде вигляду [12]:

$$-\frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right) + \frac{2\alpha}{H} (T - T_e) = 0, \quad z \in (0, L). \quad (2)$$

На краю $z=0$ пластини задано тепловий потік потужністю Q :

$$-\lambda \frac{dT}{dz} = \frac{Q}{HD}, \quad z=0, \quad (3)$$

а на краю $z=L$ умова конвективного теплообміну:

$$-\lambda \frac{dT}{dz} = \alpha(T - T_e), \quad z=L. \quad (4)$$

Завдання

1. Виведіть рівняння (2) з умови теплового балансу для нескінченно малого об'єму (аналогічно задачі 1).
2. Перепишіть крайову задачу у безрозмірній формі та знайдіть її аналітичний розв'язок.
3. Знайдіть розподіл температури у пластині алюмінієвого радіатора, використовуючи такі дані: $H = 0,001$ м, $L = 0,01$ м, $D = 0,05$ м, $\lambda = 270$ Вт/м·К, $\alpha = 200$ Вт/м²К, $T_e = 20^\circ$ С. Чи забезпечується температура менша 50° С? Знайдіть розподіл температури при вимкненні вентилятора ($\alpha = 20$ Вт/м²К).

3. Розподіл температури у кільцевому елементі радіатора

Охолоджуючим елементом трубчастих радіаторів є кільцеві диски (рис. 3).

Нехай R_1 та R_2 – внутрішній і зовнішній радіуси диска, H – товщина диска. Припустимо, що температура диска постійна по товщині, а теплообмін з зовнішнім середовищем здійснюється за законом Ньютона. Тоді рівняння теплопровідності в полярній системі координат запишемо так [12]:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2\beta}{H^2}(T - T_e) = 0, \quad (1)$$

де $\beta = \alpha H / \lambda$, λ – коефіцієнт теплопровідності, α – коефіцієнт конвективного теплообміну, T_e – температура оточуючого середовища.

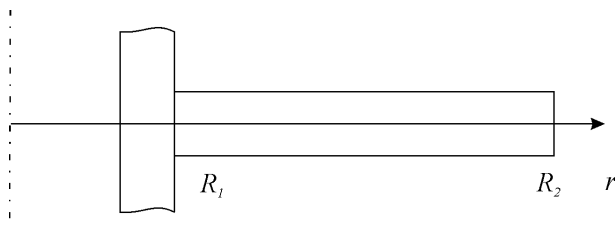


Рис. 3

Припустимо, що на внутрішньому контурі диска температура відома

$$T(r) = T_1, \quad r = R_1, \quad (2)$$

а на зовнішньому задана умова теплообміну:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{\beta}{H} (T - T_e) = 0, \quad r = R_2. \quad (3)$$

Отже, функція розподілу температури в диску є розв'язком крайової задачі (1)–(3).

Завдання

1. Виведіть рівняння (1) з умови теплового балансу для нескінченно малого об'єму диска (аналогічно задачі 1).
2. Приведіть крайову задачу (1)–(3) до безрозмірного виду і знайдіть її аналітичний розв'язок.
3. Використовуючи відповідний числовий метод, знайдіть розв'язок задачі для таких вхідних даних: $R_1 = 0,005$ м, $R_2 = 0,015$ м, $H = 0,001$ м, $\lambda = 75$ Вт/м·К (залізо)

$$\alpha = 20 \text{ Вт/м}^2\text{К}, \quad T_0 = 80^\circ \text{C}, \quad T_e = 20^\circ \text{C}.$$

Яка потужність тепловідведення одного диска ?
 На скільки зросте ця потужність при заміні заліза на мідь ($\lambda = 370$ Вт/м·К)?

4. Напружений стан оптичного диска

Оптичний компакт-диск має діаметр 12 см, товщину 1,2 мм і виготовлений з полікарбонату. Одношвидкісні приводи для компакт-дисків мають швидкість обертання 200-500 обертів за хвилину, а багатошвидкісні – пропорційно більшу швидкість. Компакт-диски знаходяться під дією значних відцентрових сил, які можуть спричинити їхнє руйнування.

Розглянемо задачу про напружений стан компакт-диска в полярній системі координат.

Радіальні переміщення точок диска $u(r)$ в області $r \in (R_1, R_2)$ задовольняють рівняння [25]:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3, \quad (1)$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість обертання,

ρ, ν, E – густина, коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу диска.

Радіальні і колові напруження в диску розраховують за формулами:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right). \quad (2)$$

Вважатимемо, що край диска $r = R_1$ є жорстко закріпленим:

$$u(r) = 0, \quad r = R_1. \quad (3)$$

Край диска $r = R_2$ є вільним від навантаження, тобто $\sigma_r(R_2) = 0$, звідки отримуємо другу крайову умову:

$$\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} = 0, \quad r = R_2. \quad (4)$$

Отже, переміщення $u(r)$ задовольняє крайову задачу (1),(3),(4).

Завдання

1. Знайдіть аналітичний розв'язок крайової задачі, враховуючи, що фундаментальними розв'язками однорідного рівняння (1) є функції r та $\frac{1}{r}$. Розрахуйте напруження і визначте їхній максимум.
2. Використовуючи відповідний числовий метод, знайдіть розв'язок задачі для таких вхідних даних: $R_1 = 0,015$ м, $R_2 = 0,12$ м, $H = 0,0012$ м, $\rho = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 3$ ГПа, $\nu = 0,3$. Чи зруйнується диск, якщо допустимі напруження $\sigma_B = 0,1$ ГПа?

Список літератури

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высш. школа, 1994. – 544 с.
2. *Архангельский А.Я.* Программирование в Delphi 6. – М.: Бином, 2003. – 1120 с.
3. *Архангельский А.Я.* Приемы программирования в Delphi. – М.: Бином, 2003. – 784 с.
4. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.Н.* Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высш. школа, 2000. – 190 с.
5. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – Ч. 1. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
6. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высш. школа, 2002. – 840 с.
7. *Волков Е.А.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
8. *Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.* Методи обчислень. – Ч. 1-2. – К.: Вища школа, 1995.
9. *Гук М.* Процессоры Pentium II, Pentium Pro и Pentium. – С-Пб.: Питер, 1999. – 283 с.
10. *Іванків К.С., Щербатий М.В.* Математичне моделювання біологічних та еколого-економічних процесів. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2005. – 154 с.
11. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. – Т.1-2. – М.: Наука, 1976 .
12. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – К.: Наукова думка, 1970. – 307 с.
13. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

14. *Костів О.В., Ярошко С.А.* Методи розробки алгоритмів. – Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 98 с.
15. Математическое моделирование / Ред. Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979. – 276 с.
16. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
17. Методи обчислень: Практикум на ЕОМ / В.Л.Бурківська, С.О.Войцехівський, І.П.Гаврилюк та ін. – К.: Вища школа, 1995. – 303 с.
18. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных задач. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
19. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
20. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
21. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
22. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. Монастырного П.И. – Мн.: Изд-во БГУ, 1983. – 287 с.
23. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
24. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 311 с.
25. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 576 с.
26. *Уотшем Т.Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. – М.: Финансы, 1999. – 527 с.
27. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

28. *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
29. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – К.: НМК ВО, 1991. – 88 с.
30. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
31. Державний комітет статистики України. Статистична інформація. [Цит. 2006, 10 лютого] – Доступний з < <http://ukrstat.gov.ua>>.

Зміст

Передмова.....	3
5. Лабораторна робота № 1 "Теорія похибок".....	4
6. Лабораторна робота № 2 "Числові методи розв'язування нелінійних рівнянь"..	15
7. Лабораторна робота № 3 "Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь".....	25
8. Лабораторна робота № 4 "Метод найменших квадратів".....	33
9. Лабораторна робота № 5 "Обчислення визначених інтегралів".....	40
10. Лабораторна робота № 6 "Метод Монте-Карло".....	46
11. Лабораторна робота № 7 "Числові методи розв'язування задачі Коші".....	53
12. Лабораторна робота № 8 "Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь".....	64
Список літератури.....	76

Навчальне видання

Дияк Іван Іванович
Прокопишин Іван Анатолійович

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕНЬ

Редактор *І.М. Лоїк*

Технічний редактор *С.З.Сеник*

Підп. до друку 23.05.2006. Формат 60х84/16. Папір друк.
Друк на різогр. Гарнітура Times New Roman. Умовн. друк. арк. 4,7.
Обл.-вид. арк. 4,8. Тираж 100 прим. Зам. 237.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана
Франка, 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.