Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані щодо похідної

Лабораторні роботи 1-4

з диференціальних рівнянь

Львів

2022

Лопушанська Г. П. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані щодо похідної: лабораторні роботи 1-4 з диференціальних рівнянь. - Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. – 26 с.

Наведено приклади із розв'язками за темами лабораторних робіт згідно з рекомендованими у підручнику [1]. Для студентів факультету прикладної математики і інформатики, механіко-математичного факультету.

© Лопушанська Г. П. 2022

ЗМІСТ

Вступ 3

1. Лабораторна робота 1 4

2. Лабораторна робота 2 10

3. Лабораторна робота 3 16

4. Лабораторна робота 4 21

5. Література 26

Лабороторна робота 1.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними і звідні до них.

Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане щодо похідної, має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Нехай $x = \varphi(t),\ t \in (\alpha, \beta)$ – його розв'язок, тоді

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),\ \ t \in (\alpha, \beta);$$

$$\varphi'(t)dt = f(t, \varphi(t))dt; \quad d\varphi(t) = f(t, \varphi(t))dt,$$

і можемо подати його у вигляді

$$dx = f(t,x)dt,$$

що є окремим випадком рівняння у диференціалах

$$M(t,x)\ dt + N(t,x)\ dx = 0\ \ (t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Розглянемо рівняння

$$T(t)\ dt + X(x)\ dx = 0, \tag{1}$$

де $T(t)$ та $X(x)$ - задані неперервні функції.

Нехай $x = \varphi(t)$ – розв'язок рівняння (1). Тоді

$$T(t)\ dt + X(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \equiv 0,$$

звідки

$$\int_{t_0}^{t} T(t)\ dt + \int_{t_0}^{t} X(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = C$$

для довільного значення t_0, тобто

$$\int_{t_0}^{t} T(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} X(x)\,dx = C \qquad (2)$$

($x_0 = x(t_0)$, C – довільна стала).

Ми довели, що довільний розв'язок рівняння (1) входить у множину (2) при конкретному значенні C. Співвідношення (2) можемо також записати у вигляді

$$\int T(t)\,dt + \int X(x)\,dx = C \qquad (3)$$

або $\phi(t,x) = C$. Нехай $x = \varphi(t)$ – неявно задана цим співвідношенням функція. Диференціюючи (2) за змінною t, одержуємо

$$\phi'_t(t,\varphi(t)) + \phi'_x(t,\varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0,$$

тобто

$$T(t)\,dt + X(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \equiv 0.$$

Отже, знайдена з (2) як неявна функція $x = \varphi(t)$ є розв'язком рівняння (1). Згідно з означенням, (2) (або (3)) є загальним розв'язком рівняння (1) (у неявному вигляді).

Розглянемо рівняння вигляду

$$M_1(t)M_2(x)\,dt + N_1(t)N_2(x)\,dx = 0 \qquad (4)$$

Рівняння (4), як і рівняння (1) називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Припустимо спочатку, що $M_2(x)N_1(t) \neq 0$.

$$\frac{M_1(t)}{N_1(t)}\,dt + \frac{M_2(x)}{N_2(x)}\,dx = 0$$

– рівняння вигляду (1). За доведеним, його загальний розв'язок

$$\int \frac{M_1(t)}{N_1(t)}\,dt + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)}\,dx = C. \tag{5}$$

Якщо $M_2(x) = 0$ при $x = x_0$, то вертикальна пряма $x = x_0$ є інтегральною кривою рівняння (4). Справді, $dx_0 = 0$, тому, підставляючи функцію $x = x_0$ у рівняння (4), одержуємо правильну рівність

$$M_1(t)M_2(x_0)\,dt + N_1(t)N_2(x_0)\,dx_0 = 0.$$

Отже, щоб мати повну сім'ю розв'язків рівняння (4), до загального розв'язку (5) треба додати функції

$$x \equiv x_i, \quad t \equiv t_j,$$

де x_i, t_j – корені відповідно рівнянь $M_2(x) = 0$ та $N_1(t) = 0$.

Приклади.

1.7. $y' - xy^2 = 2xy$, $\frac{dy}{dx} = xy(y+2)$,

$dy = xy(y+2)dx \ \ |\frac{1}{y(y+2)}$,

$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx$, $\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx + C$,

$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}$, $A(y+2) + By = 1$,

$y = 0 \ \Rightarrow 2A = 1, \ \ A = 1/2$,

$y = -2 \ \Rightarrow -2B = 1$, $B = -1/2$. Отже,

$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+2} = \frac{1}{2}[ln|y| - ln|y+2|] = \frac{1}{2}ln|\frac{y}{y+2}|$.

Тепер розв'язок рівняння буде таким

$\frac{1}{2}ln|\frac{y}{y+2}| = \frac{1}{2}x^2 + \frac{C_1}{2} \ \Leftrightarrow ln|\frac{y}{y+2}| = lne^{x^2} + \ln|C_2| \ \Leftrightarrow$

$|\frac{y}{y+2}| = |C_2|e^{x^2} \ \Leftrightarrow \ y = C_2e^{x^2}(y+2)$. Додаємо $y = -2$. Множиною всіх розв'язків рівняння буде сукупність

$y = Ce^{x^2}(y+2)$, $y=-2$ або $y+2 = Ce^{-x^2}y$, $y=0$.

1.8. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0)=1$.

Це задача Коші. Спочатку знаходимо множину всіх розв'язків рівняння:

$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$, $(x^2-1)dy + 2xy^2dx = 0 \ |\frac{1}{(x^2-1)y^2}$,

$\frac{dy}{y^2} + \frac{2x}{x^2-1} = 0$, розв'язком буде $\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2x}{x^2-1} = C \ <=>$

$-\frac{1}{y} + ln|x^2-1| = C$,

також $y=0$, також $x^2-1=0 \ <=> \ x=+1, \ x=-1$.

Але ці окремі розв'язки не задовольняють початкову умову (ці прямі не проходять через точку (0,1)).

З попередньої множини розв'язків при $x=0$, $y=1$ одержуємо

$-1 + ln|0-1| = C \ <=> \ C=-1$. Отже, шуканий розв'язок

$-\frac{1}{y} + ln|x^2-1| = -1 \ <=> \ \frac{1}{y} = 1 - ln|x^2-1| \ <=>$

$y = \frac{1}{1-ln|x^2-1|}$ (у явному вигляді).

1.9. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right) = 1$.

Спочатку розв'язуємо рівняння відносно похідної:

$1 + \frac{ds}{dt} = e^s$, $\frac{ds}{dt} = e^s - 1$.

Далі за попередньою схемою:

$ds = (e^s-1)dt \ |\frac{1}{e^s-1}$, $\frac{ds}{e^s-1} = dt$, $\int \frac{ds}{e^s-1} = \int dt + C$,

$\int \frac{e^{-s}ds}{1-e^{-s}} = t + C$, $ln|1-e^{-s}| = t + C$, $ln|1-e^{-s}| = lne^t + ln|C|$

$1 - e^{-s} = Ce^t$, розв'язком є $e^s - 1 = 0 <=> 1 - e^{-s} = 0$,

він входить у одержану множину розв'язків при $C=0$.

2. До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(at + bx + c),$$

де a, b, c – сталі, F – функція одного аргументу $z = at + bx + c$.

Зробимо у рівнянні заміну $z = at + bx + c$, тобто від змінних t, x перейдемо до змінних t, z. Знаходимо $\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dz}{dt}$, а враховуючи рівняння, $\frac{dz}{dt} = a + bF(z)$. Одержали рівняння вигляду (1).

Приклади.

1.11. $y' = \cos(y - x)$, або $\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$.

Робимо заміну $z = y - x$. Диференціюємо її: $dz = dy - dx$, тобто $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$. Із рівняння маємо $\frac{dy}{dx} = \cos(z)$. Тоді попередня рівність дає

$$\frac{dz}{dx} = \cos(z) - 1.$$

Це вже диференціальне рівняння у змінних z, t. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$dz = (\cos(z) - 1)dx$, $\frac{dz}{\cos(z)-1} = dx$,

$-\frac{dz}{2\sin^2(\frac{z}{2})} = dx$, $-\frac{d\frac{z}{2}}{\sin^2(\frac{z}{2})} = dx$,

$ctg(\frac{z}{2}) = x + C$,

також є розв'язок $\cos(z) - 1 = 0 \ <=> \ z = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Повертаємось до старих змінних. Одержуємо

$ctg(\frac{y-x}{2}) = x + C$, також є розв'язок $y - x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$ – ще зліченна множина розв'язків.

3. *Однорідним* називається рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(\frac{x}{t}).$$

Зробимо заміну $z = \frac{x}{t}$, тобто $x = zt$. Диференціюємо цю рівність:

$$dx = t\, dz + z\, dt.$$

Рівняння перетворюється до такого

$$t\, dz + z\, dt = F(z)\, dt,$$

тобто

$$t\, dz + (z - F(z))\, dt = 0.$$

А це рівняння вигляду (1).

1.10. $xy' - y = xtg\left(\frac{y}{x}\right)$.

Зауважимо, що тут $x \neq 0$. Поділимо рівняння на x:

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = tg\left(\frac{y}{x}\right)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\left(\frac{y}{x}\right)$, а отже, це однорідне рівняння.

Робимо заміну $\frac{y}{x} = z \;\; <=> \;\; y = xz$. Диференціюємо її:

$dy = zdx + xdz$, звідки $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ і підставляємо в попереднє рівняння:

$z + x\frac{dz}{dx} = z + tg(z)$, $x\frac{dz}{dx} = tg(z)$, $xdz = tg(z)dx \mid_{\frac{1}{xtg(z)}}$,

$\frac{\cos(z)}{\sin(z)}dz = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{\cos(z)}{\sin(z)}dz = \int \frac{dx}{x}$,

$ln|\sin(z)| = ln|x| + ln|C|$, $\sin(z) = Cx$, і ще розв'язки

$tgz = 0 \;\; <=> \;\; \sin(z) = 0$ (останній входить у попередню множину розв'язків при $C = 0$).

Отже, множина всіх розв'язків є такою: $\sin(z) = Cx$, а в старих змінних $\sin(\frac{y}{x}) = Cx$.

Лабороторна робота 2.

Рівняння, звідні до однорідних.

До однорідних зводяться рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Big) \qquad (1).$$

Окремі випадки:

1) $c = c_1 = 0$, рівняння (1) має вигляд

$\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\Big)$ <=> $\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}\Big)$ <=> $\frac{dy}{dx} = g_1\big(\frac{y}{x}\big)$ – це однорідне рівняння;

2) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} := p$, рівняння (1) має вигляд

$\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{pa_1x+pb_1y+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Big)$ <=> $\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{p(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}\Big)$ <=>
$\frac{dy}{dx} = g_1\big(a_1x+b_1y\big)$, або навіть

$\frac{dy}{dx} = g_2\big(a_1x+b_1y+c_1\big)$, бо $\frac{dy}{dx} = g\Big(\frac{p(a_1x+b_1y+c_1)+c-pc_1}{a_1x+b_1y+c_1}\Big)$.

Такі рівняння зводяться до рівнянь з відокремленими змінними заміною $z = a_1x+b_1y$ (або відповідно $z = a_1x+b_1y+c_1$).

Загальний випадок: робимо заміну $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Маємо
$\frac{dv}{du} = g\Big(\frac{a(u+x_0)+b(v+y_0)+c}{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}\Big)$ <=> $\frac{dv}{du} = g\Big(\frac{a(u+x_0)+b(v+y_0)+c}{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}\Big)$ <=>
$\frac{dv}{du} = g\Big(\frac{au+bv+ax_0+by_0+c}{a_1u+b_1v}\Big)$ <=>
$\frac{dv}{du} = g\Big(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\Big)$ <=> однорідне рівняння, якщо
$ax_0+by_0+c = 0$ і $a_1x_0+b_1y_0+c_1 = 0$.

Іноді до однорідних можна звести рівняння заміною $y = z^\alpha$ або $x = z^\alpha$, де α – деяке дійсне число. Такі рівняння називаються *узагальнено однорідними*.

Приклади.

1.28. $(2x-3y+1)dx+(x+y-1)dy=0.$

Система

$$2x-3y+1=0, \quad x+y-1=0$$

має розв'язок $x_0=0,4,\ y_0=0,6.$ Робимо заміну

$$x=u+0,4, \quad y=v+0,6.$$

Маємо

$$(2u-3v)du+(u+v)dv=0.$$

Це вже однорідне рівняння. Робимо ще одну заміну

$$v=uz\ (dv=udz+zdu).$$

Одержуємо

$(2u-3uz)du+(u+uz)(udz+zdu)=0 <=>$

$(2-3z)udu+(1+z)uzdu+(1+z)u^2dz=0 <=>$

$(2-2z+z^2)du+(1+z)udz=0$ –рівняння з відокремлюваними змінними, $u=0$ не є розв'язком однорідного рівняння,

$\frac{du}{u}+\frac{(z+1)dz}{(z-1)^2+1}=0 <=>$

$\frac{du}{u}+\frac{(z-1+2)dz}{(z-1)^2+1}=0,$

$\int\frac{du}{u}+\int\frac{(z-1)dz}{(z-1)^2+1}+2\int\frac{dz}{(z-1)^2+1}=ln|C|,$

$ln|u|+\frac{1}{2}ln[(z-1)^2+1]+arctg(z-1)=ln|C| <=>$

$u\sqrt{z^2-2z+2}=Ce^{-arctg(z-1)}.$

Повертаємось до старих змінних

$u\sqrt{(\frac{v}{u})^2-2\frac{v}{u}+2}=Ce^{-arctg(\frac{v}{u}-1)} \ <=>$

$\sqrt{v^2-2uv+2u^2}=Ce^{-arctg(\frac{v-u}{u})},$

$(y-0,6)^2-2(x-0,4)(y-0,3)+2(x-0,2)^2=C^2e^{-2arctg(\frac{y-x-0,1}{x-0,2})}.$

1.29. $2(x\sqrt{y}+2y)dx - xdy = 0.$

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням. Робимо заміну $y = z^\alpha$. Тоді $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$,

$2(xz^{\frac{\alpha}{2}} + 2z^\alpha)dx - x\alpha z^{\alpha-1}dz = 0,$

$1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha = 1 + \alpha - 1.$

Це можливо при $\alpha = 2$. Отже, рівняння є узагальнено однорідним. Тепер $y = z^2$, $dy = 2zdz$,

$$2(xz + 2z^2)dx - 2xzdz = 0$$

– однорідне рівняння,

$\left[\frac{z}{x} + 2(\frac{z}{x})^2\right]dx - \frac{z}{x}dz = 0.$

Заміна $\frac{z}{x} = u <=> z = xu$, $dz = udx + xdu$,

$(u + 2u^2)dx - u(udx + xdu) = 0 \;\; <=> \;\; u = 0$ і

$(1 + 2u)dx - udx - xdu = 0, \; <=>$

$(1 + u)dx - xdu = 0$, відокремлюємо змінні

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u+1}$, $ln|x| = ln|u + 1| + ln|C|$, одержуємо

$x = C(u + 1)$, і ще розв'язки $u = -1$, $u = 0$,

або $u = Cx - 1$, $x = 0$, $u = 0$.

Повертаємось до старих змінних: $\frac{z}{x} = Cx - 1 \;\; <=> \;\; z = Cx^2 - x$, і ще $x = 0$, $z = 0$, ще до старих змінних:

$$\sqrt{y} = Cx^2 - x,\; x = 0,\; z = 0,$$

тобто

$y = (Cx^2 - x)^2$, $x = 0$, $y = 0$.

1.30. $x^3(y' - x) = y^2$.

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням. Робимо заміну $y = z^\alpha$. Тоді $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$,

$$x^3\big(\alpha z^{\alpha-1}\tfrac{dz}{dx} - x\big) = z^{2\alpha} \ <=>$$

$$x^3\big(\alpha z^{\alpha-1}dz - xdx\big) = z^{2\alpha}dx,$$

$$x^3\alpha z^{\alpha-1}dz - x^4dx = z^{2\alpha}dx,$$

$$3 + \alpha - 1 = 4 = 2\alpha.$$

Це можливо при $\alpha = 2$. Отже, рівняння є узагальнено однорідним. При заміні $y = z^2$ одержуємо

$$2x^3zdz - x^4dx = z^4dx <=> \ x = 0 \text{ і } 2\tfrac{z}{x}dz = \big[(\tfrac{z}{x})^4 + 1\big]dx,$$

$$2uxdu = (u^4 - 2u^2 + 1)dx \ <=> \ \tfrac{2udu}{(u^2-1)^2} = \tfrac{dx}{x},$$

$$\int \tfrac{dt}{(t-1)^2} = ln|x| + C, \ -\tfrac{1}{u^2-1} = ln|x| + C$$

і ще окремі розв'язки $x = 0$, $u^2 = 1$.

Повертаємось до старих змінних:

$$\tfrac{z^2}{x^2} = 1 - \tfrac{1}{ln|x|+C}, \ x = 0, \ z^2 = x^2.$$

Ще до старих змінних:

$$y = x^2 - \tfrac{x^2}{ln|x|+C}, \ x = 0, \ y = x^2.$$

1.31. $y(x^2y^2 + 1)dx + (x^2y^2 - 1)xdy = 0$.

Розв'яжемо це рівняння методом групування.

$$x^2y^2(ydx + xdy) + ydx - xdy = 0 \ <=>$$

$$x^2y^2d(xy) + x^2d(\tfrac{y}{x}) = 0 \ <=>$$

$$x = 0 \text{ і } y^2d(xy) + d(\tfrac{y}{x}) = 0.$$

Введемо нові змінні: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ (тоді $y^2 = uv$, $x^2 = \frac{u}{v}$);

$uvdu + dv = 0 \;\; <=> \;\; v = 0$ і $udu + \frac{dv}{v} = 0;$

$\frac{u^2}{2} + ln|v| = ln|C| \;\; <=> \;\; v = Ce^{-\frac{u^2}{2}}$, а у старих змінних

$y = Cxe^{-\frac{x^2y^2}{2}}$, і ще з попереднього $x = 0$.

1.32. $3x^5ydx + (y^4 - x^6)dy = 0.$

Перевіримо, чи це рівняння є узагальнено однорідним рівнянням. Робимо заміну $x = z^\alpha$. Тоді $dx = \alpha z^{\alpha-1}dz$, а тоді

$3z^{5\alpha}y\alpha z^{\alpha-1}dz + (y^4 - z^{6\alpha})dy = 0,$

$5\alpha + 1 + \alpha - 1 = 4 = 6\alpha <=> 6\alpha = 4 <=> \alpha = 2/3$ – маємо однорідне рівняння;

$2yz^3dz + (y^4 - z^4)dy = 0 \;\; <=> \;\; 2\left(\frac{z}{y}\right)^3dz + \left[1 - \left(\frac{z}{y}\right)^4\right]dy = 0,$

$\frac{z}{y} = u$, $z = uy$, $dz = udy + ydu$, тоді

$2u^3(udy + ydu) + (1 - u^4)dy = 0 \;\; <=>$

$(2u^4 + 1 - u^4)dy + 2u^3ydu = 0 \;\; <=>$

$(u^4 + 1)dy + 2u^3ydu = 0 \;\; <=> \;\; \frac{dy}{y} + 2\frac{u^3du}{u^4+1} = 0$ і $y = 0,$

$ln|y| + \frac{1}{2}ln(u^4 + 2) = ln|C| \;\; <=> \;\; y(u^4 + 2)^{1/2} = C$ і повертаємось до старих змінних.

Також зауважимо, що $d(x^6) = 6x^5dx$, тому можемо зробити заміну $t = x^6$ $(dt = 6x^5dx)$ і записати рівняння у вигляді

$\frac{1}{2}ydt + (y^4 - t)dy = 0 \;\; <=> y\frac{dt}{dy} - 2t + 2y^4 = 0$, а це лінійне рівняння, яке розглядатимемо в наступній лабораторній роботі.

1.33. $y' = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}.$

Робимо заміну $x = u - 1$, $y = v - 2$ $(x + 1 = 0$ і $y - 2x = 0$ при $x = -1$, $y = -2)$;

$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} + tg\frac{v-2u}{u} \ <=> \ dv = \Big[\frac{v}{u} + tg\big(\frac{v}{u} - 2\big)\Big]du;$

$\frac{v}{u} = z,\ v = zu,\ dv = zdu + udz,$

$zdu + udz = [z + tg(z-2)]du \ <=> \ udz = tg(z-2)du;$

$\frac{\cos(z-2)dz}{\sin(z-2)} = \frac{du}{u},\ u = 0, \ \ z = 2;$

$ln|\sin(z-2)| = ln|u| + ln|C| \ <=>$

$\sin(z-2) = Cu$ і $u = 0, \ \ z = 2;$

$ln|\sin(z-2)| = ln|u| + ln|C| \ <=>$

$\sin(z-2) = Cu$ і $u = 0, \ \ z = 2;$

$\sin(\frac{v-2u}{u}) = Cu$ і $u = 0,\ v = 2u;$

$\sin(\frac{y-2x}{x+1}) = C(x+1)$ і $x = -1$, також $y = 2x$ $(y + 2 = 2x + 2)$.

Лабороторна робота 3.

Лінійні рівняння і звідні до них.

Лінійним називається рівняння вигляду

$$x' + p(t)x = g(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{1}$$

Функція $p(t)$ називається коефіцієнтом рівняння, а $g(t)$ – вільним членом або правою частиною рівняння. Якщо $g(t) = 0$, то одержуємо рівняння

$$x' + p(t)x = 0, \tag{2}$$

яке називається *лінійним однорідним рівнянням (ЛОР)*, відповідно лінійне рівняння (1) ще називають *лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНЕР або ЛР).*

ЛОР є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок $x = Ce^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$ знаходимо відомим методом.

Розв'язок ЛНР шукатимемо *методом варіації сталої*: у такому ж вигляді як загальний розв'язок відповідного ЛОР, але з заміною сталої C на невідому функцію $\varphi(t)$.

Приклади.

1.46. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

Це ЛР, $x^2\frac{dy}{dx} + xy + 1 = 0$, може бути особлива точка $x^2 = 0$, але $xy + 1 \neq 0$ при $x = 0$ (тут нема особливої точки),

$x^2y' + xy = 0$– ЛОР (тобто рівняння з відокремлюваними змінними), $xdy + ydx = 0$ $<=>$

$d(xy) = 0 \ \ <=> \ \ xy = C \ \ <=> \ \ y = \frac{C}{x}.$

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР за методом варіації сталої, тобто у вигляді $y = \frac{\varphi(x)}{x}$,

$y' = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2},$

тоді

$x^2\left(\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) + x\frac{\varphi(x)}{x} + 1 = 0 \ \ <=>$

$x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(x) + 1 = 0 \ \ <=> x\varphi'(x) = -1 \ \ <=>$

$\varphi'(x) = -1/x \ \ <=> \ \ \varphi(x) = -ln|x| + C$, а тоді

$y = \frac{-ln|x|+C}{x} \ \ <=> \ \ y = -\frac{ln|x|}{x} + \frac{C}{x}$ – сума частинного розв'язку ЛНЕР і загального розв'язку ЛОР.

1.47. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

Відповідне ЛОР

$xy' + (x+1)y = 0 \ \ <=> \ \ xdy + (x+1)ydx = 0,$

$\frac{dy}{y} + \frac{(x+1)dx}{x} = 0 \ \ <=> \ \ ln|y| + x + ln|x| = ln|C| \ \ <=>$

$y = Cx^{-1}e^{-x}.$

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР у вигляді

$y = \varphi(x)x^{-1}e^{-x},$

звідки

$y' = \varphi'(x)x^{-1}e^{-x} - \varphi(x)x^{-2}e^{-x} - \varphi(x)x^{-1}e^{-x}.$

Підставляємо в початкове рівняння

$x\left[\varphi'(x)x^{-1}e^{-x} - \varphi(x)x^{-2}e^{-x} - \varphi(x)x^{-1}e^{-x}\right] + (x+1)\varphi(x)x^{-1}e^{-x} = 3x^2e^{-x},$

$\varphi'(x) - \varphi(x)/x - \varphi(x) + \varphi(x) + \varphi(x)/x = 3x^2 \ \ <=>$

$\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi(x) = x^3 + C$,

$y = \frac{x^3+C}{x}e^{-x}$ <=> $y = x^2e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}$.

1.48. $(2e^y - x)y' = 1$.

Ще не видно, що це ЛР, але запишемо його у вигляді

$(2e^y - x)dy = dx$ <=>

$2e^y - x = \frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dy} + x = 2e^y$ – уже ЛНЕР,

відповідне ЛОР

$\frac{dx}{dy} + x = 0$ <=> $dx + xdy = 0$ <=> $ln|x| + y = ln|C|$,

$ln|x| = ln|C| - lne^y$ <=> $ln|x| = ln|C| + lne^{-y}$,

$x = Ce^{-y}$.

Шукаємо розв'язок заданого ЛНЕР у вигляді

$x = \varphi(y)e^{-y}$, звідки $x' = \varphi'(y)e^{-y} - \varphi(y)e^{-y}$,

$\varphi'(y)e^{-y} - \varphi(y)e^{-y} + \varphi(y)e^{-y} = 2e^y$ <=>

$\varphi'(y) = 2e^{2y}$, $\varphi(y) = e^y + C$,

$x = [e^y + C]e^{-y}$ <=> $x = 1 + Ce^{-y}$.

1.49. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$,

$xy + e^x - xy' = 0$ <=> $xy' - xy = e^x$ – ЛНЕР.

Відповідне ЛОР

$xy' - xy = 0$,

$dy - ydx = 0$ <=> $ln|y| - x = ln|C|$ <=> $y = Ce^x$,

$y = \varphi(x)e^x \to x[\varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x] - x\varphi(x)e^x = e^x$ <=>

$x\varphi'(x) = 1, \quad \varphi(x) = ln|x| + C$,

$y = [ln|x| + C]e^x$.

1.50. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

Це рівняння Бернуллі, яке має окремий розв'язок $y = 0$.

Загальний вигляд рівняння Бернуллі

$$a_0(x)y' + a(x)y = b(x)y^m.$$

Зводиться до ЛР заміною $z = y^{1-m}$.

Множимо задане рівняння на y^{-3}, одержуємо $xy^{-3}y' + 2y^{-2} + x^5e^x$. Робимо заміну $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$,

$\frac{xz'}{-2} + 2z + x^5e^x \;<=>\; xz' - 4z = 2x^5e^x$ –ЛНЕР.

Відповідне йому ЛОР

$xz' - 4z = 0$, $xdz - 4zdx = 0 \;<=>$

$ln|z| = 4ln|x| + ln|C| \;<=>\; z = Cx^4$, $z = \varphi(x)x^4$,

і тоді

$x[\varphi'(x)x^4 + 4x^3\varphi(x)] - 4\varphi(x)x^4 = 2x^5e^x, \quad \varphi'(x)x^5 = 2x^5e^x,$

$\varphi(x) = 2e^x + C, \quad z = [2e^x + C]x^4, \quad y^{-2} = [2e^x + C]x^4,$

$y^2[2e^x + C]x^4 = 1$, і ще $y = 0$.

1.51. $xydy = (y^2 + x)dx$.

$\frac{x}{2}d(y^2) = (y^2 + x)dx$, заміна $z = y^2$,

$xdz = 2(z + x)dx$ – є ЛР: $\quad xz' = 2z + 2x$,

але також є однорідним рівнянням $z' = 2(\frac{z}{x} + 1)$.

Заміна $\frac{z}{x} = u \;<=>\; z = ux$, $dz = udx + xdu$,

$udx + xdu = (2u + 2)dx$, $xdu = (u + 2)dx$,

$ln|u + 2| = ln|x| + ln|C|$, $u + 2 = Cx$ і $x = 0$,

$\frac{z}{x} + 2 = Cx$ і $x = 0$, $z = (Cx - 2)x$ і $x = 0$,

$y^2 = (Cx - 2)x \quad$ і $\quad x = 0$.

1.52. $dx + \left(2x - 2(1-y)x\sqrt{x}\right)dy = 0$. По-іншому

$\frac{dx}{dy} = 2x - 2(1-y)x\sqrt{x}$.

Це рівняння Бернуллі, яке має окремий розв'язок $x = 0$. Ділимо на $x\sqrt{x}$, одержуємо $\frac{x'}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2(1-y)$.

Заміна $z = x^{-1/2}$, тоді $z' = \frac{-1}{2}x^{-3/2}x'$ і одержуємо рівняння

$-2z' = 2z - 2 + 2y \ <=> \ -\frac{dz}{dy} = z + y - 1$.

Це вже ЛР, але його можна розв'язати швидше заміною

$u = z + y - 1$. Тоді $du = dz + dy$, $dz = du - dy$.

$-du + dy = udy \ <=> \ du = (1-u)dy \ <=>$

$-ln|u-1| = y - ln|C| \ <=> \ (u-1)e^y = C$,

$(z + y - 2)e^y = C$,

$\frac{1}{\sqrt{x}} + y = 2 + Ce^{-y} \quad$ і $\quad x = 0$.

Лабороторна робота 4.

Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Рівняння вигляду

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0, \quad (t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є диференціалом деякої функції $u(t,x)$:

$$du(t,x) = M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx.$$

Крім того,

$$du(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\,dx.$$

Звідси та з попередньої рівності одержуємо

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\,dx = M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx,$$

а за довільністю dt та dx,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t,x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t,x). \tag{2}$$

Рівняння (1) тепер можемо записати у вигляді

$$du(t,x) = 0,$$

його загальний розв'язок $u(t,x) = C$.

Теорема. *Нехай функції M, N, $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial t}$ неперервні у деякій зв'язній області Ω. Щоб рівняння (1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}, \quad (t,x) \in \Omega. \tag{3}$$

Приклади.

1.67. $(y\cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a\sin y + 2x^2y)dy = 0.$

Перевіримо, чи $\frac{\partial}{\partial y}(y\cos x + 2xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - a\sin y)$. Маємо $\cos x + 4xy = \cos x + 4xy$, тому рівняння є в повних диференціалах. Застосуємо метод групування:

$$y\cos x dx + 2xy^2 dx + \sin x dy - a\sin y dy + 2x^2 y dy = 0 \;<=>$$

$$y d(\sin x) + \sin x dy + 2xy(ydx + xdy) + d(a\cos y) = 0 \;<=>$$

$$d(y\sin x) + 2xyd(xy) + d(a\cos y) = 0 \;<=>$$

$$d(y\sin x) + d((xy)^2) + d(a\cos y) = 0 \;<=>$$

$$d(y\sin x + x^2y^2 + a\cos y) = 0 \;<=>\; y\sin x + x^2y^2 + a\cos y = C.$$

1.68. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$

$\frac{\partial}{\partial y}e^{-y} = -\frac{\partial}{\partial x}(2y + xe^{-y}) \;<=>\; -e^{-y} = -e^{-y}$ – рівняння є в повних диференціалах. Маємо

$$e^{-y}dx - 2ydy - xe^{-y}dy = 0 \;<=>$$

$$-d(y^2) + e^{-y}dx + xd(e^{-y}) = 0 \;<=>$$

$$d(-y^2) + d(xe^{-y}) = 0 \;<=>\; xe^{-y} - y^2 = C.$$

1.69. $3x^2(1 + lny)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy.$

$$\frac{\partial}{\partial y}[3x^2(1 + lny)] = \frac{\partial}{\partial x}[-(2y - \frac{x^3}{y})] <=> \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{y},$$

$$3x^2dx + 3x^2lnydx + x^3d(lny) - 2ydy = 0 \;<=>$$

$$d(x^3) + d(x^3lny) - d(y^2) = 0 \;<=>$$

$$x^3 + x^3lny - y^2 = C.$$

1.70. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2x}{y^3}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\Big) \ <=> \ -\frac{6x}{y^4} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Розв'яжемо це рівняння іншим методом. Запишемо систему вигляду (2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4};$$

із 1-го рівняння знаходимо

$$u(x,y) = \int(\frac{2x}{y^3})dx = \frac{2}{y^3}\int xdx + C(y) = \frac{x^2}{y^3} + C(y),$$

підставляємо в 2-ге рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^2}{y^3} + C(y)\Big) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \ <=> \ -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \ <=>$$

$C'(y) = \frac{1}{y^2}$, звідки $C(y) = -\frac{1}{y} + C_1$; $u = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$;

одержали розв'язок

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

1.71. $dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0, \ y(1) = 1.$

$\frac{\partial}{\partial y}(1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x + e^{-y}y^2)$; але це ЛР

$$\frac{dx}{dy} + x + e^{-y}y^2 = 0.$$

розв'яжемо його методом інтегрувального множника, $m = m(y)$:

$$m(y)dx + m(y)(x + e^{-y}y^2) = 0;$$

за теоремою має бути

$$m'(y) = \frac{\partial}{\partial x}[m(y)(x + e^{-y}y^2)] \ <=> \ m'(y) = m(y) \ <=>$$

$$\frac{dm}{dy} = m \ <=> \ \frac{dm}{m} = dy \ <=> \ m = Ce^y,$$

беремо $m = e^y$, тоді

$$e^y dx + e^y x dy + y^2 dy = 0 \ <=> \ d(xe^y) + \frac{1}{3}d(y^3) = 0,$$

$$xe^y + \frac{1}{3}y^3 = C.$$

1.72. $(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2})dy = \frac{y}{x^3}dx.$

$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{x^3}) \neq \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2})$, але помноживши на x^3, матимемо

$(y^3 - x)dy - ydx = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - x)$, $-1 = -1$;

отримали рівняння в повних диференціалах (x^3 є інтегрувальним множником для заданого рівняння). Знаходимо розв'язок

$$\frac{y^4}{4} - xy = C.$$

1.73. $y(1 - y\sin x)\cos^2 y dx - (y^2 + x\cos^2 y)dy = 0.$

$\frac{\partial}{\partial y}[y(1 - y\sin x)\cos^2 y] \neq \frac{\partial}{\partial x}[-(y^2 + x)]$;

підбираємо інтегрувальний множник; поділимо рівняння на $y\cos^2 y$:

$$(1 - y\sin x)dx - (\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y})dy = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 - y\sin x) \neq \frac{\partial}{\partial x}[-(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y})], \text{ бо } -\sin x \neq -\frac{1}{y},$$

нехай $m = m(y)$, тоді

$$m(y)(1 - y\sin x)dx - m(y)(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y})dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[m(y)(1 - y\sin x)] = \frac{\partial}{\partial x}[-m(y)(\frac{y}{\cos^2 y} + \frac{x}{y})],$$

$$m'(y)(1 - y\sin x) - m(y)\sin x = -\frac{m(y)}{y} \;<=>$$

$$m'(y)(1 - y\sin x) = m(y)(\sin x - \frac{1}{y}) \;<=>$$

$$m'(y)y(1 - y\sin x) = m(y)(y\sin x - 1) \;<=>$$

$$m'(y) = -\frac{m(y)}{y} \;<=>\; \frac{dm}{m} = -\frac{dy}{y},\; m = \frac{C}{y};$$

і при $C = 1$ маємо

$$(\frac{1}{y} - \sin x)dx - (\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2})dy = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y} - \sin x) = \frac{\partial}{\partial x}[-(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2})].$$

Отримали рівняння в повних диференціалах. Запишемо систему вигляду

(2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \sin x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2});$$

з першого рівняння знаходимо

$u = \frac{x}{y} + \cos x + C(y)$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{x}{y} + \cos x + C(y)] = -(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{x}{y^2}),$$

$$-\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{1}{\cos^2 y} - \frac{x}{y^2} \ \ <=>$$

$C'(y) = -\frac{1}{\cos^2 y} \ \ <=> \ \ C(y) = -tgy + C_1$. Отже,

$$u = \frac{x}{y} + \cos x - tgy + C_1,$$

а розв'язок має вигляд

$\frac{x}{y} + \cos x - tgy = C$ і ще $y = 0$, $\cos y = 0$.

Зауважимо, що вихідне рівняння має інтегрувальний ножник $\frac{1}{y^2 \cos^2(y)}$.

Зразок контрольної роботи.

Розв'язати рівняння:

1) $y' = (x+y)^3$,

2) $(2y - x^2)dx = 2ydy$,

3) $(3y^2x + x^3)\,dy + (y^3 + 3yx^2)\,dx = 0$,

4) $(x^2 - 3xy^2)\,dx + (6y^2 - 3x^2y)\,dy = 0$,

5) $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 6)\,dy = 0$,

6) $y' - y\sin x = y^2 \sin x$,

7) $e^y(1 + x^2)\,dy - 2x(1 + e^y)\,dx = 0$.

Література

1. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: підручник –2-ге вид., виправ. і доп. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2017, 372 с.