Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М. В. Заболоцький, І. А. Прокопишин

Вступ до фінансової математики

Конспект лекцій

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2022

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Фінансові відносини охоплюють практично усі сфери людської діяльності і є важливим чинником у розвитку людського суспільства. **Фінансова математика** – це галузь науки, яка займається розробкою та дослідженням математичних моделей фінансових відносин та систем у мікро- та макроекономіці, міжнародній сфері. У вузькому сенсі слова, фінансова математика вивчає кількісні методи аналізу фінансових угод та операцій.

Головна мета праці – простий, але достатньо строгий виклад основ фінансової математики – теорії процентів, фінансових потоків, цінних паперів з фіксованим доходом та стохастичного моделювання фінансових ризиків.

Конспект лекцій має шість розділів, і розрахований на 16 лекцій.

Перший розділ – вступний. У ньому розглянуто фінансову систему та її складові: фінанси, фінансові посередники та фінансовий ринок, окреслено поняття фінансового менеджменту та предмет фінансової математики.

У другому розділі викладено теорію процентів: гроші та їх вартість у часі, проценти, види процентних ставок, нарощення та дисконтування грошових сум.

У третьому розділі вивчено грошові потоки. Розглянуто еквівалентну вартість грошового потоку на деякий момент часу, теорію рент та її застосування у фінансовому аналізі. Зокрема детально розглянуто формування плану погашення кредиту, розрахунок лізингових та депозитних угод.

У четвертому розділі викладено методи оцінки ефективності інвестиційних проектів шляхом аналізу грошових потоків, передбачених за ними. Розглянуто основні показники ефективності інвестиційних проектів та їх застосування для порівняльного аналізу проектів.

У п’ятому розділі розглянуто питання про врахування інфляції у фінансових розрахунках. Дано поняття індексу споживчих цін та темпу інфляції, вивчено вплив інфляції на нарощення грошових сум.

У шостому розділі вивчено інвестиції в облігації. Розглянуто поняття дохідності облігації до погашення, часової структури процентних ставок, процентного ризику, показників дюрації та опуклості облігації, інвестицій у портфель облігацій, теорію імунізації.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується змістовними задачами з розв’язками. В кінці кожного розділу є вказівки до самостійної роботи і запитання для самоконтролю.

1. Фінансова система. Предмет фінансової математики

1.1. Фінанси та фінансова система

Термін "фінанси" має декілька значень. **Фінанси як фонди грошових коштів** – це гроші, цінні папери, матеріальні цінності тощо. **Фінанси як економічні відносини** – це специфічні економічні відносини, які пов'язані з створенням, наповненням, розподілом та використанням фондів грошових коштів. **Фінанси як сфера діяльності** – сфера економічної діяльності, пов'язана з раціональним використанням грошових капіталів.

Гроші – загальний еквівалент затрат людської праці, виконують функції міри благ та ресурсів, засобу обігу та нагромадження. З виникненням кредитних відносин гроші перетворилися у **капітал** – засіб для отримання додаткових прибутків. Практика кредитних відносин (надання грошей у борг за певну плату) існувала ще до нашої ери у Древній Греції (10–36 % річних).

Сучасні фінансові відносини нормуються законодавством, регламентуються державними та місцевими органами влади і складають в рамках держави цілісну систему – **фінансову систему держави**.

Фінансову систему України схематично показано на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Фінансова система України

Фінансова система об’єднує власне фінанси (фонди грошових коштів), фінансовий ринок як сукупність механізмів реалізації фінансових відносин, а також фінансових посередників – інституцій, що виконують спеціалізовані функції на фінансовому ринку.

Усі ***фонди грошових коштів*** можна поділити на фінанси суб’єктів господарювання та фізичних осіб, державні фінанси, міжнародні фінанси. Фінанси суб’єктів господарювання та фізичних осіб – це фінансові кошти приватних підприємств, товариств з обмеженою відповідальністю, акціонерних товариств та фізичних осіб. Державні фінанси містять зведений (консолідований) бюджет держави, фонди цільового призначення, державний сектор економіки, державний кредит, державне страхування. Міжнародні фінанси – це міжнародні рахунки, фінанси міжнародних організацій та міжнародних інституцій.

1.2. Правове регулювання та управління фінансовою системою

Правове поле фінансової діяльності визначають такі галузі права: фінансове (регламентує фінансову діяльність держави); податкове; банківське; страхове; адміністративне (регламентує відносини у сфері виконавчої влади); цивільне (регламентує майнові відносини та пов’язані з ними не майнові і суто особисті відносини).

Верховна Рада України, як єдиний орган законодавчої влади, ухвалює закони, у тім числі з фінансових питань; затверджує Державний бюджет України, вносить зміни до нього, проводить контроль за виконанням та приймає рішення щодо звіту про його виконання.

Рахункова палата Верховної Ради створена з метою проведення позавідомчого контролю за складанням і виконанням державного бюджету, вироблення й аналізу бюджетної політики держави, контролю у сфері державного кредиту і грошово-кредитної політики. Вона виконує роль експертного органу Верховної Ради України, готуючи відповідні висновки і рекомендації з питань фінансової діяльності органів управління. Рахункова палата також може проводити ревізійну роботу в різних ланках фінансової системи.

Президент України, як глава держави, створює у межах коштів, передбачених у Державному бюджеті України, для виконання своїх повноважень консультативні, дорадчі та інші допоміжні органи і служби; підписує закони, ухвалені Верховною Радою України; має право вето щодо цих законів із наступним поверненням їх на повторний розгляд Верховної Ради України.

Президент України призначає міністра фінансів (за поданням прем'єр-міністра) і звільняє його, подає кандидатуру голови Національного Банку України.

Кабінет Міністрів України, як вищий орган у системі органів виконавчої влади, забезпечує проведення фінансової, цінової, інвестиційної та податкової політики; політики у сферах праці і зайнятості населення, соціального захисту, освіти, науки і культури, охорони природи, екологічної безпеки і природокористування; організовує розроблення проекту закону про Державний бюджет України і забезпечує виконання затвердженого Верховною Радою України Державного бюджету України, надає Верховній Раді України звіт про його виконання.

Головну роль в управлінні фінансами виконує ***Міністерство фінансів***. Саме на нього покладено завдання загального керівництва всією фінансовою системою. Міністерство фінансів України має розгалужену регіональну структуру, яка включає Міністерство фінансів Республіки Крим, обласні та міські (м. Києва та Севастополя) фінансові управління, районні та міські (міст республіканського та обласного підпорядкування) фінансові відділи.

Регіональні фінансові органи мають систему подвійного підпорядкування. Вертикально вони підпорядковані відповідному фінансовому органу вищого рівня (наприклад, районні фінансові відділи – обласному фінансовому управлінню). Горизонтально фінансові органи підпорядковані місцевим органам державного управління, тобто входять до складу відповідних державних адміністрацій.

До складу Міністерства фінансів України належать два підрозділи: державна контрольно-ревізійна служба і державне казначейство.

Державна контрольно-ревізійна служба складається з Головного контрольно-ревізійного управління України, контрольно-ревізійних управлінь в областях, містах республіканського підпорядкування, контрольно-ревізійних підрозділів (відділів, груп) у районах, містах і районах у містах. Спеціалізується на проведенні фінансового контролю.

Державне казначейство створене з метою ефективного управління коштами Державного бюджету України, підвищення оперативності у фінансуванні видатків у межах наявних обсягів фінансових ресурсів у державному бюджеті.

Вагомі регулюючі, контрольні й обслуговуючі функції в галузі банківсько-кредитної діяльності виконує ***Національний банк України*** [9, 11]. Головною функцією Національного банку України є забезпечення стабільності національної грошової одиниці України – гривні. Для її виконання Національний банк виконує, зокрема, такі функції:

- визначає та проводить грошово-кредитну політику, монопольно здійснює емісію національної валюти України та організовує її обіг, є кредитором останньої інстанції для банків та організовує систему рефінансування;
- встановлює для банків правила проведення банківських операцій, бухгалтерського обліку і звітності, захисту інформації, коштів та майна;
- організовує створення та методологічно забезпечує систему грошово-кредитної і банківської статистичної інформації та статистики платіжного балансу;
- визначає систему, порядок і форми платежів, у тім числі між банками, визначає напрями розвитку сучасних електронних банківських технологій;
- створює, координує та контролює створення електронних платіжних засобів, платіжних систем, автоматизації банківської діяльності та засобів захисту банківської інформації;
- здійснює банківське регулювання та нагляд, веде Державний реєстр банків, проводить ліцензування банківської діяльності та операцій у передбачених законами випадках;
- складає платіжний баланс, проводить його аналіз та прогнозування;
- проводить відповідно до визначених спеціальним законом повноважень валютне регулювання, визначає порядок проведення операцій в іноземній валюті, організовує і здійснює валютний контроль за банками та іншими фінансовими установами, які

отримали ліцензію Національного банку України на здійснення валютних операцій;
- забезпечує накопичення та зберігання золотовалютних резервів і проведення операцій з ними та банківськими металами;
- представляє інтереси України в центральних банках інших держав, міжнародних банках та інших кредитних установах, де співробітництво відбувається на рівні центральних банків.

Національна комісія з цінних паперів та фондового ринку при президенті України (НКЦПФР) організовує функціонування ринку цінних паперів [24]. Вона проводить реєстрацію випуску цінних паперів та регулює їх обіг. Забезпечує формування інфраструктури ринку, видає ліцензії фінансовим посередникам, які виконують операції з цінними паперами. Комісія проводить контроль за діяльністю суб'єктів ринку цінних паперів – емітентів, інвесторів, фінансових посередників, фондових бірж – відповідно до чинного у цій сфері законодавства.

1.3. Фінансові посередники

Функції фінансових посередників виконують банківсько-кредитні установи, страхові компанії, пенсійні фонди, інвестиційні фонди та прямі фінансові посередники, до яких належать інвестиційні банки, іпотечні банки, фондові біржі, позабіржові системи, фінансові брокери та дилери.

Банківсько-кредитна система включає Національний банк України (НБУ), державні та комерційні банки, кредитні спілки. В Україні на 01.05.2021 р. ліцензію НБУ мали 73 банки (з них 33 – з іноземним капіталом) [23].

Відповідно до Закону України [12], **страхування** – це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів фізичних осіб та юридичних осіб у разі настання певних подій (страхових випадків), визначених договором страхування або чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати фізичними особами та юридичними особами страхових платежів (страхових внесків, страхових премій) та доходів від розміщення коштів цих фондів. Послуги зі страхування надають страховики – державні та недержавні **страхові компанії**, що функціонують відповідно до законодавства України.

Станом на 1 травня 2021 року на ринку страхування України було 173 компанії ризикового страхування (non-life) та 19 страхування життя (life) [23].

Державні та недержавні пенсійні фонди акумулюють страхові внески застрахованих осіб, що обліковуються на накопичувальних пенсійних рахунках та інвестуються з метою отримання інвестиційного доходу на користь застрахованих осіб. Активи пенсійних фондів використовують для оплати договорів страхування довічних пенсій або одноразових виплат застрахованим особам, а у випадках, передбачених чинним законодавством, членам їхніх сімей чи спадкоємцям та на інші цілі, передбачені чинним законодавством.

З 2004 р. в Україні розпочато впровадження пенсійної реформи, сутність якої полягає в переході до трирівневої пенсійної системи.

Перший рівень – це солідарна система загальнообов’язкового державного пенсійного страхування, в якій усі кошти, що перераховують підприємства та застраховані особи до Пенсійного фонду України, одразу ж виплачують нинішнім пенсіонерам.

Другий рівень – накопичувальна система загальнообов’язкового державного пенсійного страхування. Частина обов’язкових пенсійних відрахувань (до 7 % від заробітної плати працівника) буде спрямована на персональні рахунки громадян. Ці кошти будуть інвестувати в українську економіку, а інвестиційний дохід збільшуватиме розмір майбутніх пенсійних виплат. Передбачалось, що вона буде введена в дію 2012 р., однак, не введена до цього часу.

Третій рівень – система недержавного пенсійного забезпечення. В цій системі можуть брати участь добровільно як фізичні особи, так і юридичні – роботодавці.

На 30.09.2020 в Україні зареєстровано 63 недержавних пенсійні фонди (НПФ) та 22 адміністратори НПФ [23].

Прямі фінансові посередники на ринку цінних паперів виконують роль сполучної ланки між емітентами цінних паперів та інвесторами. З одного боку, за дорученням емітентів вони проводять випуск та розміщення цінних паперів на фінансовому ринку. З іншого, – вони проводять операції з купівлі цінних паперів на підставі угод з інвесторами.

Діяльність фінансових посередників засновується на їх інформованості та глибоких знаннях ринку цінних паперів.

Інвестиційні банки – спеціалізовані кредитні установи, що залучають довготерміновий позиковий капітал і надають його у розпорядження позичальникам (підприємцям і державі) через випуск облігацій та інших видів боргових зобов'язань. Головними функціями інвестиційного банку є з'ясування характеру і розміру фінансових потреб позичальників, узгодження умов позички, вибір виду цінних паперів, визначення термінів їх емісії та розміщення серед інвесторів. Інвестиційний банк є не просто посередником між інвестором і позичальником, а й гарантом емісії та організатором ринку.

Іпотечні банки – спеціалізовані фінансово-кредитні інститути, які надають довготермінові (на 25–30 років) кредити під заставу нерухомості (або для її придбання). Засобом залучення необхідних коштів для надання кредитів є випуск та продаж заставних листів (довготермінових цінних паперів) – боргових зобов'язань банку, тобто іпотечних кредитів (у тім числі гарантованих та привілейованих). Представник держави своїм підписом засвідчує наявність необхідної застави. Заставні листи іпотечний банк випускає різними купюрами для вільного продажу і продажу на фондових біржах.

Фондові біржі проводять операції з цінними паперами. Головне їх призначення – організація функціонування вторинного ринку. Однак, з одного боку, через біржі може відбуватись і первинне розміщення цінних паперів, а з іншого, і вторинний ринок може функціонувати поза біржами. З огляду на те, розрізняють біржовий і позабіржовий обіг цінних паперів.

Позабіржові торгові системи, на відміну від фондових бірж, не потребують складної реєстрації цінних паперів та учасників ринку і є високоавтоматизованими телекомунікаційними системи. Найвідомішою позабіржовою торговою системою є NASDAQ (абревіатура від англ. National Association of Securities Dealers Automated Quotation – Автоматизовані котирування Національної асоціації дилерів цінних паперів).

Організований позабіржовий ринок в Україні представляє торговельно-інформаційні система "Перша фондова торгівельна система" (ПФТС).

Важливі посередницькі функції на ринку цінних паперів виконують дилери та брокери. **Дилер** – фізична або юридична особа, що займається купівлею-продажом цінних паперів, валют, товарів і діє від свого імені і за свій рахунок. **Брокер** здійснює посередницькі функції при укладанні угод між продавцем і покупцем, за що отримує комісійні.

1.4. Фінансовий ринок

Фінансовий ринок – це сукупність обмінно-перерозподільних відносин, пов'язаних з процесами купівлі-продажу фінансових ресурсів, необхідних для проведення виробничої та фінансової діяльності. Відносини обміну пов'язані з переданням одним суб'єктом іншому за відповідну плату (проценти, дивіденди, дисконтні скидки тощо) права на тимчасове чи постійне використання фінансових ресурсів. Таке передання може відбуватись прямо чи через фінансових посередників (комерційні банки, інвестиційні фонди та ін.). За безпосередніх взаємовідносин операції з купівлі-продажу ресурсів відображають як відносини обміну (передання права використання), так і перерозподілу цих ресурсів між власником і користувачем.

Призначення фінансового ринку – забезпечити підприємствам належні умови для залучення необхідних коштів і продажу тимчасово вільних ресурсів. В організаційному плані фінансовий ринок – це сукупність ринкових фінансових інституцій, що супроводжують потік коштів від власників фінансових ресурсів до позичальників. Об'єктами відносин на фінансовому ринку є цінні папери, фінансові послуги, грошово-кредитні ресурси. Суб'єктами є держава, підприємства різних форм власності, окремі громадяни.

Фінансовий ринок виконує функції мобілізації тимчасово вільних фінансових ресурсів, розподілу акумульованих вільних коштів між кінцевими споживачами, прискорення обороту капіталу – активізації економічних процесів у державі, забезпечення умов для мінімізації фінансових ризиків.

За видами фінансових активів фінансовий ринок можна поділити на кредитний ринок, фондовий (ринок цінних паперів), страховий, валютний та ринок фінансових послуг (рис. 1.1).

Фондовий ринок є важливою складовою фінансового ринку, який охоплює частину кредитного ринку і повністю ринок інструментів власності. Інструментами забезпечення обороту фінансових ресурсів на фондовому ринку є цінні папери.

Цінним папером (ЦП) є документ установленої форми, що посвідчує грошове або інше майнове право, визначає взаємовідносини емітента цінного папера (особи, яка видала цінний папір) й особи, що має право на цінний папір, та передбачає виконання зобов’язань за таким цінним папером, а також можливість передання прав на цінний папір та прав за цінним папером іншим особам [14].

В Україні у цивільному обороті можуть бути такі групи цінних паперів:

1. Пайові цінні папери – цінні папери, які, зазвичай, посвідчують участь їх власника у статутному капіталі, надають власнику право на участь в управлінні емітентом і отримання частини прибутку, зокрема у вигляді дивідендів, та частини майна у разі ліквідації емітента. До пайових цінних паперів належать акції та сертифікати різних видів.

2. Боргові цінні папери – цінні папери, що посвідчують відносини позики і передбачають зобов’язання емітента або особи, яка видала борговий цінний папір, сплатити у визначений термін кошти, передати товари або надати послуги відповідно до зобов’язання. До боргових цінних паперів належать облігації різних емітентів, депозитні сертифікати, векселі.

3. Іпотечні цінні папери – цінні папери, випуск яких забезпечено іпотечним покриттям (іпотечним пулом) та які посвідчують право власників на отримання від емітента належних їм коштів. До іпотечних цінних паперів належать іпотечні облігації та сертифікати, заставні.

4. Приватизаційні цінні папери – цінні папери, які посвідчують право власника на безоплатне одержання у процесі приватизації частки майна державних підприємств, державного житлового фонду, земельного фонду.

5. Похідні цінні папери (деривативи) – цінні папери, механізм випуску та обігу яких пов’язаний з правом на придбання чи продаж протягом терміном, встановленого договором, цінних паперів, інших фінансових та (або) товарних ресурсів. Головними з них є ф'ючерси та опціони.

6. Товаророзпорядчі цінні папери – цінні папери, які надають їхньому держателю право розпоряджатися майном, вказаним у цих документах.

Організацію торгівлі на фондовому ринку здійснюють **фондові біржі**. Їхня діяльність полягає у створенні організаційних, технологічних, інформаційних, правових та інших умов для збирання та поширення інформації стосовно пропозицій цінних паперів та інших фінансових інструментів і попиту на них, проведенні регулярних біржових торгів цінними паперами та іншими фінансовими інструментами, централізованому укладанні договорів щодо цінних паперів та інших фінансових інструментів згідно з правилами, встановленими такою фондовою біржею, зареєстрованими у визначеному законом порядку. Діяльність з організації торгівлі на фондовому ринку може містити проведення клірингу та розрахунків за фінансовими інструментами, іншими, ніж цінні папери.

Як центр торгівлі цінними паперами, фондова біржа є індикатором ділової активності й проводить котирування акцій підприємств. Цим створюється система незалежної і досить об'єктивної оцінки діяльності акціонерних товариств. Тому бюлетені фондових бірж відіграють важливу роль у функціонуванні фінансової системи та економіки країни.

За даними Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку в Україні на 30.04.2021 зареєстровано 4 фондові біржі, розташовані в Києві та Дніпрі [24].

На 30.04.2021 у Львівській області функціонувало 47 банківських установ, з них 4 – з центральним офісом у Львові (Банк "Львів", Ідея Банк, Кредобанк, ОКСІ Банк). У регіоні працює більше 30-ти страхових компаній.

1.5. Фінансовий менеджмент та предмет фінансової математики

Фінансовий менеджмент (financial management), або управління фінансами, полягає в діях з фінансування бізнесу, придбання та управління фінансовими активами.

Управлінські рішення у фінансовій сфері на великих фірмах приймають фінансові директори, які, зазвичай, є віце-президентами фірм. Їм підпорядковані начальник фінансового управління та головний бухгалтер.

Фінансовий менеджмент вирішує три головні завдання: фінансування поточного бізнесу, інвестиційні рішення та управління активами. Фінансування бізнесу полягає у виборі джерел та структури фінансування поточної діяльності з метою раціонального залучення необхідних коштів. Інвестиційні рішення полягають у виборі обґрунтованого напряму розвитку бізнесу та його реалізації і є найважливішим з наведених завдань. Управління активами – це ефективне управління наявними ресурсами.

Міжнародні стандарти у галузі підготовки фінансових аналітиків визначає Інститут сертифікованих фінансових аналітиків (Інститут СФА) – Chartered Financial Analyst Institute (CFA Institute) – міжнародна асоціація професіоналів в галузі інвестицій [39]. Цей інститут організовує підготовку дипломованих фінансових аналітиків та інвестиційних менеджерів. Членом глобальної мережі товариств Інституту СФА є Українське товариство сертифікованих фінансових аналітиків (CFA Society Ukraine) [40].

Фінансові угоди та операції – основа фінансових відносин. Вони обов’язково мають кількісні характеристики:

– вартісні характеристики (розміри кредитів, платежів, зобов’язань тощо);
– процентні ставки;
– часові параметри (терміни кредитування, терміни платежів тощо);
– інші.

Фінансова математика, у вузькому сенсі, вивчає кількісні методи аналізу фінансових угод та операцій. У широкому, – це галузь науки, яка займається розробкою та дослідженням математичних моделей фінансових відносин та систем у мікро- та макроекономіці, міжнародній сфері.

Фінансова математика, відповідно до використовуваних методів, має два головні розділи: детермінована фінансова математика та стохастична фінансова математика.

Фінансова математика предметно та методологічно тісно переплітається зі страховою (актуарною) математикою, яка зародилася з розвитком страхової справи ще у XVII столітті. Історію страхової математики, предмет її досліджень та найпростіші математичні моделі розглянуто у розділах 7–10 посібника [8].

1.6. Математичне моделювання

Одним з ефективних підходів до опису економічних явищ, зокрема економічного ризику, є математичне моделювання.

Математична модель – це деяка математична задача, параметри якої описують бажані характеристики досліджуваного об’єкта (явища, процесу, системи тощо).

Математичне моделювання – це дослідження явищ, процесів чи систем (об’єктів) шляхом побудови і вивчення їх математичних моделей.

Основні етапи математичного моделювання ілюструє схема на Рис.1.1. На ній позначено:

О – реальний або абстрактний об’єкт;

ОМ – описова модель (фізична або емпірична модель);

ММ – математична модель;

ДМ – дискретна модель;

А – алгоритм;

П – програма;

Р – результат.

Помилка! Не можна створювати об'єкт із кодів полів редагування.

Рис. 1.2 Математичне моделювання з використанням числових методів

Математичне моделювання є цілісним циклічним процесом, який включає такі етапи:

1) побудова описової моделі засобами спеціальної науки;

2) побудова математичної моделі – формулювання математичної задачі та обґрунтування її коректності;
3) розв'язування математичної задачі, аналіз результатів і формулювання висновків;
4) перевірка адекватності моделі;
5) практичне застосування результатів.

Розв'язування багатьох складних математичних задач можливе лише числовими методами, що визначає важливе місце останніх у процесі математичного моделювання. Нижня дуга справа на рисунку відображає етапи розв'язування задач чисельними методами на комп'ютерах.

Основні методи кількісного аналізу ризику такі [3]:

– метод аналогій;
– аналіз чутливості (вразливості);
– аналіз методами імітаційного моделювання;
– аналіз ризику можливих збитків тощо.

Запитання

1. Які значення має термін "фінанси"?
2. Що таке гроші, коли вони перетворюються на капітал?
3. Які основні галузі права регламентують фінансову діяльність?
4. Які державні органи України здійснюють безпосереднє управління фінансовою системою?
5. Які функції виконує Національна комісія з цінних паперів та фондового ринку?
6. Які інституції виконують роль фінансових посередників?
7. Назвіть фінансових посередників на фінансовому ринку?
8. Чим відрізняються дилери від брокерів?
9. Що таке фінансовий ринок?
10. Що таке фондовий ринок?
11. Що таке цінні папери?
12. Що таке пайові цінні папери?

13. Що таке боргові цінні папери?
14. Що таке похідні ЦП?
15. Що таке фондові біржі?
16. Які головні завдання фінансового менеджменту?
17. Що вивчає фінансова математика?

2. Теорія процентів

2.1. Вартість грошей у часі, види процентних ставок

З виникненням кредитних відносин гроші перетворилися у капітал – засіб для отримання додаткових прибутків. Це призвело до нерівноцінності грошей у часі, зокрема до неправомірності сумування грошових сум, які стосуються різних моментів часу. Таке сумування допустиме у бухгалтерському обліку для фінансового контролю та підведення підсумків за періоди роботи.

Цей факт формулюють як **принцип зміни вартості грошей в часі** (time-value of money). Тому повинне існувати чітке привило, що визначає еквівалентність грошей в часі, однакове для всіх сторін, які беруть участь у фінансовій угоді.

Процентні гроші, або коротко **проценти** (interest), – це плата за надання грошових коштів у кредит у будь-якій його формі (отримання кредиту, продаж товару в кредит, депозитний вклад, облік векселя, торгівля облігаціями тощо).

Укладаючи контракт сторони (кредитор і позичальник) домовляються про суму, процентну ставку, терміни і розміри платежів.

Процентна ставка (rate of interest) – це відношення суми процентних грошей, виплачуваних за певний період (рік, місяць), до розміру кредиту (суми боргу).

Процес збільшення суми грошей через приєднання процентів називають нарощенням, нагромадженням або капіталізацією суми (боргу).

Розглянемо найпростішу кредитну угоду, коли кредитор надає кредит у сумі P, а позичальник зобов’язується повернути у термін T суму S.

Розрізняють два головні види процентних ставок:

– ставка нарощення (interest base rate), декурсивна або просто процентна ставка

$$i = \frac{S - P}{P}; \qquad (2.1)$$

– **облікова ставка процентів** (discount base rate), або дисконтна ставка

$$d = \frac{S - P}{S}. \qquad (2.2)$$

У першому випадку базою нарахування є початкова сума боргу P, а в другому – кінцева сума боргу S. У першому випадку позичальник отримує суму P, а повертає суму $S = P(1+i)$, у другому – отримує суму $P = S(1-d)$, а повертає суму S.

Якщо зафіксувати суму кредиту P, то за декурсивної процентної ставки для суми повернення S отримаємо величину

$$S = P(1+i), \qquad (2.3)$$

а за облікової ставки – величину

$$S = \frac{P}{1-d}. \qquad (2.4)$$

Легко бачити, що коли $d = i$, $0 < i < 1$, тоді $\frac{1}{1-i} > 1+i$. Тому декурсивна ставка є більш вигідною для позичальника, а дисконтна – для кредитора.

Приклад 2.1. Найпростіша кредитна угода

Клієнт просить в банку кредит у сумі 9 млн грн на рік. Яку суму повинен повернути клієнт в кінці терміну, якщо:

1) процентна ставка становить 10 %;

2) облікова ставка становить 10 %.

Розв'язування. Відповідно до формул (2.3), (2.4), у першому випадку отримаємо $S = 9 \times (1+0,1) = 9,9$ [млн грн], а в другому – $S = 9/(1-0,1) = 10,0$ [млн грн].

2.2. Нарощення за простими процентними ставками

Розглянемо кредитну угоду на n часових періодів. У фінансових розрахунках використовують два головні методи нарощення процентів – прості та складні проценти.

Проста ставка процентів (simple interest) використовує постійну базу для нарахування процентів за декілька періодів

$$S_n = P + iP + ... + iP = P(1+ni). \qquad (2.5)$$

Якщо база нарахування процентів змінюється, тобто проценти нараховують на проценти, то говорять про **нарахування процентів за складною процентною ставкою** (compound interest). Тоді нарощена за n часових періодів сума буде дорівнювати

$$S_n = P(1+i)(1+i)...(1+i) = P(1+i)^n. \qquad (2.6)$$

Прості проценти, зазвичай, застосовують для короткотермінових фінансових угод (терміном до року).

Термін користування грошима у роках можна виразити дробом

$$n = g/G, \qquad (2.7)$$

де g – кількість днів користування грошима; G – кількість днів у році, або часова база нарахування процентів (time basis).

При нарахуванні процентів застосовують дві часові бази: точну ($G = 365, 366$ днів) та наближену ($G = 360$ днів – 12 місяців по 30 днів) [34]. У першому випадку вживають термін точні проценти (exact interest), а в другому – звичайні або комерційні проценти (ordinary interest). Кількість днів користування грошима також можна підрахувати точно або наближено. У другому випадку приймають, що місяць має 30 днів, а рік, відповідно – 360. В обох випадках день отримання та повернення кредиту рахується як один день.

Для точного підрахунку терміну угоди зручно користуватися таблицею порядкових номерів днів у році (Додаток А). Тоді ця величина буде дорівнювати різниці порядкових номерів у році дня повернення та дня отримання кредиту.

Приклад 2.2. Розрахунок кількості днів користування грошима

Кредит надано 10.02, дата погашення – 08.09. Чому дорівнює наближена та точна кількість днів користування грошима – g_T та g_H ?

Розв'язування. У першому випадку знаходимо різницю $08.09 - 10.02 = -02.07$, тому $g_H = 7 \times 30 - 2 = 208$ [дн.]. За другим способом отримаємо: для 10.02 порядковий день в році – 41, а для 08.09 – 251, тому $g_T = 251 - 41 = 210$ [дн.] .

У практиці фінансово-банківських розрахунків поширені три основні способи нарахування простих процентів залежно від способу підрахунку кількості днів користування грошима g та кількості днів у році G. Детальніше див. [34].

1. Звичайні проценти з наближеним терміном угоди або німецький метод нарахування процентів. Для розрахунку терміну користування грошима у роках використовують наближені значення терміну угоди та кількості днів у році

$$n_H = g_H / 360 . \tag{2.8}$$

Цей метод застосовують у випадку, коли не потребують високої точності розрахунків. Поширений у комерційних банках Німеччини, Швеції, Данії. Умовно позначають як 360/360.

2. Комерційні проценти з точним терміном угоди або французький метод нарахування процентів. Для обчислення терміну користування грошима використовують точне значення терміну угоди та наближене значення кількості днів у році

$$n_K = g_T / 360 . \tag{2.9}$$

Цей метод ще називають банківським (Banker's Rule), умовно позначають, як 365/360 або АСТ/360. Поширений у Франції, Бельгії, Швейцарії.

3. Точні проценти з точним терміном угоди – англійський спосіб нарахування процентів. У цьому випадку використовують точні значення для терміну угоди та кількості днів у році (365 або 366 днів)

$$n_T = g_T / G_T . \tag{2.10}$$

Цей спосіб використовують центральні та комерційні банки багатьох країн, зокрема в Англії та США. У комерційних документах його позначають, як 365/365 або ACT/ ACT.

Приклад 2.3. Розрахунок короткотермінового кредиту

Кредит на суму 10000 грн отримано 04.03.2021, дата повернення 18.12.2021. Річна процентна ставка – 25 %. Знайдіть суму повернення використовуючи різні методики нарахування простих процентів.

Розв'язування. Відповідно до прийнятих позначень, сума кредиту $P = 10000$ [грн], дата отримання $t_1 = 04.03.2014$, дата погашення $t_2 = 18.12.2014$, процентна ставка $i = 25\ \%$.

Знайдемо порядкові номери днів видання та повернення кредиту у році за таблицею Додатку А: $d_1 = 63$, $d_2 = 352$, тому точний термін угоди дорівнює $g_T = d_2 - d_1 = 289$ [дн.]. Наближено отримаємо $g_H = 9 \times 30 + 14 = 284$ [дн.]. За формулами (2.8)–(2.10) терміни користування грошима у роках становлять: $n_H = 0{,}788889$, $n_K = 0{,}802778$, $n_T = 0{,}791781$. За формулою (2.5) одержуємо відповідні суми повернення: $S_H = 11972{,}22$ [грн], $S_K = 12006{,}94$ [грн], $S_T = 11979{,}45$ [грн].

Якщо термін кредитної угоди охоплює два суміжні календарні роки, то загальна сума нарахованих простих процентів дорівнює сумі процентів, отриманих за кожний рік

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i\,. \tag{2.11}$$

Коли процентні ставки змінюються в часі, то нарощена сума визначається як сума нарощених процентів за періоди зі сталою ставкою

$$I = P\sum_{k=1}^{m} n_k i_k\,, \tag{2.12}$$

де i_k – ставка простих процентів для періоду k; n_k – тривалість цього періоду.

Прості проценти з використанням дисконтної процентної ставки застосовують для обліку векселів. **Вексель** (promissory note, bill of credit) – це платіжне зобов'язання, за яким векселедавець зобов'язується виплатити векселетримачу визначену суму на зазначену дату. Банки можуть викупляти векселі до настання дати оплати.

Для розрахунку теперішньої вартості векселя застосовують формулу

$$P = S(1 - n_K d), \tag{2.13}$$

де d – облікова ставка; $n_K = g_T / G_H$ – термін до погашення у роках, розрахований комерційним методом з точним терміном угоди (2.10).

Облікова ставка НБУ – облікова ставка, яку використовує НБУ при рефінансуванні комерційних банків. Публікують на головній сторінці сайту НБУ [23], на 12.09.2012 становила 7,5 % річних, на 13.02.2015 – 19,5 % , а на 15.09.2015 – 27,0 % річних, на 30.05.2021 – 7,5 %. Облікова ставка є важливим індикатором економічної активності.

Приклад 2.4. Банківський облік векселів.

Вексель на суму 10 000 грн має дату погашення 26.12.2021. Приймаючи річну дисконтну ставку 20 %, знайдіть вартість векселя на 03.10.2021.

Розв'язування. Відповідно до прийнятих позначень $S = 10000$ [грн], $t_1 = 03.10.2021$, $t_2 = 26.12.2021$, дисконтна ставка $d = 20$ %.

Знаходимо порядкові номери днів у році: $d_1 = 276$, $d_2 = 360$. Тому $g_T = 360 - 276 = 84$ [дн.], $n_K = 84 / 360 \approx 0,233333$. За формулою (2.13) знаходимо $P = 9533,33$ [грн].

2.3. Нарощення та дисконтування за складними процентними ставками. Неперервні проценти

Якщо проценти не виплачувати після їх нарахування, а приєднувати до нарощуваної суми, то отримаємо формулу нарощення за складними процентами

$$S = P(1+i)^n, \tag{2.14}$$

де i – процентна ставка за період; n – кількість періодів.

Формулу (2.14) можна записати у більш загальній формі

$$P(t_2) = P(t_1)(1+i)^{t_2 - t_1} . \tag{2.15}$$

де $P(t_k)$ – грошова сума в момент часу t_k, $k = 1,2$; i – процентна ставка за одиницю часу.

Ця формула допускає випадок $t_2 < t_1$, тому її можна застосовувати як для нарощення, так і для дисконтування, тобто знаходження теперішньої вартості за майбутньою.

Ефективною процентною ставкою (effective rate) за період h згідно з угодою, що розпочалась у момент часу t, називають величину

$$i_h(t) = \frac{P(t+h) - P(t)}{P(t)}. \tag{2.16}$$

Номінальною процентною ставкою (nominal rate) за одиницю часу згідно з угодою на термін h, що розпочалась у момент часу t, називають величину

$$j_h(t) = \frac{P(t+h) - P(t)}{h\,P(t)} = \frac{i_h(t)}{h}. \tag{2.17}$$

Щоб зрозуміти відмінність між номінальною та реальною процентними ставками, розглянемо випадок нарахування процентів m раз на рік (щомісячне, щоквартальне).

Нехай i_h – ефективна процентна ставка за період $h = 1/m$ (який вимірюють у роках). Тоді за формулою (2.17) для номінальної процентної ставки j_h за одиницю часу (рік) згідно з угодою на термін h, отримаємо

$$j_h = m i_h. \tag{2.18}$$

У фінансових угодах, зазвичай, фіксують не ефективну ставку за період нарахування, а номінальну річну ставку $j_{1/m}$, одночасно вказуючи термін нарахування, наприклад, – "24 % річних з помісячним нарахуванням процентів". За складного нарощення процентів ефективна річна процентна ставка $i_{1;m}$ не буде дорівнювати номінальній річній процентній ставці $j_{1/m}$ за угодою на термін $h = 1/m$, її обчислюють за формулою

$$i_{1;m} = \left(1 + \frac{j_{1/m}}{m}\right)^m - 1. \tag{2.19}$$

Силою росту процентної ставки (force of interest) називають границю

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} j_h(t) . \qquad (2.20)$$

Ураховуючи означення номінальної процентної ставки (2.17), отримаємо

$$\delta(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} . \qquad (2.21)$$

Останнє співвідношення – це звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\ln P(t)) = \delta(t) , \qquad (2.22)$$

загальний розв’язок якого дорівнює

$$\ln P(t) = \int_0^t \delta(s)\, ds + C .$$

Задаючи початкову умову $P(0) = P_0$, отримаємо

$$P(t) = P_0 \exp\left(\int_0^t \delta(s) ds \right). \qquad (2.23)$$

Якщо $\delta(t) = \delta = const$, то

$$P(t) = P_0\, e^{\delta t} . \qquad (2.24)$$

Ефективна процентна ставка за період t за неперервного нарощення процентів дорівнює

$$i_{t;\infty} = e^{\delta t} - 1. \qquad (2.25)$$

Формули (2.23)–(2.24) називають формулами **неперервного нарощення процентів** (continuous compounding), а величину $\delta(t)$ – процентною ставкою за одиницю часу за неперервного нарощення процентів (або силою росту процентної ставки).

На практиці інтенсивність процентів установлюють рівній номінальній річній процентній ставці по кредитах "overnight money" – до наступного робочого дня, яку публікують на сайті НБУ [23]. На 30.05.2021 ця ставка становила 8,5 % для операцій у гривні (https://bank.gov.ua/ua/markets/interest-rates).

Порівняємо значення ефективної річної процентної ставки при нарахуванні процентів m раз на рік за формулою (2.19) та неперервному нарахуванні процентів за формулою (2.25). Для цього зафіксуємо декілька значень номінальної річної процентної ставки $j = j_{1/m}$ і будемо змінювати кількість періодів нарахування m.

Отримані результати подано у таблиці 2.1. В останньому стовпчику таблиці показано відносну похибку розрахунку ефективної річної процентної ставки за неперервного ($i_{1;\infty}$) і щоденного ($i_{1;365}$) нарахування процентів

$$\varepsilon = \frac{i_{1;\infty} - i_{1;365}}{i_{1;365}}. \tag{2.26}$$

Таблиця 2.1

Залежність ефективної річної процентної ставки від кількості періодів нарахування

Річна номінальна процентна ставка, j	Кількість періодів, m						Відносна похибка, ε
	1	2	4	12	365	∞	
0,05	0,05000	0,050625	0,050945	0,051162	0,051267	0,051271	0,000070
0,10	0,10000	0,102500	0,103813	0,104713	0,105156	0,105171	0,000144
0,20	0,20000	0,210000	0,215506	0,219391	0,221336	0,221403	0,000302
0,30	0,30000	0,322500	0,335469	0,344889	0,349692	0,349859	0,000475
0,40	0,40000	0,440000	0,464100	0,482126	0,491498	0,491825	0,000664
0,50	0,50000	0,562500	0,601807	0,632094	0,648157	0,648721	0,000869

Отож, навіть за номінальної річної процентної ставки рівної 50 %, ця похибка є меншою за 0,1 %. Це обґрунтовує згадане вище правило встановлення інтенсивності процентів при неперервному нарощенні процентів.

Запитання

1. Що таке декурсивна процентна ставка (ставка нарощення)?
2. Дайте означення облікової (дисконтної) ставки процентів.
3. Запишіть формулу нарощення процентів за декілька періодів за використання простої процентної ставки.
4. Запишіть формулу нарощення процентів за декілька періодів за використання складної процентної ставки.
5. Як розраховують кількість днів користування грошима?
6. Які є три головні способи нарахування простих процентів?
7. У чому полягає німецька методика нарахування простих процентів?
8. У чому полягає французька методика нарахування простих процентів?
9. У чому полягає англійська методика нарахування простих процентів?
10. Що таке вексель?
11. Як нараховують прості проценти, якщо угода охоплює два суміжні календарні роки?
12. Як нараховують прості проценти зі змінною процентною ставкою?
13. Запишіть формулу для розрахунку теперішньої вартості векселя.
14. Що таке облікова ставка НБУ?
15. Напишіть формули нарощення та дисконтування за складними процентами.
16. Дайте означення ефективної процентної ставки.
17. Що таке номінальна процентна ставка?
18. Дайте означення сили росту процентної ставки.
19. Запишіть загальну формулу для нарощеної суми за неперервного нарахування процентів.
20. Що таке кредит "overnight money"?

3. Фінансові потоки

3.1. Загальні положення

Фінансовий або грошовий потік (cash flows stream) – це розподілена в часі послідовність платежів. Суму окремого платежу називають **членом потоку** (cash flow).

Позначимо $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$ – моменти часу, у які проводять платежі, а $R_0, R_1, ..., R_n$ – відповідні їм грошові суми. Припустимо, що процентна ставка i за період є сталою.

Нагадаємо, що зв'язок між грошовими сумами у моменти часу t_1 та t_2 за використання складної процентної ставки визначають як

$$P(t_2) = P(t_1)(1+i)^{t_2 - t_1}. \tag{3.1}$$

Тому теперішня вартість (на момент часу $t = 0$) грошової суми $R(t)$, віднесеної до моменту часу t, дорівнюватиме

$$PV = P(0) = \frac{R(t)}{(1+i)^t} = R(t)(1+i)^{-t}. \tag{3.2}$$

Теперішньою вартістю (present value) грошового потоку називають величину

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{-t_k}, \tag{3.3}$$

а **майбутньою вартістю** (future value) грошового потоку – величину

$$FV = P(t_n) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{t_n - t_k}. \tag{3.4}$$

Вартість грошового потоку на момент часу $t \in (t_m, t_{m+1})$ отримаємо як суму нарощеного на цей час потоку $R_0, R_1, ..., R_m$ і дисконтованого потоку $R_{m+1}, R_{m+2}, ..., R_n$:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{m} R_k(1+i)^{t-t_k}+\sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k-t}}=\sum_{k=0}^{n} R_k(1+i)^{t-t_k}. \qquad (3.5)$$

Бачимо, що

$$P(t)=(1+i)^t P(0)=(1+i)^{t-t_n} P(t_n). \qquad (3.6)$$

3.2. Фінансові ренти

Якщо грошові платежі проводять через однакові проміжки часу, то такий потік називають регулярним грошовим потоком або **рентою** (rent). Часто вживають також термін **ануїтет** (annuity), хоча у прямому перекладі цей термін стосується лише потоків з щорічними виплатами.

Ренту описують такими параметрами:

1) період ренти (rent period) – часовий проміжок між окремими платами;
2) термін ренти (term) – час від початку ренти до кінця останнього періоду – n;
3) грошовий потік – $\{R_k,\ k=0,1,...,n\}$;
4) процентна ставка за період i, яку використовують при нарощенні чи дисконтуванні.

За окремими ознаками ренти поділяють на такі види:

– за величиною окремих плат ренти бувають **постійні і змінні**;
– за моментами виплат ренти поділяють на **ренти постнумерандо** (плати проводять в кінці періодів) та **ренти пренумерандо** (плати проводять на початку періодів);
– за збігом моментів нарощення процентів та виплат ренти поділяють на **прості**, коли моменти нарощення процентів та оплати збігаються, та **загальні**, коли вони різні;
– за термінами ренти розрізняють **обмежені** (зі скінченним терміном) та **вічні** або **нескінченні** (з нескінченним терміном).

При розгляді фінансових рент за одиницю часу зручно взяти період ренти. Тоді на основі формул (3.5)–(3.6) легко знайти еквівалентну вартість ренти на будь-який момент часу t:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n} R_k(1+i)^{t-k}=P(0)(1+i)^t=P(n)(1+i)^{t-n}. \qquad (3.7)$$

Розглянемо випадок простої постійної ренти, коли $R_k=R$, $k=0,1,2,...,n$. З попередньої рівності знайдемо

$$P(t)=(1+i)^t R\sum_{k=0}^{n}(1+i)^{-k}. \qquad (3.8)$$

Використавши формулу суми n членів геометричної прогресії

$$\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ \text{де}\ q=\frac{1}{1+i}<1,$$

отримаємо

$$P(t)=(1+i)^t R\left(1+\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right). \qquad (3.9)$$

Поширеним видом постійної ренти є рента постнумерандо, коли платежі проводять в кінці періодів: $R_0=0$, $R_k=R$, $k=1,2,...,n$. З попередньої формули легко визначити її вартість на момент часу t

$$P(t)=(1+i)^t R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.10)$$

Зокрема, при $t=0$

$$P(0)=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.11)$$

Часто вживають позначення

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=a_{\overline{n}|i}=a_{n;i}=PVIFA(i;n). \qquad (3.12)$$

Цей множник називають коефіцієнтом зведення звичайної ренти, англійською – Present Value Interest Factor of Annuity.

На основі формули (3.10) можна знайти вартість постійної ренти постнумерандо на момент часу $t=n$

$$P(n)=(1+i)^n\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)R=\frac{(1+i)^n-1}{i}R. \qquad (3.13)$$

Множник $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ позначають $s_{\overline{n}|i}$, $s_{n;i}$ або $FVIFA(i;n)$ і називають коефіцієнтом нарощення звичайної ренти, англійською – Future Value Interest Factor of Annuity.

Для ренти пренумерандо платежі проводять на початку періодів: $R_k=R$, $k=0,1,2,...,n-1$, $R_n=0$. Теперішня вартість цієї ренти становить

$$P(0)=R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.14)$$

У середовищі MS EXCEL передбачені спеціальні функції для фінансових обчислень [32, 38].

3.3. Застосування теорії рент у фінансовому аналізі

3.3.1. Погашення кредиту

Розглянемо застосування теорії рент до розробки плану погашення кредиту.

Нехай A – основна сума боргу (тіло кредиту); n – термін кредиту; R_k – розмір платежу в момент часу $t=k$, $k=1, 2, ..., n$; i – процентна ставка за період. Тоді отримаємо рівняння еквівалентності

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+i)^k}. \qquad (3.15)$$

Це рівняння з n невідомими, яке має багато варіантів схем платежів з погашення кредиту. Найбільшого поширення отримали такі схеми погашення:

1) повернення кредиту однаковими сумами (постійний ануїтет);
2) повернення кредиту однаковими сумами з основного боргу плюс проценти на залишок боргу (класична або стандартна схема);
3) повернення боргу довільними сумами.

У першому випадку рівняння еквівалентності має вигляд

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.16}$$

З нього за заданих величин A, i, n легко знайти шукану величину R

$$R = A\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{3.17}$$

За другою схемою розмір окремого платежу становить

$$R_k = \frac{A}{n} + \frac{A}{n}(n-k+1)i, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.18}$$

Легко показати, що у цьому випадку виконується рівність (3.15). Для цього потрібно скористатися тотожністю

$$n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1+(n-k+1)i}{(1+i)^k}. \tag{3.19}$$

За третьої схеми погашення виплати проводять довільними сумами з нарахуванням відсотків на залишок боргу.

План погашення кредиту зручно записувати у табличному вигляді (див. Приклад 3.2).

Приклад 3.1. Ануїтетна схема погашення боргу

Кредит у розмірі 20000 грн терміном на 5 років під ставку 10 % річних повертають однаковими сумами в кінці кожного року (ануїтет). Знайдіть розмір однієї плати.

Розв'язування

Відповідно до прийнятих позначень $A = 20000$ [грн], термін у роках $n = 5$, процентна ставка $i = 10$ %. Кредит амортизують постійною рентою постнумерандо, тому рівняння еквівалентності має вигляд $A = R(1-(1+i)^{-n})/i$. З нього знаходимо шукану величину $R = Ai/(1-(1+i)^{-n}) = 5275,95$ [грн].

Приклад 3.2. Класична схема погашення кредиту

Для кредиту у розмірі 20000 грн терміном на 5 років під ставку $i = 10$ % річних складіть план повернення використовуючи схему повернення рівними сумами по основному боргу плюс проценти (класична схема).

Розв'язування

Вхідні дані: $A = 20000$ [грн], термін у роках $n = 5$, процентна ставка $i = 10$ %. За такою схемою суму повернення в кінці k-го року розраховується за формулою (3.18) $R_k = A / n + Ai(n - k + 1) / n$.

План погашення кредиту подано у таблиці 3.1 (у грн).

Таблиця 3.1

Класична схема погашення кредиту

Рік	Сума боргу на початку року	Проценти	Сума боргу в кінці року	Плата в кінці року	Повернення основного боргу
1	20000,00	2000,00	22000,00	6000,00	4000,00
2	16000,00	1600,00	17600,00	5600,00	4000,00
3	12000,00	1200,00	13200,00	5200,00	4000,00
4	8000,00	800,00	8800,00	4800,00	4000,00
5	4000,00	400,00	4400,00	4400,00	4000,00

Зауважимо, що усі наведені схеми погашення кредиту є еквівалентними, якщо не брати до уваги інфляцію та інші обставини.

Приклад 3.3. Схема повернення боргу, вигідна для кредитора

Якщо кредит повертають однією платою в кінці терміну, тоді сума повернення дорівнює нарощеній сумі боргу

$$P(n) = A(1 + i)^n.$$

На основі цього можлива кредитна угода, коли оплата в кінці кожного періоду дорівнює нарощеній вартості боргу за весь час, розділеній на кількість періодів

$$R_k = A(1 + i)^n / n, \; k = 1, 2, \; ..., n. \qquad (3.20)$$

Така схема є вигідною для кредитора, оскільки він отримує нарощену кінцеву вартість боргу раніше. Це підтверджує нерівність

$$(1+i)^n / n > i / (1-(1+i)^{-n}) . \qquad (3.21)$$

Приклад 3.4. Порівняння схем кредитування

В автосалоні пропонують авто вартістю $20000 в кредит на 3 роки з першим внеском у $6000 та наступними щорічними платами у $6000.

Чи вигідний такий кредит, якщо клієнт може отримати кредит у банку під ставку 15 % річних?

Розв’язування

Клієнту потрібний кредит у банку на суму $14000. Якщо його погашати однаковими сумами (ануїтетна схема), то розмір виплат становитиме (Приклад 3.1): $R = \$6131{,}68$. Отже, кредит у автомагазині – вигідніший.

3.3.2. Розрахунок депозитів

Банківський вклад або депозит (savings account, deposit account) – це форма кредиту, коли вкладник надає банку в кредит грошові кошти з метою отримання доходу у формі процентів. Національний Банк України у своїй постанові [20] дає таке визначення депозиту: "Вклад (депозит) – це грошові кошти в готівковій або безготівковій формі у валюті України або в іноземній валюті або банківські метали, які банк прийняв від вкладника або які надійшли для вкладника на договірних засадах на визначений строк зберігання чи без зазначення такого строку (під процент або дохід в іншій формі) і підлягають виплаті вкладнику відповідно до законодавства України та умов договору".

Залежно від умов залучення розрізняють:

- ощадні депозити – без можливості поповнення і часткового зняття вкладу;
- накопичувальні депозити – з можливістю поповнення, але без можливості часткового зняття;
- універсальні – з можливістю поповнення і часткового зняття вкладу.

Банки України пропонують різноманітні депозити у гривнях, доларах США та євро, з капіталізацією процентів та без. Розмір процентів, зазвичай, більший для триваліших вкладів. З конкретними умовами можна ознайомитися на сайтах банків, зокрема [25, 27], де також можна знайти депозитні калькулятори для проведення обчислень.

Розглянемо нарощення суми на депозитному вкладі. Позначимо:

A_0 – сума депозиту;

n – термін угоди (місяці, квартали);

j – номінальна річна процентна ставка;

$i = j / m$ – ефективна процентна ставка за період (місяць, квартал);

R_t – поповнення вкладу у момент часу t, $t = 0,1,2,...,n$, $R_0 = 0$, $R_n = 0$;

A_{t-1} – база для нарахування процентів у момент часу t, $t = 1, 2, ..., n$;

I_t – проценти за період;

P_t – нарощена вартість депозиту на момент часу t, $t = 1, 2, ..., n$;

S_t – сумарна вартість депозиту на момент часу t, $t = 1, 2, ..., n$.

За використання простої процентної ставки для нарощення процентів база для нарощення буде змінюватися лише внаслідок поповнення вкладу, тому отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$S_t = P_t + R_t,\;\; P_t = S_{t-1} + I_t,\; I_t = A_{t-1} i,$$
$$A_t = A_{t-1} + R_{t-1},\;\; t = 1,2,...,n\;;\;\; S_0 = A_0. \qquad (3.22)$$

Для депозитної угоди з капіталізацією процентів база для нарахування процентів збігається з нарощеною сумою ($A_{t-1} = S_{t-1}$), тому

$$S_t = P_t + R_t,\;\; P_t = S_{t-1} + I_t,\; I_t = A_{t-1} i,$$
$$A_{t-1} = S_{t-1},\;\; t = 1,2,...,n\;;\;\; S_0 = A_0. \qquad (3.23)$$

Рекурентні обчислення за наведеними формулами зручно проводити за допомогою електронних таблиць.

Приклад 3.5. Розрахунок депозитного вкладу

Розмір депозиту становить 10000 грн, термін – 6 місяців, процентна ставка – 24 % річних, щомісячне поповнення – 1000 грн. Обчисліть загальну суму повернення, використовуючи для нарощення прості та складні проценти.

Розв'язування

Відповідно до введених позначень сума депозиту дорівнює $A_0 = 10000$ грн, термін депозиту $n = 6$, місячна процентна ставка $i = 2\%$, місячне поповнення $R = 1000$ грн. Результати обчислень, отримані за допомогою наведених рекурентних формул, подано у таблицях 3.2 та 3.3.

Таблиця 3.2

Розрахунок депозиту за простою процентною ставкою

Місяць	База для нарахування процентів	Процентна ставка за період	Проценти за період	Нарощена сума	Поповнення	Загальна сума
1	10000,00	0,02	200,00	10200,00	1000,00	11200,00
2	11000,00	0,02	220,00	11420,00	1000,00	12420,00
3	12000,00	0,02	240,00	12660,00	1000,00	13660,00
4	13000,00	0,02	260,00	13920,00	1000,00	14920,00
5	14000,00	0,02	280,00	15200,00	1000,00	16200,00
6	15000,00	0,02	300,00	16500,00	0,00	16500,00

Таблиця 3.3

Розрахунок депозиту з капіталізацією процентів

Місяць	База для нарахування процентів	Процентна ставка	Проценти за місяць	Нарощена сума	Поповнення	Загальна сума
1	10000,00	0,02	200,00	10200,00	1000,00	11200,00
2	11200,00	0,02	224,00	11424,00	1000,00	12424,00
3	12424,00	0,02	248,48	12672,48	1000,00	13672,48
4	13672,48	0,02	273,45	13945,93	1000,00	14945,93
5	14945,93	0,02	298,92	15244,85	1000,00	16244,85
6	16244,85	0,02	324,90	16569,75	0,00	16569,75

Сума повернення для простої угоди становить 16500,00 грн, а з капіталізацією процентів – 16569,75 грн.

3.3.3. Вічні (нескінченні) ренти

Ренти, грошові виплати яких не обмежені терміном, називають нескінченними (вічними). Приклад – послідовність періодичних виплат процентів на інвестований капітал.

Розглянемо нескінченну просту постійну ренту постнумерандо: $R_k = R$, $k = 1, 2, \ldots,$.

Теперішню вартість такої ренти знаходимо граничним переходом при $n \to \infty$ у виразі для теперішньої вартості такої ренти на термін n періодів

$$A = \lim_{n \to \infty} R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \qquad (3.24)$$

Тому термінова плата за такою рентою становить

$$R = Ai. \qquad (3.25)$$

Цю плату можна трактувати як проценти за період для депозиту (кредиту) у розмірі A з необмеженим терміном.

Приклад 3.6. Задача про мецената

Меценат хоче заснувати фонд допомоги університету, який би забезпечив в кінці кожного року суму 500 тис. грн. Гроші можуть бути інвестовані під процентну ставку 10 % річних. Яку потрібно суму грошей для заснування фонду?

Розв'язування

Вхідні дані: R = 500 [тис. грн], процентна ставка $i = 10\%$.

Фінансові потоки інвестиційного фонду моделюємо постійною нескінченною рентою постнумерандо. Рівняння еквівалентності запишеться так: $A = R / i$. З нього знаходимо шукану величину $A = 5000$ [тис. грн].

3.3.4. Фонд нагромадження

Цікавим прикладом застосування теорії рент є розрахунок фонду нагромадження, зокрема персонального пенсійного фонду.

Таблицю нагромадження легко скласти аналогічно таблиці повернення боргу. Для розрахунку необхідно скористатися рівнянням еквівалентності для грошових потоків.

Приклад 3.7. Розрахунок персонального пенсійного фонду

За 10 років до виходу на пенсію особа хоче створити персональний пенсійний фонд, який протягом десяти років після виходу на пенсію забезпечував би щорічну виплату у сумі 10 тис. грн. Яку суму потрібно відкладати щорічно на депозит з капіталізацією процентів, якщо річна процентна ставка становить 10 % ?

Розв'язування

Особа відкладає суму R на депозит протягом m років до виходу на пенсію, а після цього отримує суму W протягом n років. Прирівнюючи майбутню вартість нагромаджених коштів на момент виходу на пенсію та вартість виплат на цей час, отримаємо рівняння

$$R((1+i)^m - 1)/i = W(1-(1+i)^{-n})/i. \tag{3.26}$$

Звідси $R = W\dfrac{(1-(1+i)^{-n})}{(1+i)^m - 1} = 3855{,}43$ [тис. грн].

3.3.5. Лізинг

Лізинг можна розглядати як різновид довгострокового кредиту, що надається у майновій формі і погашення якого здійснюють у розстрочку. З іншого боку, його можна трактувати як довгострокову оренду з елементами кредитних відносин, оскільки повернення майна для нього не є обов'язковою умовою.

Загальні правові та економічні засади лізингу визначає закон України "Про фінансовий лізинг" [13]. Цей закон дає таке визначення лізингу: "За договором фінансового лізингу (далі – договір лізингу) лізингодавець зобов'язується набути у власність річ у продавця (постачальника) відповідно до встановлених лізингоодержувачем специфікацій та умов і передати її у користування лізингоодержувачу на визначений строк не менше одного року за встановлену плату (лізингові платежі)".

Відповідно до згаданого закону, суб'єктами лізингу можуть бути:

- лізингодавець – юридична особа, яка передає право володіння та користування предметом лізингу лізингоодержувачу;
- лізингоодержувач – фізична або юридична особа, яка отримує право володіння та користування предметом лізингу від лізингодавця;

– продавець (постачальник) – фізична або юридична особа, в якої лізингодавець набуває річ, яку згодом передадуть як предмет лізингу лізингоодержувачу;
– інші юридичні або фізичні особи, які є сторонами багатостороннього договору лізингу.

Типова лізингова угода, коли лізингодавцем є банк, має такий вигляд. На прохання клієнта банк купує майно (обладнання, транспортні засоби, обчислювальну техніку та інше) і бере на себе відповідальність за зберігання майна, внесення страхових платежів, сплату майнових податків тощо. Клієнт укладає з банком угоду про оренду, в якій, зокрема, визначають розмір та періодичність орендної плати. До складу лізингового платежу належать амортизаційні відрахування, плата за ресурси, проценти тощо. Лізингоодержувач може мати право викупу предмета лізингу по завершенню угоди.

Розрахунки лізингових платежів проводять на основі формули для теперішньої вартості ренти (3.7).

Розглянемо спрощений випадок, коли комісійні включені у початкову вартість предмета лізингу, а податки – не враховуються. Позначимо:

V – початкова вартість предмета лізингу;

n – термін угоди (місяці, квартали);

A_0 – авансовий платіж у момент часу $t = 0$;

V_t – залишкова вартість предмета лізингу на момент часу t, $t = 0,1,2,...,n$,

$V_0 = V - A_0$;

i – процентна ставка;

D_t – повернення основного боргу у момент часу t;

I_t – проценти за оренду;

$L_t = D_t + I_t$ – лізингові платежі у момент часу t.

Припустимо, що лізингові платежі проводять у кінці періодів. Тоді отримаємо таке рівняння еквівалентності

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{L_t}{(1+i)^t} + \frac{V_n}{(1+i)^n}. \quad (3.27)$$

Для ануїтетної схеми повернення, коли $L_t = L$, $t = 1, 2, ..., n$, за формулою (3.17) знайдемо

$$L = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\left(V_0 - \frac{V_n}{(1+i)^n}\right). \qquad (3.28)$$

Знаючи величину L та залишкову вартість на початок угоди $V_0 = V - A_0$, розмір процентів та амортизаційних виплат за період знаходимо за допомогою таких рекурентних співвідношень

$$I_t = V_{t-1}i\,,\;\; D_t = L - I_t\,,\;\; V_t = V_{t-1} - D_t\,,\; t = 1, 2, ..., n. \qquad (3.29)$$

Для стандартної схеми амортизаційні платежі залишаються однаковими впродовж усього терміну угоди

$$D_t = D\,,\; t = 1,\, 2,\, ...,\, n\;, \qquad (3.30)$$

тому

$$L_t = D + I_t\,,\; I_t = (V_0 - (t-1)D)i \;\; t = 1, 2, ..., n\;. \qquad (3.31)$$

Для визначення величини амортизації D скористаємося рівністю (3.27) і тотожністю (3.19), отримаємо рівняння

$$V_0 = nD + (V_0 - nD)(1-(1+i)^{-n}) + V_n(1+i)^{-n}\,,$$

з якого знайдемо

$$D = \frac{V_0 - V_n}{n}. \qquad (3.32)$$

Лізингові розрахунки зручно проводити за допомогою електронних таблиць. На сайтах банків та лізингових компаній є спеціальні лізингові калькулятори, які враховують специфіку пропонованих ними лізингових угод [14, 25, 30].

Приклад 3.8. Розрахунок лізингових платежів

Вартість устаткування становить 1000000 грн, термін лізингової угоди – півтора року, процентна ставка – 24 % річних. Передбачено авансовий платіж – 20 %, залишкова вартість устаткування – 20 %. Лізингові платежі проводять у кінці кварталів.

Розрахуйте лізингові платежі використовуючи ануїтетну та стандартну схеми.

Розв’язування

Відповідно до введених позначень, термін лізингу становить шість кварталів, $n = 6$. Залишкова вартість устаткування на початок угоди дорівнює $V_0 = V - A_0 = 800000$ грн, а на кінець угоди – $V_n = 200000$ грн, проценти за квартал – $i = 6\ \%$.

За формулою (3.28) знаходимо розмір щоквартального платежу для ануїтетної схеми $L = 134017{,}58$ грн. Обчислення інших величин за рекурентними формулами (3.29) легко виконати за допомогою електронних таблиць. Результати обчислень наведено у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Ануїтетна схема виплат за угодою лізингу

Квартал	Залишкова вартість на початок періоду	Амортизація за період	Проценти за період	Сума повернення в кінці періоду
1	800000,00	86017,58	48000,00	134017,58
2	713982,42	91178,63	42838,95	134017,58
3	622803,79	96649,35	37368,23	134017,58
4	526154,44	102448,31	31569,27	134017,58
5	423706,13	108595,21	25422,37	134017,58
6	315110,92	115110,92	18906,66	134017,58
7	200000,00			
Сума		600000,00	204105,46	804105,46

Таблиця 3.5

Стандартна схема виплат за угодою лізингу

Квартал	Залишкова вартість на початок періоду	Амортизація за період	Проценти за період	Сума повернення в кінці періоду
1	800000,00	100000,00	48000,00	148000,00
2	700000,00	100000,00	42000,00	142000,00
3	600000,00	100000,00	36000,00	136000,00
4	500000,00	100000,00	30000,00	130000,00
5	400000,00	100000,00	24000,00	124000,00
6	300000,00	100000,00	18000,00	118000,00
7	200000,00			
Сума		600000,00	198000,00	798000,00

Для стандартної схеми за формулою (3.32) амортизація за квартал дорівнює $D = 100000$ грн. Інші величини легко обчислюються за формулами (3.31). Отримані результати наведено у табл. 3.5.

Запитання

1. Що таке грошовий потік?
2. Дайте означення теперішньої вартості грошового потоку?
3. Що таке майбутня вартість грошового потоку?
4. Що таке ануїтет?
5. Яку ренту називають рентою постнумерандо?
6. Що таке рента пренумерандо?
7. Запишіть формулу для теперішньої вартості ренти постнумерандо.
8. Запишіть формулу для майбутньої вартості ренти постнумерандо.
9. Що таке $PVIFA(i;n)$?
10. Що таке $FVIFA(i;n)$?
11. Чим відрізняється загальна рента від простої?
12. Назвіть найбільш поширені схеми погашення кредиту.
13. Опишіть класичну схему погашення кредиту.
14. Опишіть ануїтетну схему погашення кредиту.
15. Як проводять розрахунок виплат за депозитом?
16. Що таке вічна рента?
17. Сформулюйте задачу про ануїтетну схему погашення боргу.
18. Сформулюйте задачу про розрахунок депозиту з капіталізацією процентів.
19. Сформулюйте задачу про формування фонду нагромадження.
20. Сформулюйте задачу про формування персонального пенсійного фонду.

4. Показники фінансової ефективності інвестиційних проектів

4.1. Основні показники ефективності інвестицій

Інвестиції – це вкладення грошових коштів (або інших цінностей, які мають грошову оцінку) для отримання доходів у майбутньому.

Реальні інвестиції передбачають вкладення грошових коштів у матеріальні ресурси: землю, нерухомість, устаткування. **Виробничі інвестиції** – один з видів реальних інвестицій, коли кошти вкладають у створення, реконструкцію чи реорганізацію виробничих підприємств.

Фінансові інвестиції – це вкладення коштів у фінансові цінні папери, документи, які надають право їх власникам на отримання доходу у майбутньому за певних умов. Розрізняють основні та похідні цінні папери. Основними цінними паперами є акції, облігації, депозити, векселі, а похідними – ф’ючерси, опціони, варранти тощо.

В основі оцінки інвестиційних проектів лежить оцінка грошових потоків, передбачених за цими проектами. Для урахування вартості грошей у часі дисконтування та нарощення грошових сум проводять, зазвичай, за методом складних процентів.

Позначимо:

n – тривалість інвестиційного проекту в часових періодах;

A_t – об’єм інвестицій у момент часу $0 \le t \le n$, $\mathbf{A} = (A_0, A_1, ..., A_n)$ – вектор інвестицій;

R_t – доходи від проекту в момент часу t,

$\mathbf{R} = (R_0, R_1, ..., R_n)$ – вектор доходів;

r – необхідна ставка доходу за проектом.

Схематично грошовий потік для інвестиційного проекту показано на рис. 4.1.

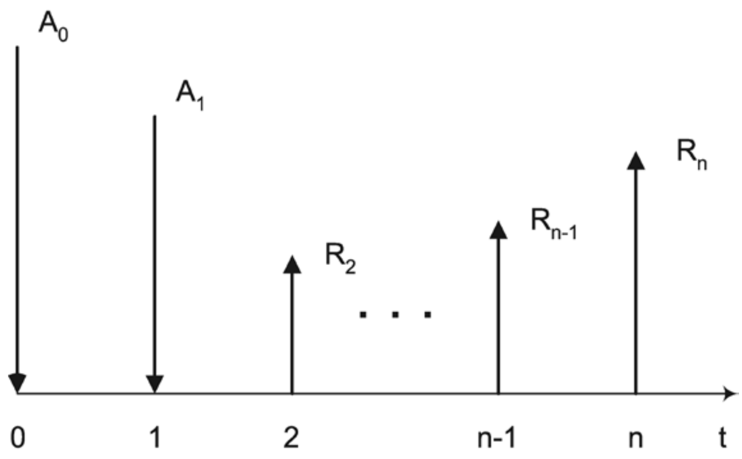

Рис. 4.1. Грошовий потік для інвестиційного проекту.

Проект класичного характеру – це проект, у якому грошовий потік змінює знак лише один раз, тобто видатки інвестора передують доходам від проекту.

Для оцінки проектів застосовують один або декілька показників, для більшості з яких реалізовані спеціальні функції у середовищі MS EXCEL.

Чистий дисконтний дохід (ЧДД), або **чиста теперішня вартість** (ЧТВ), англ. – Net present value (NPV), це – різниця між теперішньою вартістю доходів і теперішньою вартістю інвестованих коштів, тобто

$$NPV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = P(r,n,\mathbf{R}) - E(r,n,\mathbf{A}), \tag{4.1}$$

де

$$P(r,n,\mathbf{R}) = \sum_{t=0}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}, \quad E(r,n,\mathbf{A}) = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{(1+r)^t}. \tag{4.2}$$

Чистий дисконтний дохід характеризує можливий приріст (зменшення) капіталу інвестора внаслідок реалізації проекту. Якщо $NPV(r,n) > 0$, то інвестиційний проект є вигідним, інакше – збитковим.

У середовищі MS EXCEL передбачено функції ***NPV*** та ***PV***, які обчислюють теперішню вартість потоку платежів постнумерандо. Для розрахунку ЧТВ можна скористатись цими функціями, додаючи до отриманого значення платіж, проведений у початковий момент часу.

Чиста майбутня вартість (ЧМВ), англ. – Net Future value (NFV), це – чиста вартість доходу за проектом на момент часу $t = n$. Її обчислюють нарощенням суми ЧТВ на момент часу $t = n$

$$FV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = NPV(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R})(1+r)^n. \quad (4.3)$$

Показники ЧДД та МВ є абсолютними показниками, поряд з ними широко використовують такі відносні показники, як індекс дохідності та внутрішня норма дохідності.

Індекс дохідності (ІД), англ. – Profitability index (PI), це – відношення теперішньої вартості доходів до теперішньої вартості інвестицій

$$PI(r,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = \frac{P(r,n,\mathbf{R})}{E(r,n,\mathbf{A})}. \quad (4.4)$$

?

Внутрішня норма (ставка) дохідності (ВНД), англ. – Internal rate of return (IRR), це – процентна ставка r, за якої чиста теперішня вартість за проектом дорівнює нулю, тобто

$$NPV(IRR,n,\mathbf{A},\mathbf{R}) = 0. \quad (4.5)$$

Для інвестиційного проекту класичного характеру за умови $\sum_{t=0}^{n}(R_t - A_t) > 0$ рівняння (4.5) має єдиний позитивний розв'язок. Доведення цього факту можна знайти у роботі [18, с.60].

Чим більше значення ВНД, тим вища ефективність проекту. Нехай i – норма доходу за альтернативним проектом, якщо $IRR > i$, то вихідний проект порівняно з альтернативним є більш вигідним.

Для обчислення цієї величини в середовищі EXCEL передбачено функцію ***IRR***.

Дисконтний термін окупності, англ. – discounted payback period (DPP) – це найменший час, за який чиста теперішня вартість за проектом стане додатною:

$$n_0 \to \min_{\substack{m \in \mathbf{N}, \\ NPV(r,m,\mathbf{A},\mathbf{R})>0}} m. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що без урахування вартості грошей у часі показники чистого дисконтного доходу та дисконтного терміну окупності перетворюються у так звані "прості показники" – чистого доходу та терміну окупності.

Порівняння ефективності різних інвестиційних проектів здійснюють шляхом порівняння одного або декількох їхніх показників [1, 32, 33]. Якщо, при порівнянні за декількома показниками виникає протиріччя, то використовують додаткові міркування.

У фінансовому аналізі також застосовують модифіковані величини. **Модифікована чиста теперішня вартість** (NPV^*) передбачає реінвестування отриманих прибутків за деякою ставкою r^* до кінця дії проекту:

$$NPV^*(r, r^*, n, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{TV(r^*, n, \mathbf{R})}{(1+r)^n} - E(r, n, \mathbf{A}) \ , \tag{4.7}$$

де $TV(r^*, n, \mathbf{R}) = \sum_{t=0}^{n} R_t (1+r^*)^{n-t}$ – кінцева вартість проекту (terminal value) – вартість прибутків реінвестованих за ставкою r^* на кінець дії проекту.

Модифікована внутрішня ставка дохідності (Modified internal rate of return – MIRR) передбачає реінвестування прибутків за ставкою r^*, її визначають з умови

$$\frac{TV(r^*, n, \mathbf{R})}{(1+MIRR)^n} - E(r, n, \mathbf{A}) = 0, \tag{4.8}$$

тобто

$$MIRR = \left(\frac{TV(r^*, n, \mathbf{R})}{E(r, n, \mathbf{A})} \right)^{1/n} - 1. \tag{4.9}$$

Для розрахунку цієї величини в EXCEL передбачено функцію ***MIRR***. Величини r та r^* часто приймають рівними вартості капіталу фірми.

Розглянемо приклади застосування описаних показників.

4.2. Приклади розрахунку ефективності інвестицій

Приклад 4.1. Розрахунок ЧТВ

Бізнес-проект на три роки передбачає такий потік щорічних грошових сум (у млн грн): $R_0 = -10$, $R_1 = -6$, $R_2 = 14{,}4$, $R_3 = 17{,}28$. Чому дорівнює чиста теперішня вартість проекту (NPV) та індекс дохідності (PI), якщо необхідна річна процентна ставка становить 20 %?

Розв’язування

Знайдемо теперішню вартість доходу та теперішню вартість інвестицій:

$$P=\frac{14,4}{(1+0,2)^2}+\frac{17,28}{(1+0,2)^3}=20,\quad E=10+\frac{6}{1+0,2}=15.$$

Тому отримаємо: $NPV=P-E=5$ [млн грн], $PI=P/E=1,33$.

Приклад 4.2. Порівняння інвестиційних проектів

Інвестор хоче вибрати для реалізації один із двох бізнес-проектів. Перший з них розрахований на чотири роки і передбачає такий потік щорічних грошових сум (у млн грн): $R_0=-5$, $R_1=2$, $R_2=3$, $R_3=3$, $R_4=2$. Другий проект розрахований на п'ять років і, відповідно, передбачає грошовий потік: $R_0=-5$, $R_1=2$, $R_2=2$, $R_3=3$, $R_4=2$, $R_5=2$.

Порівняйте ці два проекти на основі показника NPV, задаючи необхідну річну процентну ставку рівною 20 %.

Розв'язування

Розрахуємо NPV для обох проектів за формулою (4.1): $NPV_1=1{,}459517$ [млн грн], $NPV_2=1{,}559928$ [млн грн]. За показником NPV другий проект є кращим.

Приклад 4.3. Порівняння інвестиційного проекту та депозиту

Бізнес-проект на три роки передбачає такий потік щорічних грошових сум: $R_0=-100$ тис. грн, $R_1=-100$ тис. грн, $R_2=121$ тис. грн, $R_3=121$ тис. грн.

Знайдіть внутрішню ставку дохідності (IRR) проекту. Чи вигідний цей проект порівняно з депозитом із капіталізацією процентів, якщо процентна ставка для депозиту становить 15 % річних?

Розв'язування

Показник IRR є розв'язком рівняння $\sum\limits_{k=0}^{n}R_k(1+i)^{-k}=0$. Позначимо $x=1/(1+i)>0$, тоді у нашому випадку отримаємо алгебричне рівняння $121x^3+121x^2-100x-100=0$, або $(x+1)(121x^2-100)=0$.

З останнього рівняння знаходимо додатний корінь $x = 11/10$, далі отримуємо $i = 0,1$.

Отже, IRR = 0,1. Порівняно з депозитом цей проект є невигідним.

Запитання

1. Що таке чиста теперішня вартість інвестиційного проекту?
2. Дайте означення чистої майбутньої вартості.
3. Назвіть англійський відповідник терміну "чиста теперішня вартість".
4. Дайте означення індексу дохідності.
5. Що таке внутрішня ставка дохідності?
6. Назвіть англійський відповідник терміну "внутрішня ставка дохідності".
7. Назвіть англійський відповідник терміну "індекс дохідності".
8. Як порівняти два інвестиційні проекти за показником чистої теперішньої вартості?
9. Як порівняти інвестиційні проекти за показником внутрішньої ставки доходності?
10. Дайте означення дисконтного терміну окупності.
11. Що таке модифікована чиста теперішня вартість?
12. За якого значення ставки реінвестування модифікована чиста теперішня вартість дорівнює чистій теперішній вартості?
13. Що таке кінцева вартість проекту?
14. Дайте означення модифікованої ставки дохідності.
15. Які показники ефективності інвестиційураховують можливе реінвестування?
16. Які показники ефективності інвестицій є абсолютними, а які – відносними?
17. Як порівнюють ефективність різних інвестиційних проектів?
18. Сформулюйте задачу про порівняння інвестиційного проекту та депозитного вкладу.
19. Сформулюйте задачу про порівняння двох інвестиційних проектів.
20. Сформулюйте задачу про розрахунок дисконтного терміну окупності інвестиційного проекту.

5. Урахування інфляції

5.1. Індекс споживчих цін

Будемо порівнювати стан економічної системи в моменти часу t_0 та t_1. Для спрощення, приймемо, що $t_0 = 0$ а $t_1 = 1$. Нехай споживчий кошик, який відображає стан економічної системи у ці моменти часу, складається відповідно з n_0 та n_1 товарів та послуг. Позначимо:

$Q_0 = (q_{10},..., q_{n0})^T$ – кількість товарів у кошику у момент часу t_0;

$Q_1 = (q_{11},..., q_{n1})^T$ – кількість товарів у кошику у момент часу t_1;

$P_0 = (p_{10},..., p_{n0})^T$ – ціни товарів у кошику у момент часу t_0;

$P_1 = (p_{11},..., p_{n1})^T$ – ціни товарів у кошику у момент часу t_1.

Не зменшуючи загальності, надалі будемо вважати, що $n_0 = n_1 = n$. Тоді вартість споживчого кошика у моменти часу t_0 та t_1 дорівнюватиме

$$W_0 = P_0^T Q_0 = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}, \quad W_1 = P_1^T Q_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}. \tag{5.1}$$

Запишемо відносну зміну ціни споживчого кошика у двох формах

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_0} = \frac{P_1^T Q_1}{P_1^T Q_0} \cdot \frac{P_1^T Q_0}{P_0^T Q_0} = \frac{P_0^T Q_1}{P_0^T Q_0} \cdot \frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_1}. \tag{5.2}$$

Перші множники, які відображають зміни у кошику, називають індексами об'єму товарів та послуг. Другі множники відображають зміни у цінах, їх називають індексами цін. Якщо за базовий момент часу вибирають момент часу t_0, то відповідні індекси називають індексами Ласпейреса (Etienne Laspeyres), в іншому випадку – індексами Пааше (Hermann Paasche).

Отже, індекси Ласпейреса та Пааше для цін, відповідно, дорівнюють:

$$L_{1/0}(P)=\frac{P_1^T Q_0}{P_0^T Q_0}, \quad \Pi_{1/0}(P)=\frac{P_1^T Q_1}{P_0^T Q_1}. \tag{5.3}$$

Аналогічно вводять індекси Ласпейреса та Пааше для об'єму товарів та послуг:

$$L_{1/0}(Q)=\frac{P_0^T Q_1}{P_0^T Q_0}, \quad \Pi_{1/0}(Q)=\frac{P_1^T Q_1}{P_1^T Q_0}. \tag{5.4}$$

З урахуванням уведених позначень, зміну вартості споживчого кошика (5.2) можна записати так

$$\frac{W_1}{W_0}=L_{1/0}(P)\Pi_{1/0}(Q)=\Pi_{1/0}(P)L_{1/0}(Q). \tag{5.5}$$

Індекс Ласпейреса для цін можна також записати як зважену суму елементарних змін у ціні, з вагою, яка відповідає долі товару чи послуги у вартості кошика в момент часу t_0:

$$L_{1/0}(P)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}\frac{p_{i1}}{p_{i0}}, \quad \alpha_{i0}=\frac{p_{i0}q_{i0}}{P_0^T Q_0}. \tag{5.6}$$

Зауважимо, що коли кошик не змінюється, то індекси Ласпейреса та Пааше для об'єму товарів та послуг дорівнюють одиниці, а для цін – збігаються. Індекс Ласпейреса для цін використовують для розрахунку індексу споживчих цін, а індекс Пааше для цін – для розрахунку дефлятора валового внутрішнього продукту (ВВП).

Аналогічно порівнюють стани економічної системи для різних моментів часу. Вибирають базовий момент часу $t_0=0$. Далі будують послідовність індексів цін, наприклад

$$I_t=L_{t/0}(P)=\frac{P_t^T Q_0}{P_0^T Q_0}, \quad t=0,1,\ldots\,. \tag{5.7}$$

Часто цей індекс визначають у відсотках, шляхом множення на 100.

Відносний індекс цін, який характеризує зміну цін між моментами часу t та $t+d$, буде визначатися таким відношенням

$$I_{t+d/t}=\frac{W_{t+d}}{W_t}=\frac{I_{t+d}}{I_t}. \tag{5.8}$$

Індекс споживчих цін або **індекс інфляції** (ІСЦ, англ. – Consumer Price Index, CPI) характеризує середній рівень цін на товари та послуги для населення, його обчислюють як відносний індекс цін (5.8) для споживчого кошика.

У таблиці 5.1 за даними Державної служби статистики [22] подано місячні та річні індекси інфляції в Україні за період з 2000 до 2018 року.

Темпом інфляції (inflation rate) за період $[t_{k-1}, t_k]$ називають відносний приріст ціни споживчого кошика за цей період:

$$h_k = \frac{W_k - W_{k-1}}{W_{k-1}} = I_{k/k-1} - 1. \tag{5.9}$$

Індекс інфляції за n періодів можна виразити через темпи інфляції так:

$$I_{n/0} = \frac{W_n}{W_0} = \frac{W_1}{W_0} \cdot \frac{W_2}{W_1} \cdot \ldots \cdot \frac{W_n}{W_{n-1}} = (1+h_1)\cdot(1+h_2)\cdot\ldots\cdot(1+h_n) = \prod_{k=1}^{n}(1+h_k)\,. \tag{5.10}$$

Таблиця 5.1

Місячні та річні індекси інфляції на Україні з 2000 по 2018 роки

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**За рік**
2000	104,6	103,3	102,0	101,7	102,1	103,7	99,9	100,0	102,6	101,4	100,4	101,6	**125,8**
2001	101,5	100,6	100,6	101,5	100,4	100,6	98,3	99,8	100,4	100,2	100,5	101,6	**106,1**
2002	101,0	98,6	99,3	101,4	99,7	98,2	98,5	99,8	100,2	100,7	100,7	101,4	**99,4**
2003	101,5	101,1	101,1	100,7	100,0	100,1	99,9	98,3	100,6	101,3	101,9	101,5	**108,2**
2004	101,4	100,4	100,4	100,7	100,7	100,7	100,0	99,9	101,3	102,2	101,6	102,4	**112,3**
2005	101,7	101,0	101,6	100,7	100,6	100,6	100,3	100,0	100,4	100,9	101,2	100,9	**110,3**
2006	101,2	101,8	99,7	99,6	100,5	100,1	100,9	100,0	102,0	102,6	101,8	100,9	**111,6**
2007	100,5	100,6	100,2	100,0	100,6	102,2	101,4	100,6	102,2	102,9	102,2	102,1	**116,6**
2008	102,9	102,7	103,8	103,1	101,3	100,8	99,5	99,9	101,1	101,7	101,5	102,1	**122,3**
2009	102,9	101,5	101,4	100,9	100,5	101,1	99,9	99,8	100,8	100,9	101,1	100,9	**112,3**
2010	101,8	101,9	100,9	99,7	99,4	99,6	99,8	101,2	102,9	100,5	100,3	100,8	**109,1**
2011	101,0	100,9	101,4	101,3	100,8	100,4	98,7	99,6	100,1	100,0	100,1	100,2	**104,6**
2012	100,2	100,2	100,3	100,0	99,7	99,7	99,8	99,7	100,1	100,0	99,9	100,2	**99,8**
2013	100,2	99,9	100,0	100,0	100,1	100,0	99,9	99,3	100,0	100,4	100,2	100,5	**100,5**
2014	100,2	100,6	102,2	103,3	103,8	101,0	100,4	100,8	102,9	102,4	101,9	103,0	**124,9**
2015	105,3	110,8	114	102,2	104.4	99	99,2	102,3	98,7	102	100,7	105,3	**143,3**
2016	99,6	101,0	103,5	100,1	99,8	99,9	99,7	101,8	102,8	101,8	100,9	99,6	**112,4**
2017	101,0	101,8	100,9	101,3	101,6	100,2	99,9	102,0	101,2	100,9	101,0	101,0	**113,7**
2018	100,9	101,1	100,8	100,0	100,0	99,3	100,0	101,9	101,7	101,4	100,8	100,9	**109,8**

Динаміку відносного індексу інфляції $I_{t/2000}$ (порівняно з 2000 роком) та річного темпу інфляції за період з 2000 до 2018 року ілюструють графіки на рис. 5.1.

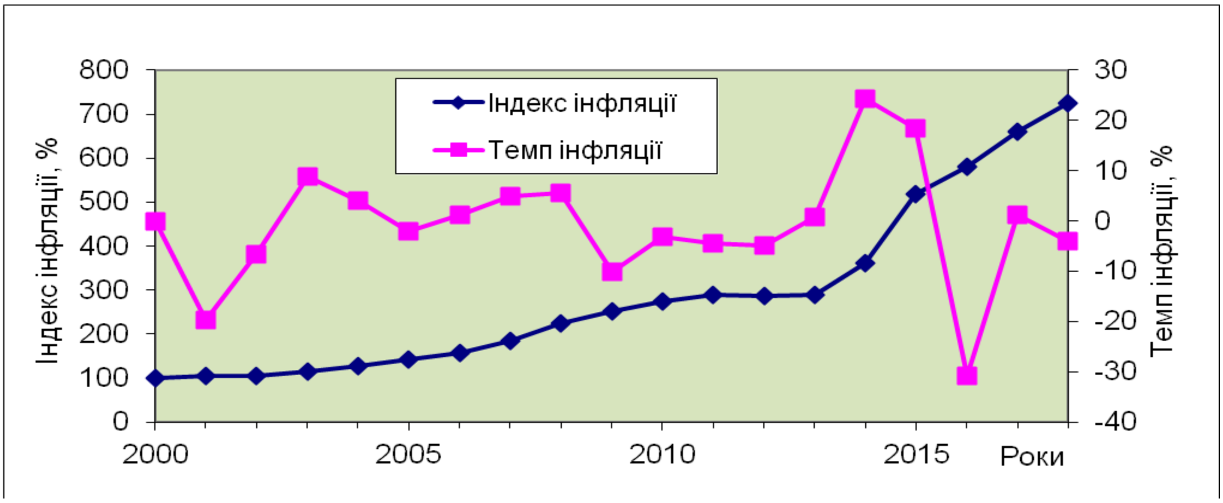

Рис. 5.1. Індекс інфляції $I_{t/2000}$ та річний темп інфляції в Україні

Подібно розраховують капіталізовані біржові фондові індекси, як відносну зміну вартості деякого кошика акцій, що котуються на біржі.

5.2. Урахування інфляції при нарощенні грошових сум

Нехай h_k – темп інфляції за період $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. **Індексом купівельної спроможності грошей** (purchasing power) за період називають величину, обернену до індексу інфляції за цей період

$$\frac{1}{I_{k/k-1}} = \frac{1}{1+h_k}. \tag{5.11}$$

Розглянемо нарощення реальної вартості грошової суми P за n періодів, припускаючи, що процентна ставка і темп інфляції – сталі:

$$P \to P\frac{1+i}{1+h} \to P\frac{(1+i)^2}{(1+h)^2} \to \dots \to P\frac{(1+i)^n}{(1+h)^n}.$$

Урахуємо, що

$$\frac{1+i}{1+h}=1+i-h-h(i-h)+\frac{h^2(i-h)}{1+h}\approx 1+i-h\,. \qquad (5.12)$$

Тоді реальна нарощена вартість буде дорівнювати

$$S'=P\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n\approx P(1+i-h)^n\,. \qquad (5.13)$$

Отже, у спрощених розрахунках реальної вартості грошової суми на деякий момент, у формулі нарощення потрібно від процентної ставки за період відняти темп інфляції.

Тепер розглянемо грошовий потік $R_0, R_1, \dots. R_n$. Припустимо, що за період $[t_{k-1}, t_k]$ процентна ставка дорівнює i_k, а темп інфляції становить h_k. Тоді майбутня реальна вартість грошового потоку (щодо нульового моменту часу) буде дорівнювати

$$\begin{aligned} S'_{n/0} &= \frac{1}{\prod_{m=1}^{n}(1+h_m)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}R_k\prod_{m=k+1}^{n}(1+i_m)+R_n\right)= \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R_k}{\prod_{m=1}^{k}(1+h_m)}\prod_{m=k+1}^{n}\frac{1+i_m}{1+h_m}+\frac{R_n}{\prod_{m=1}^{n}(1+h_m)}. \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Реальна вартість грошової суми R_k в момент часу t_k ($k=1, 2, \dots, n$) відносно нульового моменту часу дорівнює

$$R'_{k/0}=\frac{R_k}{\prod_{m=1}^{k}(1+h_m)}. \qquad (5.15)$$

Тому формулу (5.14) можна переписати так

$$S'_{n/0}=\sum_{k=0}^{n-1}R'_{k/0}\prod_{m=k+1}^{n}\frac{1+i_m}{1+h_m}+R'_{n/0}. \qquad (5.16)$$

Теперішня реальна вартість потоку $R_0, R_1, \dots. R_n$ дорівнює

$$S'_{0/0}=S_0=R_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{\prod_{m=1}^{k}(1+i_m)}=R_0+\sum_{k=1}^{n}R'_{k/0}\prod_{m=1}^{k}\frac{1+h_m}{1+i_m}\ . \qquad (5.17)$$

Для практичних розрахунків з урахуванням інфляції вводять поняття брутто-ставки i_n, яку ще називають номінальною процентною ставкою. Її отримують шляхом додавання до реальної ставки доходності i_r (також позначають r) інфляційної "премії", яку розраховують з умови повної компенсації інфляції за період

$$(1+i_n)/(1+h)=1+i_r\,. \qquad (5.18)$$

З останнього рівняння отримаємо

$$i_n=i_r+h+i_r h\approx i_r+h\,. \qquad (5.19)$$

На основі формул (5.13), (5.16), (5.17) стверджуємо, що для дисконтування та нарощення номінальних сум потрібно використовувати номінальну ставку процентів (брутто-ставку), а для аналогічного перерахунку реальних вартостей – реальну процентну ставку.

Запитання

1. Що таке споживчий кошик?
2. Що відображають індекси цін?
3. Дайте означення індекса Ласпейреса для цін.
4. Дайте означення індекса Пааше для цін.
5. Коли індекси Ласпейреса та Пааше співпадають?
6. Що таке індекс інфляції?
7. Дайте означення темпу інфляції.
8. Що таке індекс купівельної спроможності грошей?
9. Як розраховується реальна нарощена вартість?
10. Що таке брутто- та нетто-ставка процентів?
11. Як розраховують брутто-ставку процентів?
12. Сформулюйте задачу про розрахунок реальної вартості нарощеної суми.

6. Інвестиції в облігації

6.1. Внутрішня дохідність облігації

Облігація (bond) – цінний папір, який засвідчує факт надання грошового кредиту інвестором емітенту, забезпечує інвесторові право на отримання регулярних фіксованих дивідендних доходів, а при погашенні облігації – суми кредиту, яка здебільшого дорівнює номінальній вартості облігації.

Основні параметри облігації – **номінальна вартість** або сума погашення (par value, maturity [mə'ʧuərətı] value, face value), **дата погашення** (maturity date), **терміни і розміри платежів**. Регулярні процентні виплати за облігацією називають **купонами** (coupon).

З моменту емісії і до погашення облігації продають і купують на фондовому ринку. **Котирувальна** або **чиста ціна** облігації (clean price) встановлюється на біржі відразу після виплати чергового купона і може дорівнювати її номіналу, бути вищою або нижчою за номінал. **Повна** або "брудна" ціна облігації (dirty price) дорівнює чистій ціні плюс **нарощений купонний дохід – НКД** (accrued interest).

Облігації розрізняють за емітентом, ступенем забезпеченості, розміром купона, терміном обігу тощо. Облігації за своєю суттю є борговими цінними паперами, їх види регламентує Закон України "Про цінні папери та фондовий ринок" [14].

Позначимо:

N – номінал облігації;

d_0 – дата випуску облігації у форматі D.M.Y (день.місяць.рік);

$d_1,..., d_n$ – дати купонних виплат у форматі D.M.Y (день.місяць.рік),

d – дата купівлі облігації;

$t_0, t_1, ...t_n,\ t$ – відповідні часові моменти у роках;

$C_i = N\dfrac{f_i}{m}$ – розмір купонної виплати у момент часу d_i (t_i), $i = 1, 2, \ldots, n$;

f_i – річна купонна ставка для купонного періоду (d_{i-1}, d_i);

m – кількість купонних виплат на рік;

N_i – розмір амортизаційної виплати у момент d_i (t_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, найчастіше $N_i = 0$, $i \neq n$, $N_n = N$;

P_c – котирувальна (чиста) ціна облігації;

A – нарощений купонний дохід;

$TP = P = P_c + A$ – повна вартість облігації;

$P_{fair}(t) = P_f(t)$ – справедлива ціна облігації;

r – ефективна дохідність до погашення.

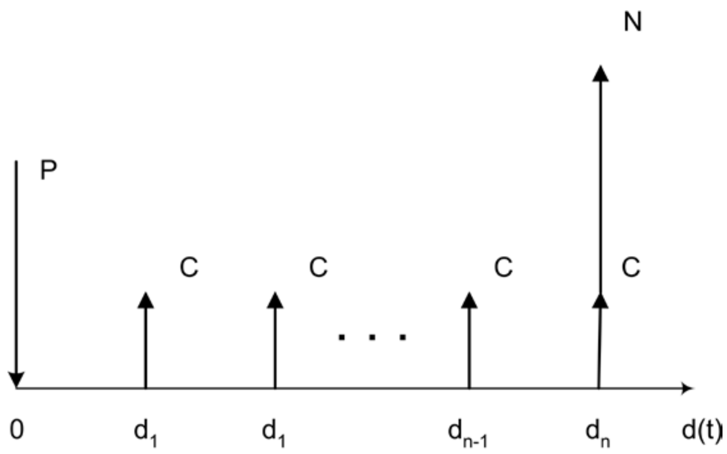

Рис. 6.1. Стандартні виплати за облігацією

Розглянемо типовий випуск єврооблігації з параметрами:

номінал	N = \$1000
термін	T = 5 років
дата випуску	d_0 = 24.10.2017
кількість виплат на рік	m = 2
номінальна річна купонна ставка	f = 8,00%
дата виплати першого купона	d_1 = 25.04.2018
кількість купонних періодів	n = 10
дата купівлі облігації	d = 23.04.2018

План погашення цієї облігації показано у наступній таблиці.

Номер купонного періоду	Початок	Кінець	Купон, річних, у % до номіналу	Погашення номіналу, %	Час, у роках кінця періоду	Купонна виплата, у % до номіналу	Загальна виплата, у % до номіналу
1	24.10.2017	25.04.2018	0,08		0,5028	0,04	0,04
2	25.04.2018	24.10.2018	0,08		1,0000	0,04	0,04
3	24.10.2018	25.04.2019	0,08		1,5028	0,04	0,04
4	25.04.2019	24.10.2019	0,08		2,0000	0,04	0,04
5	24.10.2019	25.04.2020	0,08		2,5028	0,04	0,04
6	25.04.2020	24.10.2020	0,08		3,0000	0,04	0,04
7	24.10.2020	25.04.2021	0,08		3,5028	0,04	0,04
8	25.04.2021	24.10.2021	0,08		4,0000	0,04	0,04
9	24.10.2021	25.04.2022	0,08		4,5028	0,04	0,04
10	25.04.2022	24.10.2022	0,08	100,00%	5,0000	0,04	1,04

Насамперед, розглянемо метод визначення кількості днів між датами, який застосовують при розрахунках єврооблігацій [34].

Нехай $d_1 = D1.M1.Y1$, $d_2 = D2.M2.Y2$. У методах 30/360 кількість днів обчислюють за формулою:

$$d_2 - d_1 = 360(Y2 - Y1) + 30(M2 - M1) + (D2 - D1), \qquad (6.1)$$

з деякими уточненнями величин $D1$ та $D2$ для довгих місяців та лютого. Зокрема, у **методі 30E/360** для єврооблігацій встановлена корекція: якщо *D1 = 31*, тоді покладають *D1:= 30,* і аналогічно, якщо *D2 = 31*, тоді – *D2:= 30*.

Відповідний відрізок у роках обчислюють так:

$$t_2 - t_1 = (d_2 - d_1) / 360. \qquad (6.2)$$

Нехай d дата купівлі облігації $d \in [d_{s-1}, d_s)$, а $t \in [t_{s-1}, t_s)$ – відповідний момент часу у роках. **Котирувальну або чисту ціну** облігації – $P_c(t)$, встановлюють на біржі відразу після виплати чергового купона – в момент часу t_{s-1}:

$$P_c(t) = P_c(t_{s-1}), \quad t_{s-1} \le t < t_s.$$

Нарощений купонний дохід (НКД) обчислюють за формулою:

$$A(t) = \frac{t - t_{s-1}}{t_s - t_{s-1}}(C_s + N_s), \quad t_{s-1} \le t < t_s. \qquad (6.3)$$

Повна (брудна) ціна облігації на час $t \in [t_{s-1}, t_s)$ складає

$$TP(t) = P(t) = P_c(t) + A(t). \tag{6.4}$$

Ефективну річну дохідність до погашення на час t (yield to maturity) знаходять як розв'язок відносно r рівняння

$$TP(t) = \sum_{k=s}^{n} \frac{C_k + N_k}{(1+r)^{t_k - t}}, \qquad t_{s-1} \le t < t_s. \tag{6.5}$$

а **номінальну річну дохідність** r_{nom} отримують з співвідношення

$$\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m = 1 + r. \tag{6.6}$$

Ефективна річна дохідність до погашення на час t це – ефективна річна процентна ставка r, за якої вартість потоку платежів за облігацією на цей час дорівнює ринковій вартості облігації. Фактично цей показник дорівнює внутрішній ставці дохідності (IRR) для інвестиції в облігацію (п. 4).

З іншого боку, якщо спот-ставка, яка визначає криву дохідності, стала і дорівнює r , то права частина рівності (5) визначає **справедливу ціну облігації** P_{fair} на момент часу t:

$$P_{fair}(t) = P_f(t) = \sum_{k=s}^{n} \frac{C_k + N_k}{(1+r)^{t_k - t}}, \ t_{s-1} \le t < t_s. \tag{6.7}$$

Дохідність облігації до погашення має наступні основні властивості.

1. За відсутності арбітражу ставка внутрішньої дохідності облігації приблизно дорівнює ринковій процентній ставці для інвестицій в альтернативні фінансові інструменти з такою ж мірою ризику.

2. Річна внутрішня дохідність облігації – це ефективна середня річна ставка дохідності, яку отримує інвестор, за таких умов:

а) інвестор володіє облігацією до моменту її погашення $t = t_n$;

б) усі доходи від облігації реінвестують за ставкою, яка дорівнює внутрішній дохідності облігації r в момент її купівлі.

Умови а) та б) пояснюють другу назву ставки дохідності – дохідність до погашення.

Нагадаємо (п. 4), що кінцевою вартістю проекту (terminal value) називають вартість прибутків реінвестованих за ставкою r^* на кінець дії проекту. Для інвестицій в облігацію ця величина дорівнює

$$TV = \sum_{i=1}^{n}(C_i + N_i)(1+r^*)^{t_n - t_i} . \qquad (6.8)$$

Ефективну середню процентну ставку $\overline{r}$ знаходять з рівняння

$$(1+\overline{r})^{t_n}\ P(t_0) = TV . \qquad (6.9)$$

Якщо ставка реінвестування дорівнює внутрішній ставці дохідності $r^* = r$, тоді

$$TV = \sum_{i=1}^{n}(C_i + N_i)(1+r)^{t_n - t_i} . \qquad (6.10)$$

З урахуванням виразу (6.4) отримаємо $\overline{r} = r$.

6.2. Крива дохідності

На ринку одночасно є облігації, до погашення яких залишається різний час. Залежність дохідності облігації одного класу ризику від терміну до погашення називають кривою доходності (yield curve).

Облігацію називають **чисто дисконтною** або **облігацією з нульовим купоном** (zero-coupon bond), якщо за нею проводять лише одну виплату у момент погашення.

Внутрішню дохідність чисто дисконтної облігації терміном на t років називають річною **процентною ставкою спот** (spot rate) для інвестування на t років. Залежність дохідності облігацій з нульовим купоном від часу називають **кривою дохідності спот** (spot rate curve).

Нехай t – термін до погашення чисто дисконтної облігації; $P(t)$ – сума, що виплачується по облігації; $P = P(0)$ – ринкова ціна облігації у момент $t = 0$; $r(t)$ – внутрішня дохідність облігації. Тоді згідно з означенням внутрішньої дохідності (6.1) виконується рівність

$$P(0) = \frac{P(t)}{\left(1 + r(t)\right)^{t}} . \qquad (6.11)$$

Звідси отримуємо річну спот-ставку для інвестицій на t років

$$r(t) = \left(\frac{P(t)}{P(0)} \right)^{1/t} - 1 . \qquad (6.12)$$

Набір процентних ставок спот $r(t_1), ..., r(t_n)$ для інвестицій, відповідно, на $t_1, ..., t_n$ років називають **часовою структурою процентних ставок** (term structure of interest rates).

Покажемо, як з використанням кривої дохідності спот можна оцінити теперішню вартість деякої облігації.

Нехай облігація B має потік платежів $C_1, ..., C_n$. Розглянемо чисто дисконтні облігації $B_1, ..., B_n$ того ж класу ризику з термінами до погашення $t_1, ..., t_n$ та поверненнями $F_1, ..., F_n$ – відповідно.

Припустимо, що виконуються умови:

1) відомі процентні ставки спот $r(t_1), ..., r(t_n)$ для інвестицій, відповідно, на $t_1, ..., t_n$ років;

2) чисто дисконтні облігації $B_1, ..., B_n$ можна купити на ринку в довільній кількості без транзакційних витрат.

Складемо еквівалентний портфель з чисто дисконтних облігацій.

Платіж C_i за облігацією B у момент часу t_i замінимо платежем за дисконтною облігацією B_i. Оскільки платіж за однією облігацією B_i дорівнює F_i, то у нашому портфелі буде C_i / F_i облігацій B_i.

Теперішня вартість дисконтної облігації B_i дорівнює

$$P_i = \frac{F_i}{(1 + r(t_i))^{t_i}} , \qquad (6.13)$$

тому теперішня вартість портфеля становить

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{C_i}{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1 + r(t_i))^{t_i}} . \qquad (6.14)$$

Отже, ми отримали "справедливу" вартість облігації B у початковий момент часу. За відсутності арбітражу ринкова ціна облігації B буде близькою до отриманої оцінки.

Особливе значення мають державні облігації, які не мають кредитного ризику. Побудовані на їх основі криві доходності спот є еталоном для оцінки облігацій та інших інструментів на ринку.

Якщо відома ціна P облігації з терміном до погашення t_n років, а також процентні ставки спот на терміни $t_1,..., t_{n-1}$ років, тоді легко розрахувати спот-ставку на термін t_n років. Для цього перепишемо вираз (6.14) так:

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r(t_i))^{t_i}} + \frac{C_n}{(1+r(t_n))^{t_n}}. \tag{6.15}$$

Необхідну спот-ставку $r(t_n)$ однозначно визначаємо з цього рівняння.

Таким способом можна послідовно знайти теоретичні спот-ставки на довші періоди. Цей метод знаходження кривої доходності спот називають процедурою "бутстрепа", або бутстрепінгом (bootstrapping).

Опишемо більш загальний метод знаходження часової структури процентних ставок за даними ринку облігацій.

Припустимо, що на ринку є m видів облігацій, ціни на які, відповідно, дорівнюють $P^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$. Дохід від облігації k-го виду в момент часу t_i позначимо $C_i^{(k)}$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що термін до погашення усіх облігацій дорівнює t_n. Теперішню вартість цих облігацій оцінюємо за формулою (6.14)

$$P^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^{(k)}}{(1+r(t_i))^{t_i}}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{6.16}$$

Дисконтний множник для моменту часу t_i позначимо x_i:

$$x_i = \frac{1}{(1+r(t_i))^{t_i}}. \tag{6.17}$$

Тоді якщо $m > n$, то отримаємо перевизначену систему рівнянь

$$P^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(k)} x_i \ , \tag{6.18}$$

яку перепишемо у загальному вигляді так:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{6.19}$$

де $a_{kj} = C_j^{(k)}$, $b_k = P^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

Для розв'язування перевизначеної системи рівнянь (6.19) застосуємо метод найменших квадратів, замінюючи вихідну систему рівнянь такою системою:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{6.20}$$

Якщо ранг перевизначеної системи дорівнює n, то матриця $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ – додатно визначена [31, с.473], і розв'язок системи (6.20) існує та єдиний.

Криву дохідностей, отриману для облігацій, що не мають кредитного ризику, використовують для оцінки ризикових інструментів на ринку. Теоретичні значення безризикових процентних ставок із додаванням премії за ризик використовують для оцінки всіх видів облігацій. Крім того, форму кривої дохідностей розглядають як відображення ймовірного напряму майбутніх змін процентних ставок.

Чотири основні форми кривої дохідності показано на рис.6.1.: 1 – нормальна (зростаюча) крива; 2 – зворотна (спадна) крива; 3 – хвилеподібна крива; 4 – горизонтальна крива.

Зростаюча крива відповідає сталому темпу інфляції, що є природним для ринкової економіки. Хвилеподібна крива відображає перехідні процеси, пов'язані зі зменшенням процентних ставок, яке розпочалося для довгострокових процентних ставок, або збільшенням – для короткострокових процентних ставок.

Спадаюча крива найчастіше свідчить про очікуване зниження темпу інфляції. Горизонтальна крива дохідностей означає, що річні безризикові процентні ставки для інвестицій на всі терміни однакові. Горизонтальна крива є найпростішою моделлю процентних ставок, зручною для фінансових розрахунків.

Для пояснення форми кривої дохідності запропоновано різні теорії часової структури процентних ставок [28, 29, 33]: теорія чистих сподівань, теорія ліквідності та теорія сегментації ринку.

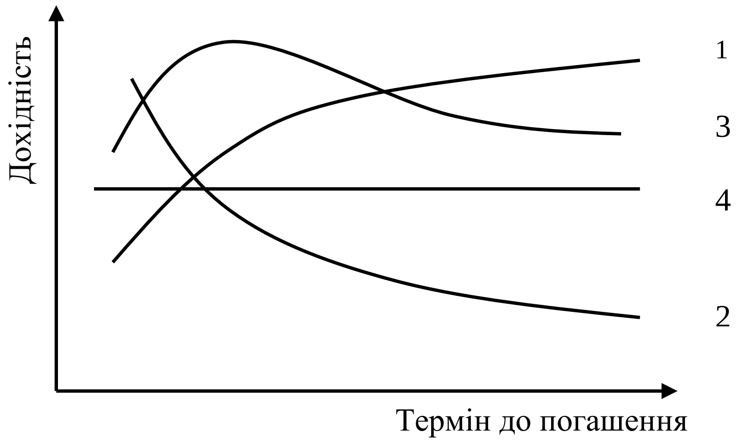

Рис. 6.2. Типові форми кривої дохідності.

Актуальна крива дохідності до погашення за гривневими ОВДП публікується на сайті НБУ(https://bank.gov.ua/ua/markets)

Форвардна процентна ставка (forward rate) – це ставка для деякого проміжку часу у майбутньому. Її використовують для нарощення суми з моменту часу t_1 на час t_2 у майбутньому.

Форвардна процентна ставка визначається процентною ставкою спот. Теперішня вартість у момент $t=0$ та майбутні вартості у моменти t_1 та t_2 пов'язані рівностями

$$P(0)=P(t_1)(1+r(t_1))^{-t_1}=P(t_2)(1+r(t_2))^{-t_2}.$$

Звідси знаходимо $P(t_2)=P(t_1)\dfrac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}}$.

Тому, для форвардної ставки $f(t_1,t_2)$ у момент часу t_1 на період (t_1,t_2) отримаємо рівняння

$$(1+f(t_1,t_2))^{t_2-t_1}=\frac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}},$$

з якого знайдемо

$$f(t_1,t_2)=\left(\frac{(1+r(t_2))^{t_2}}{(1+r(t_1))^{t_1}}\right)^{1/(t_2-t_1)}-1. \qquad (6.21)$$

6.3. Дюрація та показник опуклості облігації

6.3.1. Означення дюрації та показника опуклості

Для облігації, яка не має кредитного ризику, завжди є ризик зменшення її вартості унаслідок зміни процентних ставок на ринку. Цей ризик називають **процентним ризиком** (interest rate risk).

Розглянемо облігацію, за якою через $t_1,..., t_n$ років від теперішнього моменту часу $t = 0$ обіцяють виплатити грошові суми $C_1,...,C_n$, відповідно.

Припустимо, що крива процентних ставок стала: $r(t_i) = r = const > 0$. Тоді справедлива ціна облігації на момент часу $t = 0$, як функція процентної ставки r, дорівнює

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \quad . \tag{6.22}$$

Легко бачити, що це монотонно спадна функція процентної ставки r.

Припустимо, що процентна ставка у різні моменти часу змінилася на одну і ту ж величину Δr. Тоді вартість облігації стане такою

$$P(r+\Delta r)=\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}} . \tag{6.23}$$

При збільшенні процентних ставок ($\Delta r > 0$) ціна облігації зменшується, а при зменшенні ($\Delta r < 0$) – зростає.

Відносний приріст вартості облігації дорівнює

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)} . \tag{6.24}$$

Дамо аналітичну оцінку величини $\dfrac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Для цього скористаємося наближенням за формулою Тейлора [7] з урахуванням членів другого порядку:

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) = P'(r)\Delta r + \frac{1}{2} P''(r)(\Delta r)^2 + o((\Delta r)^2) . \tag{6.25}$$

Отримаємо

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P''(r)}{P(r)}(\Delta r)^2. \qquad (6.26)$$

Знайдемо похідну ціни облігації за процентною ставкою

$$P'(r) = -\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0) < 0, \qquad (6.27)$$

де $C_i(0) = \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$ – поточні (теперішні) вартості виплат. Цю похідну називають **доларовою дюрацією Фішера-Вейла** (Fisher-Weil duration).

Для логарифмічної похідної отримаємо

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = -\frac{1}{(1+r)P(r)}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} < 0. \qquad (6.28)$$

Дюрацією облігації або дюрацією Маколея (Macaulay duration) називають величину

$$D(r) = -(1+r)\frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i C_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} > 0. \qquad (6.29)$$

Коефіцієнт $C_i(0)/P(r)$ виражає долю ринкової ціни облігації, яка буде отримана через t_i років, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = 1$, то дюрація облігації є середньозваженим терміном виплат за облігацією. Це пояснює назву терміна від англійського слова "duration" – тривалість.

Тепер знайдемо другу похідну ціни облігації, віднесену до її ціни

$$\frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+r)^{t_i+2}}. \qquad (6.30)$$

Показником опуклості облігації (bond convexity) називають величину

$$C(r) = (1+r)^2\frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}. \qquad (6.31)$$

На основі уведених понять дюрації та показника опуклості формулу (6.20) для відносного приросту ціни облігації перепишемо так

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right) + \frac{1}{2}\,C(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2. \qquad (6.32)$$

Чутливість ціни облігації до зміни процентних ставок характеризується величиною $\dfrac{\Delta P(r)}{P(r)}$, головний член якої прямо пропорційний дюрації облігації. Отже, в момент часу $t=0$ дюрація облігації є мірою її процентного ризику за умов:

1) в початковий момент часу процентні ставки спот для всіх термінів дорівнюють r (крива дохідності горизонтальна);

2) процентні ставки змінились раптово на величину (крива дохідності отримала вертикальний зсув) Δr;

3) величина Δr – мала;

4) показник опуклості C – малий.

Чим менша величина C, тим краще дюрація облігації оцінює чутливість ціни облігації до змін часової структури процентних ставок. Отже, показник опуклості облігації можна інтерпретувати як показник того, наскільки точно дюрація облігації оцінює величину $\dfrac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Вкажемо найпростіші властивості дюрації і показника опуклості облігації.

1. Дюрація облігації не перевершує терміну до її погашення $T=t_n$.

Дійсно,

$$D=\sum_{i=1}^{n} t_i\,\frac{C_i(0)}{P(r)} \le \sum_{i=1}^{n} t_n\,\frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n = T\ . \qquad (6.33)$$

2. Дюрація чисто дисконтної облігації дорівнює терміну її погашення.

Доведення очевидне.

3. Для облігації, яка не є чисто дисконтною, дюрація і опуклість є строго спадними функціями внутрішньої доходності облігації r. Це означає, що

$$D'(r)<0,\ C'(r)<0. \qquad (6.34)$$

Доведення властивостей (6.34) дещо громіздке, його можна знайти у книзі [18, с.146].

6.3.2. Дохідність інвестицій в облігацію. Імунізуюча властивість дюрації облігації

Проблема оцінки облігації виникає не лише тоді, коли облігацію купують або продають на ринку, але й тоді, коли вона є у власника. Для оцінки ефективності інвестиції в облігацію через t років після її купівлі використовують поняття вартості інвестиції в облігацію на момент часу t.

Розглянемо облігацію, за якою через $t_1,..., t_n$ років від теперішнього моменту часу $t = 0$ обіцяють виплатити грошові суми $C_1,...,C_n$, відповідно.

Дохідність інвестиції в облігацію на момент часу $t \in [0,t_n]$ – це вартість потоку платежів за облігацією на момент часу t з урахуванням реінвестування. Вона дорівнює сумі нарощеної вартості доходів за облігацією на момент часу t та справедливої ціни облігації на цей момент.

Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ процентні ставки спот для усіх термінів однакові $r(t_i) = r = const > 0$. Тоді дохідність інвестиції в облігацію на момент часу t дорівнює

$$V(r,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t-t_i} = (1+r)^t P(r). \qquad (6.35)$$

Цю дохідність називають **плановою дохідністю** інвестиції в облігацію.

Припустимо, що відразу після купівлі облігації процентні ставки спот для усіх термінів змінилися і стали рівними $\tilde{r}$, після чого – не змінювалися. Тоді **реальна (фактична) дохідність інвестиції** в облігацію на момент часу t буде дорівнювати

$$V(\tilde{r},t) = (1+\tilde{r})^t P(\tilde{r}). \qquad (6.36)$$

Вкажемо основні властивості означених величин.

1. Величини $V(r,t)$ та $V(\tilde{r},t)$ є зростаючими функціями часу.
2. Існує єдиний момент часу t^*, коли фактична дохідність інвестиції дорівнює плановій дохідності

$$t^* = \ln\left(P(r) / P(\tilde{r})\right) \Big/ \ln\left((1+\tilde{r}) / (1+r)\right). \qquad (6.37)$$

3. У момент часу дюрації інвестиція в облігацію захищена (імунізована) проти зміни процентних ставок спот відразу після часу $t=0$ на одну і ту ж величину.

Сформулюємо останню властивість у формі теореми.

Теорема 6.1. Про імунізуючу властивість дюрації облігації

Нехай $D(r)$ – дюрація не чисто дисконтної облігації в момент часу $t=0$, коли процентні ставки спот для усіх термінів однакові і дорівнюють r.

Тоді в момент часу, що дорівнює дюрації облігації – $t=D(r)$, фактична дохідність інвестиції в облігацію не менша планової для будь-яких значень процентної ставки $\tilde{r}>0$:

$$\forall \tilde{r}>0 \;\; V(\tilde{r},D(r)) \ge V(r,D(r)). \tag{6.38}$$

Доведення

Розглянемо реальну дохідність інвестицій в облігацію як функцію параметра $\tilde{r}$ на момент часу $t=D(r)$

$$V(\tilde{r},D(r)) = (1+\tilde{r})^{D(r)} P(\tilde{r}). \tag{6.39}$$

Знайдемо її похідну по $\tilde{r}$

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r},D(r)) = D(r)(1+\tilde{r})^{D(r)-1} P(\tilde{r}) + (1+\tilde{r})^{D(r)} P'_{\tilde{r}}(\tilde{r}).$$

Але $P'(\tilde{r}) = -\dfrac{P(\tilde{r})}{(1+\tilde{r})} D(\tilde{r})$, тому

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r},D(r)) = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{D(r)-1}\big(D(r)-D(\tilde{r})\big). \tag{6.40}$$

Ураховуючи, що дюрація облігації є строго спадною функцією процентної ставки, легко бачити, що при $\tilde{r}<r$ функція $V(\tilde{r},D(r))$ є строго спадною функцією аргумента $\tilde{r}$, а при $\tilde{r}>r$ – строго зростаючою функцією цього аргумента. При $\tilde{r}=r$ її похідна дорівнює нулю

$$V'_{\tilde{r}}(\tilde{r}=r,\, D(r)) = 0. \tag{6.41}$$

Отож, виконується нерівність (6.38).

Доведення ілюструє наступний рисунок.

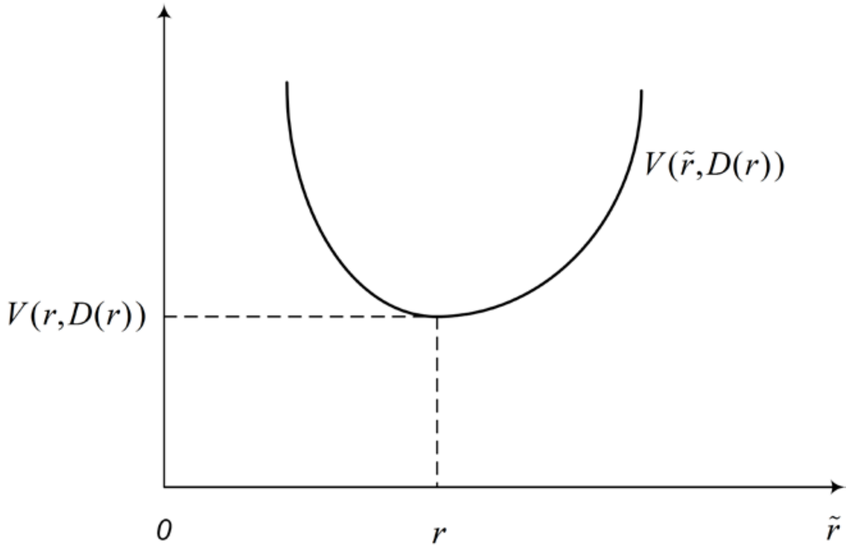

Рис. 6.3. Залежність фактичної дохідності інвестицій в облігацію від величини процентної ставки

6.4. Інвестиції у портфель облігацій

6.4.1. Портфель облігацій

Розглянемо портфель деяких облігацій. Навіть, коли облігації у портфелі не мають кредитного ризику, в умовах ринку цей портфель матиме процентний ризик. Зміна процентних ставок на ринку викликає зміну ринкових цін облігацій, що входять у портфель, а отже, і зміну вартості усього портфеля.

Припустимо, що на ринку наявні облігації m видів, ціни на які дорівнюють $P_1, P_2, ..., P_m$.

Нехай облігація j-го виду породжує у моменти часу t_i грошові виплати C_i^j, $i = 1, 2, ..., n$. Позначимо:

V_j – сума, витрачена інвестором на придбання облігацій j-го виду;

$V = \sum_{j=1}^{m} V_j$ – загальна сума, витрачена на придбання портфеля;

$k_j = V_j / P_j$ – кількість облігацій j-го виду у портфелі;

$w_j = V_j / V$ – вагові коефіцієнти портфеля, $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$;

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_m)$ – вектор вагових коефіцієнтів.

У момент часу t_i, $i = 1, 2, ..., n$ очікуваний потік коштів від портфеля дорівнює

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{V_j}{P_j} C_i^j, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (6.42)$$

Припустимо, що дохідність усіх облігацій дорівнює r і не залежить від часу. За умови

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}} \qquad (6.43)$$

має місце рівність

$$V(r,0) = V = \sum_{i=1}^{n} R_i (1+r)^{-t_i}. \qquad (6.44)$$

Отже, портфель $\Pi(V_1, ..., V_n)$ можна розглядати як одну еквівалентну облігацію вартістю V з потоком платежів (6.42). Планова та фактична вартості інвестицій у портфель на момент часу $t \in [0, t_n]$ дорівнюють:

$$V(r,t) = (1+r)^t V(r,0); \; V(\tilde{r},t) = (1+\tilde{r})^t V(\tilde{r},0).$$

Дюрацією D_p й опуклістю C_p портфеля називають дюрацію та опуклість еквівалентної облігації:

$$D_P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}, \qquad (6.45)$$

$$C_P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}}. \qquad (6.46)$$

Властивості дюрації і показника опуклості портфеля облігацій.

1. Для дюрації та показника опуклості портфеля облігацій $\Pi(V_1, ..., V_m)$ справедливі рівності

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} w_j D_j, \quad C_P = \sum_{j=1}^{m} w_j C_j, \qquad (6.47)$$

де D_j і C_j – дюрація і показник опуклості облігацій *j*-го виду.

Доведення випливає безпосередньо з формул (6.45) та (6.46) з урахуванням їх лінійності за параметрами R_i.

2. Якщо D_p і C_p – дюрація і показник опуклості портфеля $\Pi(V_1,...,V_m)$, то виконуються нерівності:

$$D^- \le D_P \le D^+, \tag{6.48}$$

$$C^- \le C_P \le C^+, \tag{6.49}$$

де $D^- = \min\limits_{1\le j\le m}\{D_j\}$, $D^+ = \max\limits_{1\le j\le m}\{D_j\}$, $C^- = \min\limits_{1\le j\le m}\{C_j\}$, $C^+ = \max\limits_{j}\{C_j\}$.

3. Якщо число D таке, що $D^- \le D \le D^+$, то завжди можна сформувати портфель, дюрація якого дорівнює D:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = D, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0,\ j = \overline{1,m}. \tag{6.50}$$

Легко показати, що система рівнянь і нерівностей (6.50) завжди має розв'язок $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_m)$. Так, коли $D = D_k$, $1 \le k \le m$, тоді розв'язок цієї системи є очевидним – $\mathbf{w} = \mathbf{e}_k$, де $\mathbf{e}_k$ – вектор розмірності m, з компонентами $e_{kj} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k \end{cases}$, $j = 1,2,...,m$.

Якщо виконується нерівність $D_q \le D \le D_p$, $1 \le p < q \le m$, то легко сформувати портфель з двох облігацій p та q розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} w_p D_p + w_q D_q = D \\ w_p + w_q = 1 \end{cases}$$

Для вагових коефіцієнтів отримаємо

$$w_p = \frac{D_q - D}{D_q - D_p}, \quad w_q = \frac{D - D_p}{D_q - D_p}. \tag{6.51}$$

4. У момент часу, що дорівнює дюрації портфеля, інвестиції у портфель облігацій захищені (імунізовані) проти зміни процентних ставок спот відразу після часу $t = 0$ на одну і ту ж величину:

$$\forall \tilde{r} > 0 \ \ V(\tilde{r}, D(r)) \ge V(r, D(r)). \tag{6.52}$$

Ця властивість очевидно випливає з аналогічної властивості для однієї облігації.

6.4.2. Формування імунізованого портфеля облігацій

У 1952 році Френк Реддінгтон (Frank Redington) вперше увів поняття імунізації портфеля облігацій і сформулював умову імунізації: для захисту вартості портфеля від змін ринкової процентної ставки необхідно, щоб дюрація портфеля збігалася з його інвестиційним горизонтом.

Для формування імунізованого портфеля з інвестиційним горизонтом $0 < T \le t_n$ років, необхідно розв'язати систему рівнянь і нерівностей

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = T, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, j = \overline{1, m}. \tag{6.53}$$

З третьої властивості випливає, що система (6.47) має розв'язок за умови

$$D^- \le \ T \ \le \ D^+. \tag{6.54}$$

В загальному, система рівнянь і нерівностей (6.47) може мати багато розв'язків. Тому є можливість сформулювати деяку задачу оптимізації за обмежень (6.47).

Доцільно розглянути задачу про формування портфеля облігацій з заданою дюрацією і найменшим показником опуклості:

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{j=1}^{m} w_j C_j, \tag{6.55}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j D_j = T, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1, \quad w_j \ge 0, \ j = \overline{1, m}. \tag{6.56}$$

За умови (6.54) допустима множина, яка визначається умовами (6.56), є обмеженою, замкненою і не пустою. Тому розв'язок задачі лінійного програмування (6.55)–(6.56) існує.

У момент часу t_1 потрібно переформатувати портфель, оскільки після отримання планових надходжень змінюється загальний грошовий потік та часові параметри, зокрема інвестиційний горизонт становитиме $T - t_1$ років. Отриманий прибуток знову реінвестують в облігації, частина облігацій продають, а частину – купують.

Процедуру переформатування повторюють у наступні моменти часу. Якщо, в деякий момент часу неможливо сформувати портфель з заданою дюрацією (ризик ліквідності), то наявний портфель продають, а отримані кошти реінвестують під діючу процентну ставку до кінця терміну T .

6.4.3. Пасивні стратегії управління портфелем облігацій

За пасивної стратегії управління портфелем облігацій структура портфеля, сформованого в початковий момент часу, залишається незмінною протягом усього терміну існування портфеля незалежно від ситуації на ринку.

Прикладом такої пасивної стратегії є портфель із погодженими грошовими потоками, або цільовий портфель. Згідно з цією стратегією портфель формують так, щоб надходження від нього у фіксовані моменти часу забезпечили потрібні платежі за деякими зобов'язаннями.

Припустимо, інвестор через $t_1,..., t_n$ років від теперішнього моменту часу $t = 0$ повинен виплатити грошові суми $S_1, S_2,..., S_n$, відповідно.

На ринку є m видів облігацій, з яких можна сформувати портфель з потоком платежів у моменти $t_1,..., t_n$. Ціни облігацій у момент $t = 0$ дорівнюють, відповідно $P_1, ..., P_m$. Як і раніше C_i^j – надходження за облігацією j-го виду у момент часу t_i, $i = 1, 2,..., n$.

Позначимо: x_j – кількість облігацій j-го виду в портфелі, $j = 1,..., m$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_m)$ – вектор, що визначає кількісний склад портфеля.

Задачу знаходження портфеля найменшої вартості, потік платежів від якого достатній для виконання зобов'язань інвестора, формулюють так:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \tag{6.57}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m} C_i^j x_j \geq S_i, \quad i = 1, 2,..., n ; \tag{6.58}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., m . \tag{6.59}$$

Розв’язком задачі (6.57)–(6.59) є портфель, що дає змогу виконати зобов’язання інвестора і має найменшу вартість. Для такого портфеля немає необхідності реінвестувати платежі, які надходять. Отже, відсутній ризик реінвестування. Крім того, портфель не продають до погашення. Значить, немає процентного ризику.

Недоліком цієї стратегії є складність узгодження потоку надходжень і потоку зобов’язань. Це пояснюється тим, що на ринку існує лише обмежений набір чисто дисконтних облігацій, і для формування потрібного потоку надходжень від портфеля інвестор вимушений придбати купонні облігації. Внаслідок цього у моменти часу $t_1, ..., t_n$ від портфеля можуть надходити надлишкові кошти.

Зменшити вартість портфеля дозволяє використання наступного різновиду стратегії цільового портфеля. Надлишкову частину G_i платежу, що надходить від портфеля у момент часу t_i, $i = 1, 2, ..., n-1$, використовують для виконання зобов’язання інвестора у наступний момент часу. Цю суму реінвестують на термін $t_{i+1} - t_i$ років під діючу на момент часу t_i річну форвардну процентну ставку $f_i = f(t_i, t_{i+1})$. Тоді портфель формують відповідно до розв’язку такої задачі лінійного програмування:

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{G}} f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \qquad (6.60)$$

за умов

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} C_1^j x_j \ \ge \ S_1 + \ G_1 \ , \\
&\sum_{j=1}^{m} C_2^j x_j + G_1(1+ f_1)^{t_2 - t_1} \ge S_2 + G_2 \ , \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\sum_{j=1}^{m} C_{n-1}^j x_j + G_{n-2}(1+ f_{n-2})^{t_{n-1} - t_{n-2}} \ge S_{n-1} + G_{n-1} \ , \qquad (6.61) \\
&\sum_{j=1}^{m} C_n^j x_j + G_{n-1}(1+ f_{n-1})^{t_n - t_{n-1}} \ge S_n \ ,
\end{aligned}$$

$$G_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n-1\ ,$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2\ ,..., m\ .$$

Щоб розв'язати цю задачу, потрібно знати форвардні процентні ставки $f(t_i, t_{i+1})$ для інвестицій у момент t_i на термін $t_{i+1} - t_i$ років, $i = 1, 2, ...,\ n-1$.

Запитання

1. Що таке облігація?
2. Назвіть основні параметри облігації.
3. Дайте означення внутрішньої дохідності облігації.
4. Що називають кривою дохідності спот?
5. Як розрахувати справедливу вартість облігації на початковий момент часу?
6. Дайте означення дюрації облігації.
7. Що називають показником опуклості облігації?
8. Запишіть формулу для відносного приросту ціни облігації.
9. Що таке дохідність інвестицій в облігацію?
10. Сформулюйте теорему про імунізуючу властивість дюрації облігації.
11. Поясніть, що таке процентний ризик.
12. Сформулюйте властивості дюрації та показника опуклості портфеля облігацій.
13. Сформулюйте імунізуючу властивість дюрації портфеля облігацій.
14. Опишіть алгоритм формування імунізованого портфеля облігацій.
15. Сформулюйте задачу про формування цільового портфеля облігацій.

Список використаної літератури

1. Бакаєв Л. О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями / Л. О. Бакаєв. – К.: КНЕУ, 2000. – 151 с.
2. Бугрій М. І. Основи фінансово-кредитного аналізу / М. І. Бугрій. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. – 375 с.
3. Вітлінський В. В. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник/ В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний; За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
4. Вітлінський В. В., Великоіваненко Г. І. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія. – К.: КНЕУ, 2004. – 480 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятности и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Л.: Наука, 1988. – 480 с.
6. Дудикевич Я.В., Прокопишин І.А. Вартість ризику для систем захисту інформації // Захист інформації, 2009. – № 2. – С.81-85.
7. Заболоцький М. В. Математичний аналіз: підручник / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк . – К.: Знання, 2008. – 422 с.
8. Заболоцький М. В., Прокопишин І. А. Основи фінансової математики: навч. посібник . – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2016. – 144 с.
9. Закон України "Про банки і банківську діяльність": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2121-14#Text
10. Закон України "Про загальнообов’язкове державне пенсійне страхування": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1058-15#Text

11. Закон України "Про Національний банк України": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/679-14#Text
12. Закон України "Про страхування": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/%2085/96-вр#Text
13. Закон України "Про фінансовий лізинг": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/723/97-вр#Text
14. Закон України "Про цінні папери та фондовий ринок": за станом на 12.05.2021 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/3480-15#Text
15. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А. А. Лобанова и А. В. Чугунова. – 3-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 878 с.
16. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: посібник / М. В. Карташов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 494 с.
17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т.1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
18. Мельников А. В. Математические модели финансового анализа / А. В. Мельников, Н. В. Попова, В. С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006. – 439 с.
19. Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. Рыночные риски: модели и методы. – М.: ВЦ РАН, 2000. – 55с.
20. Постанова НБУ "Про затвердження Положення про порядок здійснення банками України вкладних (депозитних) операцій з юридичними і фізичними особами": за станом на 15.02.2016 / Верховна Рада України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1256-03#Text
21. Сайт Головного управління статистики у Львівській області [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.lv.ukrstat.gov.ua
22. Сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.ukrstat.gov.ua

23. Сайт Національного банку України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.bank.gov.ua
24. Сайт Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.nssmc.gov.ua
25. Сайт Ощадбанку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.oschadbank.ua/ua/private/deposit
26. Сайт Товариства актуаріїв України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://actuary.in.ua
27. Сайт Укрексімбанку [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.eximb.com/ua/business/pryvatnym-klientam/pryvatnym-klientam-depozyty/
28. Фабоцци Ф. Управление инвестициями / Ф. Фабоцци. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 932с.
29. Фабоцци Ф. Рынок облигаций: Анализ и стратегии / Ф. Фабоцци. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2005. – 876 с.
30. Фінансовий калькулятор [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://fin-calc.org.ua
31. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
32. Четыркин Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
33. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. – М.: ИНФРА–М, 2001. – 1048 с.
34. 2006 ISDA Definitions. – International Swaps and Derivatives Associations, New York 2006. – 145 p. (Section 4.16 Day Count Fraction, p.11-13.) [Electronic resource]. – Access mode: https://www.rbccm.com/assets/rbccm/docs/legal/doddfrank/Documents/ISDALibrary/2006%20ISDA%20Definitions.pdf
35. Acerbi, Carlo & Tasche, Dirk. On the coherence of expected shortfall // Journal of Banking & Finance/ – 2002. – V. 26(7). P. 1487-1503.
36. Alexander, Carol. Market Risk Analysis. – Volume IV: Value at Risk Models. – Wiley, 2008. – 455 p.

37. Artzner P. Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath // Mathematical Finance. – 1999. – Vol.9. – N 3. – P. 203–227.

38. Benninga S. Financial modeling / S. Benninga. – 3rd ed. – MIT Press, 2008. – 1133 p.

39. CFA Institute [Electronic resource]. – Access mode: https://www.cfainstitute.org

40. CFA Society Ukraine [Electronic resource]. – Access mode: https://www.cfasociety.org/ukraine

41. McNeil Alexander J., Frey Rüdiger, Embrechts Paul. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. – Princeton University Press, 2005. – 538 p.

42. Risk Metrics™ Technical Document – Fourth Edition. New York: RiskMetrics Group, 1995.

43. Ross S. M. (2002). Probability models for computer science. – San Diego: Harcourt/Academic Press, 2002. – 288 p.

Додаток А

Порядкові номери днів у році

Місяць / День	Січ.	Лют.	Бер.	Кв.	Тр.	Черв.	Лип.	Серп.	Вер.	Жовт.	Лист.	Груд.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	–	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	–	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	–	365