

Диференціальні рівняння першого порядку,
розв'язані щодо похідної

Лабораторні роботи 1-4
з диференціальних рівнянь

Львів

2022

Лопушанська Г. П. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані щодо похідної: лабораторні роботи 1-4 з диференціальних рівнянь. - Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. - 26 с.

Наведено приклади із розв'язками за темами лабораторних робіт згідно з рекомендованими у підручнику [1]. Для студентів факультету прикладної математики і інформатики, механіко-математичного факультету.

© Лопушанська Г. П. 2022

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Лабораторна робота 1	4
2. Лабораторна робота 2	10
3. Лабораторна робота 3	16
4. Лабораторна робота 4	21
5. Література	26

Лабораторна робота 1.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

і звідні до них.

Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане щодо похідної, має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ – його розв'язок, тоді

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta);$$

$$\varphi'(t)dt = f(t, \varphi(t))dt; \quad d\varphi(t) = f(t, \varphi(t))dt,$$

і можемо подати його у вигляді

$$dx = f(t, x)dt,$$

що є окремим випадком рівняння у диференціалах

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0 \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Розглянемо рівняння

$$T(t) dt + X(x) dx = 0, \tag{1}$$

де $T(t)$ та $X(x)$ – задані неперервні функції.

Нехай $x = \varphi(t)$ – розв'язок рівняння (1). Тоді

$$T(t) dt + X(\varphi(t))\varphi'(t) dt \equiv 0,$$

звідки

$$\int_{t_0}^t T(t) dt + \int_{t_0}^t X(\varphi(t))\varphi'(t) dt = C$$

для довільного значення t_0 , тобто

$$\int_{t_0}^t T(t) dt + \int_{x_0}^x X(x) dx = C \quad (2)$$

($x_0 = x(t_0)$, C – довільна стала).

Ми довели, що довільний розв'язок рівняння (1) входить у множину (2) при конкретному значенні C . Співвідношення (2) можемо також записати у вигляді

$$\int T(t) dt + \int X(x) dx = C \quad (3)$$

або $\phi(t, x) = C$. Нехай $x = \varphi(t)$ – неявно задана цим співвідношенням функція. Диференціюючи (2) за змінною t , одержуємо

$$\phi'_t(t, \varphi(t)) + \phi'_x(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0,$$

тобто

$$T(t) dt + X(\varphi(t))\varphi'(t) dt \equiv 0.$$

Отже, знайдена з (2) як неявна функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком рівняння (1). Згідно з означенням, (2) (або (3)) є загальним розв'язком рівняння (1) (у неявному вигляді).

Розглянемо рівняння вигляду

$$M_1(t)M_2(x) dt + N_1(t)N_2(x) dx = 0 \quad (4)$$

Рівняння (4), як і рівняння (1) називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Припустимо спочатку, що $M_2(x)N_1(t) \neq 0$.

$$\frac{M_1(t)}{N_1(t)} dt + \frac{M_2(x)}{N_2(x)} dx = 0$$

– рівняння вигляду (1). За доведеним, його загальний розв’язок

$$\int \frac{M_1(t)}{N_1(t)} dt + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)} dx = C. \quad (5)$$

Якщо $M_2(x) = 0$ при $x = x_0$, то вертикальна пряма $x = x_0$ є інтегральною кривою рівняння (4). Справді, $dx_0 = 0$, тому, підставляючи функцію $x = x_0$ у рівняння (4), одержуємо правильну рівність

$$M_1(t)M_2(x_0) dt + N_1(t)N_2(x_0) dx_0 = 0.$$

Отже, щоб мати повну сім’ю розв’язків рівняння (4), до загального розв’язку (5) треба додати функції

$$x \equiv x_i, \quad t \equiv t_j,$$

де x_i, t_j – корені відповідно рівнянь $M_2(x) = 0$ та $N_1(t) = 0$.

Приклади.

1.7. $y' - xy^2 = 2xy, \quad \frac{dy}{dx} = xy(y + 2),$

$$dy = xy(y + 2)dx \quad \Big| \frac{1}{y(y+2)},$$

$$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx + C,$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}, \quad A(y + 2) + By = 1,$$

$$y = 0 \Rightarrow 2A = 1, \quad A = 1/2,$$

$$y = -2 \Rightarrow -2B = 1, \quad B = -1/2. \quad \text{Отже,}$$

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y+2} = \frac{1}{2} [\ln|y| - \ln|y + 2|] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right|.$$

Тепер розв’язок рівняння буде таким

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = \frac{1}{2} x^2 + \frac{C_1}{2} \Leftrightarrow \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = \ln e^{x^2} + \ln |C_2| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{y}{y+2} \right| = |C_2| e^{x^2} \Leftrightarrow y = C_2 e^{x^2} (y + 2). \quad \text{Додаємо } y = -2.$$

Множиною всіх розв’язків рівняння буде сукупність

$$y = Ce^{x^2}(y + 2), \quad y = -2 \text{ або } y + 2 = Ce^{-x^2}y, \quad y = 0.$$

1.8. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$

Це задача Коші. Спочатку знаходимо множину всіх розв'язків рівняння:

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0, \quad (x^2 - 1)dy + 2xy^2dx = 0 \quad \Big| \frac{1}{(x^2-1)y^2},$$

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2x}{x^2-1} = 0, \text{ розв'язком буде } \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2x}{x^2-1} = C \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C,$$

також $y = 0$, також $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, x = -1.$

Але ці окремі розв'язки не задовольняють початкову умову (ці прямі не проходять через точку $(0,1)$).

З попередньої множини розв'язків при $x = 0, y = 1$ одержуємо

$$-1 + \ln|0 - 1| = C \Leftrightarrow C = -1. \text{ Отже, шуканий розв'язок}$$

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - \ln|x^2 - 1| \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{1 - \ln|x^2 - 1|} \text{ (у явному вигляді).}$$

1.9. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$

Спочатку розв'язуємо рівняння відносно похідної:

$$1 + \frac{ds}{dt} = e^s, \quad \frac{ds}{dt} = e^s - 1.$$

Далі за попередньою схемою:

$$ds = (e^s - 1)dt \quad \Big| \frac{1}{e^s-1}, \quad \frac{ds}{e^s-1} = dt, \quad \int \frac{ds}{e^s-1} = \int dt + C,$$

$$\int \frac{e^{-s}ds}{1-e^{-s}} = t + C, \quad \ln|1 - e^{-s}| = t + C, \quad \ln|1 - e^{-s}| = \ln e^t + \ln|C|$$

$$1 - e^{-s} = Ce^t, \text{ розв'язком є } e^s - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-s} = 0,$$

він входить у одержану множину розв'язків при $C = 0.$

2. До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(at + bx + c),$$

де a, b, c – сталі, F – функція одного аргументу $z = at + bx + c$.

Зробимо у рівнянні заміну $z = at + bx + c$, тобто від змінних t, x перейдемо до змінних t, z . Знаходимо $\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dz}{dt}$, а враховуючи рівняння, $\frac{dz}{dt} = a + bF(z)$. Одержали рівняння вигляду (1).

Приклади.

1.11. $y' = \cos(y - x)$, або $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$.

Робимо заміну $z = y - x$. Диференціюємо її: $dz = dy - dx$, тобто $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$. Із рівняння маємо $\frac{dy}{dx} = \cos(z)$. Тоді попередня рівність дає

$$\frac{dz}{dx} = \cos(z) - 1.$$

Це вже диференціальне рівняння у змінних z, t . Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$dz = (\cos(z) - 1)dx, \quad \frac{dz}{\cos(z)-1} = dx,$$

$$-\frac{dz}{2\sin^2(\frac{z}{2})} = dx, \quad -\frac{d\frac{z}{2}}{\sin^2(\frac{z}{2})} = dx,$$

$$ctg(\frac{z}{2}) = x + C,$$

також є розв'язок $\cos(z) - 1 = 0 \iff z = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Повертаємось до старих змінних. Одержуємо

$$ctg(\frac{y-x}{2}) = x + C, \text{ також є розв'язок } y - x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{ще}$$

зліченна множина розв'язків.

3. *Однорідним* називається рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{x}{t}\right).$$

Зробимо заміну $z = \frac{x}{t}$, тобто $x = zt$. Диференціюємо цю рівність:

$$dx = t dz + z dt.$$

Рівняння перетворюється до такого

$$t dz + z dt = F(z) dt,$$

тобто

$$t dz + (z - F(z)) dt = 0.$$

А це рівняння вигляду (1).

1.10. $xy' - y = xtg\left(\frac{y}{x}\right).$

Зауважимо, що тут $x \neq 0$. Поділимо рівняння на x :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = tg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\left(\frac{y}{x}\right),$$
 а отже, це однорідне рівняння.

Робимо заміну $\frac{y}{x} = z \Leftrightarrow y = xz$. Диференціюємо її:

$$dy = zdx + xdz, \quad \text{звідки } \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \text{ і підставляємо в попереднє}$$

рівняння:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + tg(z), \quad x\frac{dz}{dx} = tg(z), \quad xdz = tg(z)dx \Big|_{\frac{1}{xtg(z)}},$$

$$\frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin(z)| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \sin(z) = Cx, \text{ і ще розв'язки}$$

$$tgz = 0 \Leftrightarrow \sin(z) = 0 \text{ (останній входить у попередню}$$

множину розв'язків при $C = 0$).

Отже, множина всіх розв'язків є такою: $\sin(z) = Cx$, а в старих змінних $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$.

Лабораторна робота 2.

Рівняння, зведені до однорідних.

До однорідних зводяться рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (1).$$

Окремі випадки:

1) $c = c_1 = 0$, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g_1\left(\frac{y}{x}\right) - \text{це}$$

однорідне рівняння;

2) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} := p$, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{pa_1x+pb_1y+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{p(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = g_1(a_1x + b_1y), \text{ або навіть}$$

$$\frac{dy}{dx} = g_2(a_1x + b_1y + c_1), \text{ бо } \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{p(a_1x+b_1y+c_1)+c-pc_1}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

Такі рівняння зводяться до рівнянь з відокремленими змінними заміною $z = a_1x + b_1y$ (або відповідно $z = a_1x + b_1y + c_1$).

Загальний випадок: робимо заміну $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Маємо

$$\frac{dv}{du} = g\left(\frac{a(u+x_0)+b(v+y_0)+c}{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}\right) \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = g\left(\frac{a(u+x_0)+b(v+y_0)+c}{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv}{du} = g\left(\frac{au+bv+ax_0+by_0+c}{a_1u+b_1v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv}{du} = g\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right) \Leftrightarrow \text{однорідне рівняння, якщо}$$

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \text{ і } a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0.$$

Іноді до однорідних можна звести рівняння заміною $y = z^\alpha$ або $x = z^\alpha$, де α – деяке дійсне число. Такі рівняння називаються *узагальнено однорідними*.

Приклади.

1.28. $(2x - 3y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0.$

Система

$$2x - 3y + 1 = 0, \quad x + y - 1 = 0$$

має розв'язок $x_0 = 0, 4$, $y_0 = 0, 6$. Робимо заміну

$$x = u + 0, 4, \quad y = v + 0, 6.$$

Маємо

$$(2u - 3v)du + (u + v)dv = 0.$$

Це вже однорідне рівняння. Робимо ще одну заміну

$$v = uz \quad (dv = u dz + z du).$$

Одержуємо

$$(2u - 3uz)du + (u + uz)(udz + zdu) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - 3z)udu + (1 + z)uzdu + (1 + z)u^2dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - 2z + z^2)du + (1 + z)udz = 0 \text{ — рівняння з відокремлюваними}$$

змінними, $u = 0$ не є розв'язком однорідного рівняння,

$$\frac{du}{u} + \frac{(z+1)dz}{(z-1)^2+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u} + \frac{(z-1+2)dz}{(z-1)^2+1} = 0,$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{(z-1)dz}{(z-1)^2+1} + 2 \int \frac{dz}{(z-1)^2+1} = \ln|C|,$$

$$\ln|u| + \frac{1}{2}\ln[(z-1)^2+1] + \operatorname{arctg}(z-1) = \ln|C| \Leftrightarrow$$

$$u\sqrt{z^2-2z+2} = Ce^{-\operatorname{arctg}(z-1)}.$$

Повертаємось до старих змінних

$$u\sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2\frac{v}{u} + 2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}-1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{v^2 - 2uv + 2u^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\left(\frac{v-u}{u}\right)},$$

$$(y - 0, 6)^2 - 2(x - 0, 4)(y - 0, 6) + 2(x - 0, 4)^2 = C^2 e^{-2\operatorname{arctg}\left(\frac{y-x-0,1}{x-0,2}\right)}.$$

$$1.29. 2(x\sqrt{y} + 2y)dx - xdy = 0.$$

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням.

Робимо заміну $y = z^\alpha$. Тоді $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$,

$$2(xz^{\frac{\alpha}{2}} + 2z^\alpha)dx - x\alpha z^{\alpha-1}dz = 0,$$

$$1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha = 1 + \alpha - 1.$$

Це можливо при $\alpha = 2$. Отже, рівняння є узагальнено однорідним.

Тепер $y = z^2$, $dy = 2zdz$,

$$2(xz + 2z^2)dx - 2xzdz = 0$$

– однорідне рівняння,

$$\left[\frac{z}{x} + 2\left(\frac{z}{x}\right)^2\right]dx - \frac{z}{x}dz = 0.$$

Заміна $\frac{z}{x} = u \Leftrightarrow z = xu$, $dz = udx + xdu$,

$$(u + 2u^2)dx - u(udx + xdu) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ і}$$

$$(1 + 2u)dx - udx - xdu = 0, \Leftrightarrow$$

$$(1 + u)dx - xdu = 0, \text{ відокремлюємо змінні}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u+1}, \ln|x| = \ln|u + 1| + \ln|C|, \text{ одержуємо}$$

$$x = C(u + 1), \text{ і ще розв'язки } u = -1, u = 0,$$

або $u = Cx - 1$, $x = 0$, $u = 0$.

Повертаємось до старих змінних: $\frac{z}{x} = Cx - 1 \Leftrightarrow z = Cx^2 - x$,

і ще $x = 0$, $z = 0$, ще до старих змінних:

$$\sqrt{y} = Cx^2 - x, x = 0, z = 0,$$

тобто

$$y = (Cx^2 - x)^2, x = 0, y = 0.$$

$$1.30. x^3(y' - x) = y^2.$$

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням.

Робимо заміну $y = z^\alpha$. Тоді $dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$,

$$x^3\left(\alpha z^{\alpha-1} \frac{dz}{dx} - x\right) = z^{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$x^3(\alpha z^{\alpha-1} dz - x dx) = z^{2\alpha} dx,$$

$$x^3 \alpha z^{\alpha-1} dz - x^4 dx = z^{2\alpha} dx,$$

$$3 + \alpha - 1 = 4 = 2\alpha.$$

Це можливо при $\alpha = 2$. Отже, рівняння є узагальнено однорідним.

При заміні $y = z^2$ одержуємо

$$2x^3 z dz - x^4 dx = z^4 dx \Leftrightarrow x = 0 \text{ і } 2 \frac{z}{x} dz = \left[\left(\frac{z}{x}\right)^4 + 1\right] dx,$$

$$2ux du = (u^4 - 2u^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{2u du}{(u^2-1)^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dt}{(t-1)^2} = \ln|x| + C, \quad -\frac{1}{u^2-1} = \ln|x| + C$$

і ще окремі розв'язки $x = 0$, $u^2 = 1$.

Повертаємось до старих змінних:

$$\frac{z^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{\ln|x|+C}, \quad x = 0, \quad z^2 = x^2.$$

Ще до старих змінних:

$$y = x^2 - \frac{x^2}{\ln|x|+C}, \quad x = 0, \quad y = x^2.$$

$$1.31. y(x^2 y^2 + 1) dx + (x^2 y^2 - 1) x dy = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння методом групування.

$$x^2 y^2 (y dx + x dy) + y dx - x dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 y^2 d(xy) + x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ і } y^2 d(xy) + d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Введемо нові змінні: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ (тоді $y^2 = uv$, $x^2 = \frac{u}{v}$);

$$uvdu + dv = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ і } udu + \frac{dv}{v} = 0;$$

$$\frac{u^2}{2} + \ln|v| = \ln|C| \Leftrightarrow v = Ce^{-\frac{u^2}{2}}, \text{ а у старих змінних}$$

$$y = Cxe^{-\frac{x^2y^2}{2}}, \text{ і ще з попереднього } x = 0.$$

1.32. $3x^5ydx + (y^4 - x^6)dy = 0.$

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням.

Робимо заміну $x = z^\alpha$. Тоді $dx = \alpha z^{\alpha-1}dz$, а тоді

$$3z^{5\alpha}y\alpha z^{\alpha-1}dz + (y^4 - z^{6\alpha})dy = 0,$$

$$5\alpha + 1 + \alpha - 1 = 4 = 6\alpha \Leftrightarrow 6\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2/3 - \text{ маємо}$$

однорідне рівняння;

$$2yz^3dz + (y^4 - z^4)dy = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{z}{y}\right)^3dz + \left[1 - \left(\frac{z}{y}\right)^4\right]dy = 0,$$

$$\frac{z}{y} = u, z = uy, dz = udy + ydu, \text{ тоді}$$

$$2u^3(udy + ydu) + (1 - u^4)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2u^4 + 1 - u^4)dy + 2u^3ydu = 0 \Leftrightarrow$$

$$(u^4 + 1)dy + 2u^3ydu = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + 2\frac{u^3du}{u^4+1} = 0 \text{ і } y = 0,$$

$$\ln|y| + \frac{1}{2}\ln(u^4 + 2) = \ln|C| \Leftrightarrow y(u^4 + 2)^{1/2} = C \text{ і повертаємось}$$

до старих змінних.

Також зауважимо, що $d(x^6) = 6x^5dx$, тому можемо зробити заміну $t = x^6$ ($dt = 6x^5dx$) і записати рівняння у вигляді

$$\frac{1}{2}ydt + (y^4 - t)dy = 0 \Leftrightarrow y\frac{dt}{dy} - 2t + 2y^4 = 0, \text{ а це лінійне рівняння,}$$

яке розглядатимемо в наступній лабораторній роботі.

1.33. $y' = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}.$

Робимо заміну $x = u - 1$, $y = v - 2$ ($x + 1 = 0$ і $y - 2x = 0$ при $x = -1$, $y = -2$);

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} + tg \frac{v-2u}{u} \Leftrightarrow dv = \left[\frac{v}{u} + tg \left(\frac{v}{u} - 2 \right) \right] du;$$

$$\frac{v}{u} = z, v = zu, dv = zdu + udz,$$

$$zdu + udz = [z + tg(z - 2)]du \Leftrightarrow udz = tg(z - 2)du;$$

$$\frac{\cos(z-2)dz}{\sin(z-2)} = \frac{du}{u}, u = 0, z = 2;$$

$$\ln|\sin(z - 2)| = \ln|u| + \ln|C| \Leftrightarrow$$

$$\sin(z - 2) = Cu \text{ i } u = 0, z = 2;$$

$$\ln|\sin(z - 2)| = \ln|u| + \ln|C| \Leftrightarrow$$

$$\sin(z - 2) = Cu \text{ i } u = 0, z = 2;$$

$$\sin\left(\frac{v-2u}{u}\right) = Cu \text{ i } u = 0, v = 2u;$$

$$\sin\left(\frac{y-2x}{x+1}\right) = C(x+1) \text{ i } x = -1, \text{ також } y = 2x \text{ (} y + 2 = 2x + 2 \text{)}.$$

Лабораторна робота 3.

Лінійні рівняння і звідні до них.

Лінійним називається рівняння вигляду

$$x' + p(t)x = g(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (1)$$

Функція $p(t)$ називається коефіцієнтом рівняння, а $g(t)$ – вільним членом або правою частиною рівняння. Якщо $g(t) = 0$, то одержуємо рівняння

$$x' + p(t)x = 0, \quad (2)$$

яке називається *лінійним однорідним рівнянням (ЛОР)*, відповідно лінійне рівняння (1) ще називають *лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНЕР або ЛР)*.

ЛОР є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок $x = Ce^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}$ знаходимо відомим методом.

Розв'язок ЛНР шукатимемо *методом варіації сталої*: у такому ж вигляді як загальний розв'язок відповідного ЛОР, але з заміною сталої C на невідому функцію $\varphi(t)$.

Приклади.

1.46. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Це ЛР, $x^2 \frac{dy}{dx} + xy + 1 = 0$, може бути особлива точка $x^2 = 0$, але $xy + 1 \neq 0$ при $x = 0$ (тут нема особливої точки),

$x^2y' + xy = 0$ – ЛОР (тобто рівняння з відокремлюваними змінними), $xdy + ydx = 0 \Leftrightarrow$

$$d(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = C \Leftrightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР за методом варіації сталої, тобто у вигляді $y = \frac{\varphi(x)}{x}$,

$$y' = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2},$$

тоді

$$x^2 \left(\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) + x \frac{\varphi(x)}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x\varphi'(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = -1/x \Leftrightarrow \varphi(x) = -\ln|x| + C, \text{ а тоді}$$

$$y = \frac{-\ln|x| + C}{x} \Leftrightarrow y = -\frac{\ln|x|}{x} + \frac{C}{x} - \text{сума частинного розв'язку}$$

ЛНЕР і загального розв'язку ЛОР.

1.47. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}.$

Відповідне ЛОР

$$xy' + (x + 1)y = 0 \Leftrightarrow xdy + (x + 1)ydx = 0,$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{(x+1)dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln|y| + x + \ln|x| = \ln|C| \Leftrightarrow$$

$$y = Cx^{-1}e^{-x}.$$

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР у вигляді

$$y = \varphi(x)x^{-1}e^{-x},$$

звідки

$$y' = \varphi'(x)x^{-1}e^{-x} - \varphi(x)x^{-2}e^{-x} - \varphi(x)x^{-1}e^{-x}.$$

Підставляємо в початкове рівняння

$$x[\varphi'(x)x^{-1}e^{-x} - \varphi(x)x^{-2}e^{-x} - \varphi(x)x^{-1}e^{-x}] + (x+1)\varphi(x)x^{-1}e^{-x} = 3x^2e^{-x},$$

$$\varphi'(x) - \varphi(x)/x - \varphi(x) + \varphi(x) + \varphi(x)/x = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = 3x^2, \varphi(x) = x^3 + C,$$

$$y = \frac{x^3+C}{x}e^{-x} \Leftrightarrow y = x^2e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}.$$

1.48. $(2e^y - x)y' = 1.$

Ще не видно, що це ЛР, але запишемо його у вигляді

$$(2e^y - x)dy = dx \Leftrightarrow$$

$$2e^y - x = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dx}{dy} + x = 2e^y - \text{уже ЛНЕР},$$

відповідне ЛОР

$$\frac{dx}{dy} + x = 0 \Leftrightarrow dx + xdy = 0 \Leftrightarrow \ln|x| + y = \ln|C|,$$

$$\ln|x| = \ln|C| - lne^y \Leftrightarrow \ln|x| = \ln|C| + lne^{-y},$$

$$x = Ce^{-y}.$$

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР у вигляді

$$x = \varphi(y)e^{-y}, \text{ звідки } x' = \varphi'(y)e^{-y} - \varphi(y)e^{-y},$$

$$\varphi'(y)e^{-y} - \varphi(y)e^{-y} + \varphi(y)e^{-y} = 2e^y \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = 2e^{2y}, \quad \varphi(y) = e^y + C,$$

$$x = [e^y + C]e^{-y} \Leftrightarrow x = 1 + Ce^{-y}.$$

1.49. $(xy + e^x)dx - xdy = 0,$

$$xy + e^x - xy' = 0 \Leftrightarrow xy' - xy = e^x - \text{ЛНЕР}.$$

Відповідне ЛОР

$$xy' - xy = 0,$$

$$dy - ydx = 0 \Leftrightarrow \ln|y| - x = \ln|C| \Leftrightarrow y = Ce^x,$$

$$y = \varphi(x)e^x \rightarrow x[\varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x] - x\varphi(x)e^x = e^x \Leftrightarrow$$

$$x\varphi'(x) = 1, \quad \varphi(x) = \ln|x| + C,$$

$$y = [\ln|x| + C]e^x.$$

1.50. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$

Це рівняння Бернуллі, яке має окремий розв'язок $y = 0$.

Загальний вигляд рівняння Бернуллі

$$a_0(x)y' + a(x)y = b(x)y^m.$$

Зводиться до ЛР заміною $z = y^{1-m}$.

Множимо задане рівняння на y^{-3} , одержуємо $xy^{-3}y' + 2y^{-2} + x^5e^x$.

Робимо заміну $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$,

$$\frac{xz'}{-2} + 2z + x^5e^x \Leftrightarrow xz' - 4z = 2x^5e^x \text{ -ЛНЕР.}$$

Відповідне йому ЛОР

$$xz' - 4z = 0, \quad xdz - 4zdx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln|z| = 4\ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow z = Cx^4, \quad z = \varphi(x)x^4,$$

і тоді

$$x[\varphi'(x)x^4 + 4x^3\varphi(x)] - 4\varphi(x)x^4 = 2x^5e^x, \quad \varphi'(x)x^5 = 2x^5e^x,$$

$$\varphi(x) = 2e^x + C, \quad z = [2e^x + C]x^4, \quad y^{-2} = [2e^x + C]x^4,$$

$$y^2[2e^x + C]x^4 = 1, \text{ і ще } y = 0.$$

1.51. $xydy = (y^2 + x)dx$.

$$\frac{x}{2}d(y^2) = (y^2 + x)dx, \text{ заміна } z = y^2,$$

$$xdz = 2(z + x)dx - \text{є ЛР: } xz' = 2z + 2x,$$

але також є однорідним рівнянням $z' = 2(\frac{z}{x} + 1)$.

Заміна $\frac{z}{x} = u \Leftrightarrow z = ux, dz = udx + xdu,$

$$udx + xdu = (2u + 2)dx, \quad xdu = (u + 2)dx,$$

$$\ln|u + 2| = \ln|x| + \ln|C|, \quad u + 2 = Cx \text{ і } x = 0,$$

$$\frac{z}{x} + 2 = Cx \text{ і } x = 0, \quad z = (Cx - 2)x \text{ і } x = 0,$$

$$y^2 = (Cx - 2)x \text{ і } x = 0.$$

1.52. $dx + (2x - 2(1 - y)x\sqrt{x})dy = 0$. По-іншому

$$\frac{dx}{dy} = 2x - 2(1 - y)x\sqrt{x}.$$

Це рівняння Бернуллі, яке має окремий розв'язок $x = 0$. Ділимо на $x\sqrt{x}$, одержуємо $\frac{x'}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2(1 - y)$.

Заміна $z = x^{-1/2}$, тоді $z' = \frac{-1}{2}x^{-3/2}x'$ і одержуємо рівняння

$$-2z' = 2z - 2 + 2y \Leftrightarrow -\frac{dz}{dy} = z + y - 1.$$

Це вже ЛР, але його можна розв'язати швидше заміною

$$u = z + y - 1. \text{ Тоді } du = dz + dy, dz = du - dy.$$

$$-du + dy = udy \Leftrightarrow du = (1 - u)dy \Leftrightarrow$$

$$-\ln|u - 1| = y - \ln|C| \Leftrightarrow (u - 1)e^y = C,$$

$$(z + y - 2)e^y = C,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + y = 2 + Ce^{-y} \quad \text{і} \quad x = 0.$$

Лабораторна робота 4.

Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Рівняння вигляду

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0, \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є диференціалом деякої функції $u(t, x)$:

$$du(t, x) = M(t, x) dt + N(t, x) dx.$$

Крім того,

$$du(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dx.$$

Звідси та з попередньої рівності одержуємо

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dx = M(t, x) dt + N(t, x) dx,$$

а за довільністю dt та dx ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t, x). \quad (2)$$

Рівняння (1) тепер можемо записати у вигляді

$$du(t, x) = 0,$$

його загальний розв'язок $u(t, x) = C$.

Теорема. Нехай функції M , N , $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial t}$ неперервні у деякій зв'язній області Ω . Щоб рівняння (1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (3)$$

Приклади.

1.67. $(y \cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a \sin y + 2x^2y)dy = 0.$

Перевіримо, чи $\frac{\partial}{\partial y}(y \cos x + 2xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - a \sin y)$. Маємо $\cos x + 4xy = \cos x + 4xy$, тому рівняння є в повних диференціалах.

Застосуємо метод групування:

$$y \cos x dx + 2xy^2 dx + \sin x dy - a \sin y dy + 2x^2 y dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$yd(\sin x) + \sin x dy + 2xy(y dx + x dy) + d(a \cos y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(y \sin x) + 2xy d(xy) + d(a \cos y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(y \sin x) + d((xy)^2) + d(a \cos y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(y \sin x + x^2 y^2 + a \cos y) = 0 \Leftrightarrow y \sin x + x^2 y^2 + a \cos y = C.$$

1.68. $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0.$

$\frac{\partial}{\partial y} e^{-y} = -\frac{\partial}{\partial x} (2y + xe^{-y}) \Leftrightarrow -e^{-y} = -e^{-y}$ – рівняння є в повних диференціалах. Маємо

$$e^{-y} dx - 2y dy - xe^{-y} dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$-d(y^2) + e^{-y} dx + xd(e^{-y}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(-y^2) + d(xe^{-y}) = 0 \Leftrightarrow xe^{-y} - y^2 = C.$$

1.69. $3x^2(1 + \ln y) dx = (2y - \frac{x^3}{y}) dy.$

$$\frac{\partial}{\partial y} [3x^2(1 + \ln y)] = \frac{\partial}{\partial x} [-(2y - \frac{x^3}{y})] \Leftrightarrow \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{y},$$

$$3x^2 dx + 3x^2 \ln y dx + x^3 d(\ln y) - 2y dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(x^3) + d(x^3 \ln y) - d(y^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C.$$

$$1.70. \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) \Leftrightarrow -\frac{6x}{y^4} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Розв'яжемо це рівняння іншим методом. Запишемо систему вигляду (2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4};$$

із 1-го рівняння знаходимо

$$u(x, y) = \int \left(\frac{2x}{y^3}\right)dx = \frac{2}{y^3} \int x dx + C(y) = \frac{x^2}{y^3} + C(y),$$

підставляємо в 2-ге рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3} + C(y)\right) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \Leftrightarrow -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \Leftrightarrow$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2}, \text{ звідки } C(y) = -\frac{1}{y} + C_1; \quad u = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1;$$

одержали розв'язок

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

$$1.71. dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x + e^{-y}y^2); \text{ але це ЛР}$$

$$\frac{dx}{dy} + x + e^{-y}y^2 = 0.$$

розв'яжемо його методом інтегрувального множника, $m = m(y)$:

$$m(y)dx + m(y)(x + e^{-y}y^2) = 0;$$

за теоремою має бути

$$m'(y) = \frac{\partial}{\partial x}[m(y)(x + e^{-y}y^2)] \Leftrightarrow m'(y) = m(y) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dm}{dy} = m \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = dy \Leftrightarrow m = Ce^y,$$

беремо $m = e^y$, тоді

$$e^y dx + e^y x dy + y^2 dy = 0 \Leftrightarrow d(xe^y) + \frac{1}{3}d(y^3) = 0,$$

$$xe^y + \frac{1}{3}y^3 = C.$$

$$1.72. \left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dy = \frac{y}{x^3}dx.$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^3}\right) \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$, але помноживши на x^3 , матимемо

$$(y^3 - x)dy - ydx = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - x), \quad -1 = -1;$$

отримали рівняння в повних диференціалах (x^3 є інтегровальним множником для заданого рівняння). Знаходимо розв'язок

$$\frac{y^4}{4} - xy = C.$$

$$1.73. y(1 - y \sin x) \cos^2 y dx - (y^2 + x \cos^2 y)dy = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[y(1 - y \sin x) \cos^2 y] \neq \frac{\partial}{\partial x}[-(y^2 + x)];$$

підбираємо інтегровальний множник; поділимо рівняння на $y \cos^2 y$:

$$(1 - y \sin x)dx - \left(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y}\right)dy = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 - y \sin x) \neq \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y}\right)\right], \quad \text{бо } -\sin x \neq -\frac{1}{y},$$

нехай $m = m(y)$, тоді

$$m(y)(1 - y \sin x)dx - m(y)\left(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y}\right)dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[m(y)(1 - y \sin x)] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-m(y)\left(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y}\right)\right],$$

$$m'(y)(1 - y \sin x) - m(y) \sin x = -\frac{m(y)}{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$m'(y)(1 - y \sin x) = m(y)\left(\sin x - \frac{1}{y}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$m'(y)y(1 - y \sin x) = m(y)(y \sin x - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$m'(y) = -\frac{m(y)}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dm}{m} = -\frac{dy}{y}, \quad m = \frac{C}{y};$$

і при $C = 1$ маємо

$$\left(\frac{1}{y} - \sin x\right)dx - \left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - \sin x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2}\right)\right].$$

Отримали рівняння в повних диференціалах. Запишемо систему вигляду

(2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \sin x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2}\right);$$

з першого рівняння знаходимо

$$u = \frac{x}{y} + \cos x + C(y), \text{ тоді}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{y} + \cos x + C(y) \right] = -\left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2}\right),$$

$$-\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{1}{\cos^2 y} - \frac{x}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$C'(y) = -\frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow C(y) = -\operatorname{tg} y + C_1. \text{ Отже,}$$

$$u = \frac{x}{y} + \cos x - \operatorname{tg} y + C_1,$$

а розв'язок має вигляд

$$\frac{x}{y} + \cos x - \operatorname{tg} y = C \text{ і ще } y = 0, \cos y = 0.$$

Зауважимо, що вихідне рівняння має інтегрувальний множник $\frac{1}{y^2 \cos^2(y)}$.

Зразок контрольної роботи.

Розв'язати рівняння:

1) $y' = (x + y)^3,$

2) $(2y - x^2)dx = 2ydy,$

3) $(3y^2x + x^3) dy + (y^3 + 3yx^2) dx = 0,$

4) $(x^2 - 3xy^2) dx + (6y^2 - 3x^2y) dy = 0,$

5) $(x + y - 2) dx + (x - y + 6) dy = 0,$

6) $y' - y \sin x = y^2 \sin x,$

7) $e^y(1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0.$

Література

1. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: підручник –2-ге вид., виправ. і доп. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2017, 372 с.