Загальна топологія в теоремах, прикладах і задачах

Олег Гутік

15 грудня 2020 р.

Олег Гутік, *Загальна топологія в теоремах, прикладах і задачах.*

Зміст

Передмова

Розділ 1

Алгебра висловлень і елементи теорії множин

1.1 Висловлення, предикати, квантори

Як арифметика вивчає числа, а геометрія — фігури, так математична логіка вивчає висловлення і навіть дії над ними. Очевидно, що ці дії особливі, не такі, як дії над числами, але є між ними й щось спільне.

Що ми розуміємо під висловленням?

Висловленням (або *судженням*, або *твердженням*) називається кожне речення, яке стверджує якусь закінчену думку, **істинну** або **хибну** залежно від певних умов.

Розглянемо такі речення:

1. $2 + 3 = 5$.
2. $2 - 3 = 7$.
3. Україна — незалежна держава.
4. Я мешкаю у Львові.
5. Сьогодні понеділок.
6. Тарас Шевченко народився 9 березня 1814 року.
7. “Як умру, то поховайте
   Мене на могилі ...”
8. Сонце обертається навколо Місяця.

Серед цих речень лише сьоме не є висловленням у нашому розумінні, оскільки воно не має стверджувального характеру, і не можна сказати, істинне воно чи хибне. Усі інші речення — висловлення, бо вони у стверджувальній формі висловлюють завершену думку, і можна сказати, істинні вони чи хибні. При цьому висловлення 1, 6 — абсолютно істинні (незалежно від будь-яких умов), а висловлення 2, 8 — абсолютно хибні. Істинність або хибність висловлень 3, 4, 5 залежить від конкретних додаткових умов. А саме, судження 5 істинне в понеділок і хибне в інші дні тижня, судження 4 істинне в устах того, хто мешкає у Львові.

Отже, істинність або хибність висловлення може мати як абсолютний, так і відносний характер. Проте жодне висловлення за жодних конкретних умов не може бути водночас і хибним, і істинним. Це зрозуміле твердження є одним із трьох основних законів класичної логіки — так званим *законом суперечності*. Другий основний закон класичної логіки називається *законом вилучення третього* і полягає в тому, що кожне висловлення за певних умов або істинне, або хибне — третього бути не може (лат. *tertium non datur*, тобто *третього не дано*).

Алгебра висловлень, як і звичайна алгебра, користується буквенною символікою для позначення загальних понять і тверджень. Висловлення надалі позначатимемо грецькими літерами: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi \ldots$. Якщо висловлення α істинне, то вважатимемо, що його *значення істинності* дорівнює одиниці, писатимемо $\alpha \equiv 1$, а коли хибне, то вважатимемо, що його значення істинності дорівнює нулю, і писатимемо $\alpha \equiv 0$. Надалі, також, якщо значення істинності двох висловлень α і β збігаються, то це записуватимемо так: $\alpha \equiv \beta$.

З простих висловлень за допомогою так званих логічних операцій утворюються складні висловлення.

Визначити якусь логічну операцію над висловленнями — означає: *вказати, якого зі значень істинності набуває її результат*; тобто відповідне складне висловлення залежне від значень істинності простих висловлень, що входять до його складу.

Основними логічними операціями над висловленнями є *кон'юнкція*, *диз'юнкція* і *заперечення*.

Логічним добутком, або *кон'юнкцією*, двох висловлень α і β називається складне висловлення $\alpha \wedge \beta$, яке істинне, якщо кожне з висловлень α і β істинне, і хибне, якщо хоча б одне з них хибне. Операція знаходження логічного добутку називається *кон'юнкцією*. Кон'юнкція також називається *логічним " і "*.

Логічний добуток двох висловлень α і β часто позначають так само, як звичайний добуток: $\alpha\beta$, читається "α і β". Трапляються й інші позначення для кон'юнкції висловлень $\alpha \& \beta$, або просто $\alpha \cdot \beta$.

Означення логічних операцій зручно подавати *таблицями істинності*; в них наводяться значення істинності складного висловлення для всіх можливих комбінацій значень істинності його простих висловлень. Для кон'юнкції таблиця істинності має такий вигляд:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Важливо зауважити, що кон'юнкція значень істинності збігається зі звичайним арифметичним добутком чисел 0 і 1: $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ і $1 \cdot 1 = 1$.

Розглянемо приклади кон'юнкцій:

1) сніг білий і $2 + 2 = 4$;
2) сніг білий і $2 + 2 = 8$;
3) на городі бузина, а в Києві дядько.

Кон'юнкції 1, 3 — істинні, а 2 — хибна.

Диз'юнкція (*логічне додавання*). Сполучник "або" вживається у звичайному мовленні у двох різних значеннях: роздільному і нероздільному. °х можна пояснити так: вираз "α або β" може мати

роздільне значення — “α або β, але не обидва”;
нероздільне значення — “α або β, або обидва”.

Якщо, наприклад, хтось каже: “я сьогодні складу іспит з топології на “добре” або на “відмінно”, то тут “або” має роздільний зміст, бо не можна скласти один і той же іспит в один і той же час на “добре” і на “відмінно”. Водночас у твердженні “якщо $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ або $b = 0$” сполучник “або” має нероздільний зміст, оскільки $a \cdot b = 0$ і при $a = b = 0$.

Операція логічного додавання (диз’юнкція) відповідає у звичайному мовленні об’єднанню висловлень сполучником “або” у нероздільному розумінні.

Логічною сумою, або *диз’юнкцією*, двох висловлень α і β називається складне висловлення $\alpha \vee \beta$, яке істинне, якщо хоча б одне з висловлень α або β істинне; і хибне, якщо вони обидва хибні. Операція знаходження логічної суми називається *логічним додаванням*, або *диз’юнкцією*. Знак “$\vee$” читається “або”, і диз’юнкцію називають також логічним “*або*”.

Таблиця істинності диз’юнкції:

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	1	1
1	0	1
0	0	0
1	1	1

Розглянемо приклади диз’юнкцій:

1) $2 \times 2 = 4$ або сніг білий;
2) $2 \times 2 = 4$ або сніг чорний;
3) $2 \times 2 = 5$ або сніг білий;
4) $2 \times 2 = 5$ або сніг чорний.

Усі ці висловлення є диз’юнкціями. Останнє з них хибне, а решта — істинні.

Вправа 1.1.1. Довести, що операції кон’юнкція та диз’юнкція є комутативними та асоціативними, тобто виконуються рівності:

1) $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$;
2) $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$;
3) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$;
4) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.

Вправа 1.1.2. Довести, що для операцій кон’юнкція та диз’юнкція виконується дистрибутивний закон:

1) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$;
2) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Третя основна логічна операція — заперечення. *Запереченням* висловлення α називається висловлення $\overline{\alpha}$, яке істинне, якщо α хибне, і хибне, якщо α істинне. Заперечення називається також *логічним “не”*.

Таблиця істинності заперечення:

α	$\overline{\alpha}$
0	1
1	0

Отже, $\overline{0} \equiv 1$, $\overline{1} \equiv 0$. Висловлення $\overline{\alpha}$ читається “не α”. Інколи операція заперечення позначається $\neg\alpha$ або α'.

Вправа 1.1.3. Довести, що для довільного висловлення α виконується $\overline{\overline{\alpha}} \equiv \alpha$.

Застосовуючи логічні операції, можна утворити з висловлень нові висловлення, наприклад, якщо α, β і γ — висловлення, то $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$, $(\alpha\vee\overline{\beta})\wedge\gamma$, $(\overline{\alpha}\wedge\beta)\vee\overline{(\gamma \wedge (\alpha \vee \beta))}$ тощо теж висловлення. Такі вирази називаються *формулами алгебри висловлень*. Дужки в логічних формулах відіграють таку ж роль, як у алгебрі: вони позначають порядок виконання дій.

Щоб мати повну картину значень істинності логічної формули, складають її таблицю істинності для всіх можливих наборів. Для цього виписують усі послідовні часткові формули, з яких складається формула, і знаходять їх значення істинності на всіх наборах, доки не дійдуть до розглядуваної повної формули.

Пояснимо це на прикладі. Складемо таблицю істинності для наступного висловлення: $\overline{(\overline{\alpha} \vee (\beta \wedge \alpha))} \wedge \gamma$.

α	β	γ	$\overline{\alpha}$	$\beta \wedge \alpha$	$\overline{\alpha} \vee (\beta \wedge \alpha)$	$\overline{\alpha \vee (\beta \wedge \alpha)}$	$\overline{(\overline{\alpha} \vee (\beta \vee \alpha))} \wedge \gamma$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Отже, це висловлення істинне лише в тому випадку, якщо α, γ — істинні, а β — хибне.

Вправа 1.1.4. Дано два висловлення:

α: Василь знає Петра;
β: Петро знає Василя.

Записати логічними формулами такі висловлення:

a) Василь і Петро знають один одного;
b) Василь і Петро не знають один одного;
c) Або Василь знає Петра, або Петро знає Василя;
d) Василь не знає Петра, а Петро знає Василя;
e) Неправильно, що Петро не знає Василя;
f) Неправильно, що Василь і Петро один одного не знають.

Вправа 1.1.5. Дано висловлення:

α: я люблю математику;
β: я люблю спорт.

Який зміст мають висловлення:
a) $\alpha \wedge \beta$; *b*) $\overline{\alpha \wedge \beta}$; *c*) $\alpha \vee \beta$; *d*) $\alpha \wedge \overline{\beta}$; *e*) $\overline{\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}}$; *f*) $\overline{\overline{\alpha}}$; *g*) $\overline{\alpha} \vee \beta$?

Вправа 1.1.6. Скласти таблицю істинності для формул:
a) $\overline{(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\alpha \wedge \beta}}$; *b*) $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$; *c*) $\overline{\alpha} \vee \gamma$; *d*) $\overline{\alpha \wedge \beta}$; *e*) $\overline{\alpha \wedge (\overline{\alpha} \vee \beta) \vee \beta}$.

Усі математичні теореми можна записати так: "*якщо справджуються такі-то умови, то випливає такий-то висновок*". Наприклад, теорему "*Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює* 180°" можна записати так: "*якщо дана фігура — трикутник, то сума її внутрішніх кутів дорівнює* 180°". Для запису таких висловлень існує логічна операція, яка називається *імплікацією*. Вона відповідає умовному твердженню на зразок "*якщо ..., то ...*" і позначається стрілкою "$\Rightarrow$". Отже, імплікація — складне висловлення

$$\alpha \Rightarrow \beta,$$

яке читається так: "*якщо α, то β*", або "*з α випливає β*".

Імплікацією називається таке складне висловлення $\alpha \Rightarrow \beta$, яке хибне лише за умови, що висловлення α істинне, а висловлення β хибне, а в усіх інших випадках воно істинне. Часто замість $\alpha \Rightarrow \beta$ писатимемо $\alpha \to \beta$.

Таблиця істинності для імплікації має такий вигляд:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Зауважимо, що з хибного висловлення випливає будь-яке твердження.

Наприклад, візьмімо хибне твердження: $1 = 2$. Віднімаючи від обох частин одиницю, отримаємо $0 = 1$. Нехай тепер a і b — довільні числа. Помножимо рівність $0 = 1$ спочатку на a, а потім на b: $0 \cdot a = 1 \cdot a = a$, $0 \cdot b = 1 \cdot b = b$. Отже, $0 = 0 \cdot a = 0 = 0 \cdot b = a = b$, і будь-які два числа рівні.

Розглянемо ще одну логічну операцію — *еквівалентність двох висловлень*. Вона відповідає сполучним словам "*тоді і лише тоді*" і приводить до істинного складного висловлення у випадку, якщо відповідні прості висловлення одночасно істинні або одночасно хибні.

Еквівалентністю висловлень α і β називається складне висловлення $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (читається: "α еквівалентне β"), яке істинне, якщо обидва висловлення α і β істинні або обидва хибні, й хибне, якщо одне з них істинне, а друге хибне.

Таблиця істинності еквівалентності має такий вигляд:

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логічним законом називається тотожно-істинна логічна формула, тобто така формула, яка істинна завжди, тобто при будь-якому наборі значень істинності.

Логічні закони, і лише вони становлять загальні форми правильного мислення. Тому вони найбільш цікаві для логіки.

Як довести логічний закон? Для цього є принаймні три способи. Перший — *складання таблиці істинності.* Зрозуміло, що логічна формула буде тотожно-істинна тоді й лише тоді, коли останній стовпець її таблиці істинності складається лише з одиниць.

Інколи швидше приводить до мети другий спосіб доведення логічних законів, який полягає в тому, що безпосередньо на підставі означення логічних операцій упевнюються, що формула не може набувати значення нуль. Нарешті, третій спосіб ґрунтується на тотожних перетвореннях логічних формул.

Основні логічні закони:

1. **Закон тотожності**: $X \to X$ (“*якщо X, то X*”).

   Доведення:

X	X	$X \to X$
0	0	1
1	1	1

2. **Закон суперечності**: $\overline{X \wedge \overline{X}}$ (“*не можуть бути одночасно істинними висловлення X і $\overline{X}$*”).

   Доведення:

X	$\overline{X}$	$X \wedge \overline{X}$	$\overline{X \wedge \overline{X}}$
0	1	0	1
1	0	0	1

3. **Закон вилучення третього**: $X \vee \overline{X}$ (“*з висловлень X і $\overline{X}$ принаймні одне істинне*”).

   Доведення:

X	$\overline{X}$	$X \vee \overline{X}$
0	1	1
1	0	1

Особливо важливе значення мають *тотожно-істинні еквівалентності*, які позначаються звичайним знаком “=”.

Як можна довести логічну рівність $S = T$? Рівність $S = T$ буде істинна тоді й лише тоді, коли формули S і T на будь-яких наборах мають однакові значення істинності.

4. Закон подвійного заперечення: $\overline{\overline{X}} = X$. Доведення очевидне.

5. Формули (закони) де Моргана:

а) $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$,
б) $\overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Доведення:

а)

X	Y	$X \vee Y$	$\overline{X \vee Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

б)

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Як побачимо далі, логічні операції не незалежні, одні з них можна виразити через інші. Наприклад:

а) $X \vee Y = \overline{\overline{\overline{X \vee Y}}}$;
б) $X \wedge Y = \overline{\overline{\overline{X \wedge Y}}}$;
в) $X \to Y = \overline{X} \vee Y$;
г) $X \to Y = \overline{X \wedge \overline{Y}}$;
ґ) $X \sim Y = (X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Отже, диз’юнкція виражається через кон’юнкцію і заперечення а); кон’юнкція — через диз’юнкцію і заперечення б); імплікація — через диз’юнкцію і заперечення в) або — через кон’юнкцію і заперечення г); еквівалентність — через імплікацію і кон’юнкцію.

Отже, всі логічні операції можна виразити через

а) диз’юнкцію і заперечення;

або

б) кон’юнкцію і заперечення.

4. Закон контрапозиції:

$$\boxed{X \to Y = \overline{Y} \to \overline{X}}$$

Доведення:

X	Y	$X \to Y$	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Вправа 1.1.7. Доведіть такі закони:

(i) **закони ідемпотентності**:

(i_1) $X \vee X = X$;

(i_2) $X \wedge X = X$;

(ii) **закони поглинання**:

(ii_1) $(X \vee Y) \vee X = X$;

(ii_2) $(X \wedge Y) \vee X = X$;

(iii) **закони тотожності**:

(iii_1) $X \vee 0 = X$;

(iii_2) $X \wedge 1 = X$;

(iii) **закони домінування**:

(iii_1) $X \vee 1 = 1$;

(iii_2) $X \wedge 0 = 0$.

Відповідно до варіантів імплікації в математиці розглядаються зв'язки між теоремами. Якщо $X \to Y$ — дана теорема, то її конверсія $Y \to X$ називається *оберненою теоремою*.

Конверсія контрапозиції $\overline{X} \to \overline{Y}$ називається *протилежною теоремою*. З нашого означення випливає, що формулювання оберненої теореми можна отримати, помінявши місцями умову та висновок.

Теорема 1.1.1. *Якщо є X, то є Y.*

Теорема 1.1.2 (обернена до теореми 1.1.1)**.** *Якщо є Y, то є X.*

Теорема 1.1.3 (протилежна до теореми 1.1.1)**.** *Якщо немає X, то немає Y.*

За законом контрапозиції, довівши яку-небудь теорему, ми довели для неї обернену до протилежної (контрапозицію). Отже, з теореми "*Якщо точка лежить на бісектрисі кута, то вона однаково віддалена від сторін кута*" автоматично випливає твердження: "*Якщо точка не однаково віддалена від сторін кута, то вона не лежить на його бісектрисі*".

З імплікацією тісно пов'язане питання про *необхідність і достатність* умов, дуже важливе для математики. Означення такі: якщо імплікація $X \to Y$ істинна, то істинність висловлення Y називають *необхідною умовою* для істинності висловлення X. Коротше: якщо істинно $X \to Y$, то Y — *необхідна умова* для X, а X — *достатня умова* для Y.

Такі назви пояснюються тим, що коли імплікація $X \to Y$ істинна, то для вірності X необхідно, щоб було вірним і Y, а вірність X достатня для вірності Y.

Наприклад, твердження "*Якщо ціле число закінчується нулем, то воно ділиться на* 2" можна інакше висловити так: "*Для того, щоб ціле число закінчувалося нулем, необхідно, щоб воно ділилося на* 2", або "*Для того, щоб число ділилось на* 2*, достатньо, щоб воно закінчувалося нулем*".

Доведення від супротивного

Легко переконатися, що істинні такі формули:

C1) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to \overline{X}$;
C2) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to Y$;
C3) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to 0$.

Ці рівності означають таке: щоб довести, що з X випливає Y, досить довести, що коли X правильне, а Y неправильне, то C1) — неправильне; C2) Y — правильне; C3) прийдемо до суперечності.

Приклад 1.1.4. Доведемо методом від супротивного такі теореми:

1. Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, в перетині з третьою утворюють рівні відповідні кути, то ці прямі паралельні ($X \to Y$).
   Доведення. Припустимо, що вони не паралельні ($\overline{Y}$), хоч і утворюють рівні відповідні кути ($\overline{X}$), тобто, що ($X \wedge \overline{Y}$). Тоді прямі перетинаються й утворюють трикутник, у якому один з відповідних кутів буде внутрішнім, а другий — зовнішнім, не суміжним з ним. Як відомо, такі кути не однакові ($\overline{X}$). Отже, ми довели, що $X \wedge \overline{Y} \to X$, а значить $X \to Y$.
2. Доведемо класичну теорему Евкліда про нескінченність множини простих чисел. Сформулюємо її так: якщо n — просте число (X), то існує більше за нього просте число q (Y). Тобто $X \to Y$.
   Доведення. Нехай p — найбільше просте число, тобто не існує більшого за нього ($X \wedge \overline{Y}$). Розглянемо число $Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Число Q або просте, або складене. Якщо воно просте, то, оскільки воно більше за p, твердження Y вірне, тобто $X \wedge \overline{Y} \to Y$. Якщо ж Q складене, то воно ділиться на якесь просте число q. Але на прості числа $2, 3, 5, \ldots, p$ число Q не ділиться, бо при діленні на кожне з них отримується остача 1. Отже, число q відмінне від усіх простих $2, 3, 5, \ldots, p$, тобто $Q > p$. І в цьому випадку існує просте число, більше за p: $X \wedge \overline{Y} \to Y$. Отже, завжди вірна імплікація $X \to Y$. Це й означає, що множина простих чисел нескінченна.

Надалі ми часто користуватимемося методом доведення від супротивного. Проаналізувавши хід наших міркувань, завжди можна буде переконатися, що ми користувались одним із правил: C1), C2) або C3).

Існують речення, які не є висловленнями та містять змінні. Зокрема, таким є речення "$x^2 - 5 = 15$". Речення із змінними — це не висловлення, але вони стають висловленнями, якщо надати змінним певних значень. Речення із змінними дуже поширені. Зокрема вони містяться в математичних формулах і комп'ютерних програмах.

Приклад 1.1.5. Речення "$x \leqslant 5$", "$x+y=5$", "$x-y=z$" містять змінні. Їм не можна надати значення істинності, доки змінним не буде надано якихось значень.

У прикладі 1.1.5 речення "$x \leqslant 5$", або "x менше або рівне за 5", складається з двох частин: перша, змінна x, називається *предметом*, а друга — "менше або рівне за 5", яка вказує властивість предмета, називається *предикатом*. Зауважимо, що часто *предикатом* називають усе речення.

Розглянемо логіку *першого порядку* або *логіку предикатів*, у якій до понять логіки висловлень додано нові поняття. Для формулювання складних речень у логіці висловлень використовують атоми як основні елементи формул. Атом розглядають як неподільне ціле — його структуру не аналізують.

Оскільки багато міркувань неможливо описати лише за допомогою висловлень, то введемо поняття атома в логіці першого порядку. Для запису атомів логіки використовують такі типи символів:

- *індивідні символи* або *сталі* — це імена об'єктів, які починаються з великої літери, і сталі, наприклад T, F, 12, 292;
- *предметні символи*, *предметні змінні*, або просто *змінні* — імена, якими позначаються змінні та їх записують мальми латинськими літерами (можливо з індексами), наприклад, x, z, z_1, a_i;
- *предикатні символи* — імена, якими позначають предикати та які записують великими латинськими літерами, наприклад A, G, P.

Приклад 1.1.6. Позначимо речення "$x \leqslant 5$" через $P(x)$, де предикатний символ P позначає предикат "менше або рівне за 5", а x — предметна змінна. Вираз $P(x)$ загалом також називають предикатом.

У загальному випадку, предикат, який містить n предметних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записують $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і називають n-*місним*. *Предметною областю змінної* x_i називають множину D_i її значень, а символ P — n-*місним предикатним символом*.

Атом логіки першого порядку має вигляд $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де P — предикатний символ, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — предметні або індивідні символи.

Як тільки змінна x набуває якогось значення з предметної області, предикат $P(x)$ набуває значення 0 або 1, і перетворюється на висловлення. Аналогічно, якщо всі змінні багатомісного предиката набувають якихось значень з предметної області, то він набуває значення істинності та перетворюється на висловлення.

Приклад 1.1.7. Позначимо речення "$x \leqslant 5$" через $P(x)$. Тоді $P(2)$ — істинне висловлення, а $P(12)$ — хибне. Надалі це записуватимемо так: $P(2) = 1$ і $P(12) = 0$.

Є ще інший спосіб перетворення предикатів у висловлення — це *квантування*. Нехай $P(x)$ — предикат, D — задана предметна область, $x \in D$. Використовують два спеціальні символи $\forall$ і $\exists$, які називаються, відповідно, *квантором загальності* та *квантором існування*. Якщо x — предметна змінна, то вираз $(\forall x)$ читають "для всіх x", "для кожного x", або "для бідь-якого x". Вираз $(\forall x)P(x)$ означає, що "$P(x)$ істинний для всіх значень x з предметної області", і його читають "$P(x)$ для всіх x". Вираз $(\exists x)$ читають "існує x", "для деяких x", або "принаймні для одного x". Вираз $(\exists x)P(x)$ означає, що "в предметній області існує таке x, що $P(x)$ — істинний", і його читають "існує таке x, що $P(x)$ істинний". В подальшому дужки біля квантора будемо опускати, тобто замість $(\forall x)$ і $(\exists x)$ писатимемо $\forall x$ і $\exists x$, відповідно.

Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називають *зв'язуванням* предметної змінної x, а саму змінну x — *зв'язаною*. Незв'язана змінна називається *вільною*. Кажуть, що у виразах $\forall x P(x)$ та $\exists x P(x)$ предикат $P(x)$ є в *області дії* відповідного квантора.

Приклад 1.1.8. У виразі $\exists x P(x, y)$ змінна x зв'язана, а змінна y — вільна, оскільки предикат $P(x)$ не є в області дії квантора зі зміною y.

Формули логіки першого порядку визначають так:

- атом — це формула;
- якщо X та Y — формули, то $\overline{X}$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \Rightarrow Y$ та $X \Leftrightarrow Y$ — формули;
- якщо X — формула, а x — вільна змінна у формулі X, то $\forall x X$ або $\exists x X$ — формули;
- формули можна породити лише скінченною кількістю вище перелічених трьох правил.

1.2 Множини та відношення

1.2.1 Множини. Елементи множин

Поняття множини в математиці вважається первинним (неозначуваним). Інтуїтивно *множина* — це добре визначений набір (або список) об'єктів. Надалі множини ми будемо позначати великими латинськими літерами: A, B, C, ... Об'єкти, які складають множину називаються *елементами* множини або *членами* множини та позначаються малими латинськими літерами: a, b, c, ... Вважаємо, що зрозумілий зміст висловлення: *множина складається з елементів і визначається своїми елементами.* Висловлення "*a є елементом множини A*", або еквівалентно "*a належить множині A*" записується так:

$$a \in A.$$

Заперечення висловлення $a \in A$ записується так: $a \notin A$, і читається "*a не є елементом множини A*" або "*a не належить множині A*".

Є два методі описання множин. Перший з них — це перелічення усіх елементів множини. Наприклад,

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{a, b, c, d\}.$$

позначаються множини A, яка складається з чисел $0, 2, 3, 4$ та 5, та множина B, яка складається з літер a, b, c та d. У цьому випадку елементи множини відділяються комою та заключені у фігурні дужки $\{\quad\}$. Очевидно, що так зазвичай описують множини, які мають скінченну кількість елементів. Інший метод полягає в описанні властивостей, що характеризують елементи множини. Так, наприклад, для позначення того, що множина A складається з тих і лише тих елементів, які задовольняють певну умову φ, вживається запис

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}$$

або

$$A = \{x \colon \varphi(x)\}.$$

Наприклад запис

$$C = \{x \mid x - \text{ дійсне число, } x > 0\}$$

читається "C — множина таких x, що x — дійсне число та x більше за нуль", та визначає множину C додатніх дійсних чисел. У цьому випадку через x позначають елемент множини, символи "|" та " : " читаються "*такий, що*", а символ кома як "*і* ".

Приклад 1.2.1. Множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ можна визначити так:

$$\mathbb{N} = \{x \mid x - \text{ ціле число, } x > 0\}.$$

Зауважимо, що $-6 \notin \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ і $\pi \notin \mathbb{N}$.

Приклад 1.2.2. Інтервали дійсної прямої, означені нижче, часто використовуться в математиці. Нехай a і b — дійсні числа такі, що $a < b$. Тоді означимо:

$$\begin{array}{ll}
\text{відкритий інтервал від } a \text{ до } b: & (a,b) = \{x \mid a < x < b\}, \\
\text{замкений інтервал від } a \text{ до } b: & [a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \\
\text{відкрито-замкений інтервал від } a \text{ до } b: & (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, \\
\text{замкено-відкритий інтервал від } a \text{ до } b: & [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.
\end{array}$$

Відкрито-замкений та замкено-відкритий інтервали також називаються *напіввідкритими інтервалами*.

Дві множини A і B називаються *рівними* і це записують $A = B$, якщо вони мають однакові елементи, тобто кожен елемент множини A належить до B і кожен елемент множини B належить до A. Заперечення рівності множини $A = B$ записується так: $A \neq B$.

Приклад 1.2.3. Нехай $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{-1, 3\}$ і $C = \{-1, 3, 3, -1\}$. Тоді $A = B = C$. Зауважимо, що множина може бути визначена таким чином, що її елементи можуть бути не виписані, а також так, що у списку елементи множини можуть повторюватись.

Множини можуть бути скінченними та нескінченними. Множина називається *скінченною*, якщо вона містить n різних елементів, де n — довільне натуральне число, або не містить жодного елемента. В іншому випадку множина називається *нескінченною*. Якщо ж множина містить один елемент, то вона називається *одноелементною* або *одноточковою*.

1.2.2 Підмножини

Множина A є *підмножиною* множини B, і це записуватимемо

$$A \subseteq B \qquad \text{або} \qquad B \supseteq A,$$

якщо кожен елемент множини A належить B, тобто з $x \in A$ випливає $x \in B$. Також у цьому випадку кажуть, що A *міститься в* B, або B *містить* A. Заперечення висловлення $A \subseteq B$ записується $A \nsubseteq B$ або $B \nsupseteq A$ і так висловлення стверджує, що існує елемент x множини A такий, що $x \notin B$.

Приклад 1.2.4. Розглянемо множини:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x - \text{ непарне натуральне число}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}, \\ B &= \{x \mid x - \text{ натуральне число кратне 3}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}, \\ C &= \{x \mid x - \text{ первинне число, } x > 2\} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}. \end{aligned}$$

Тоді $C \subseteq A$, оскільки кожне первинне число,[1] яке перевищує 2 є непарним. З іншого боку маємо, що $B \nsubseteq A$, оскільки $6 \in B$, але $6 \notin A$.

Приклад 1.2.5. Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ позначимо множини *натуральних*, *цілих*, *раціональних*, *дійсних* і *комплексних чисел*, відповідно. Очевидно, що виконується такі включення:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Зауважимо, що включення $A \subseteq B$ не виключає можливості, що виконується рівність $A = B$. Означимо рівність двох множин також можна сформулювати наступним чином:

Означення. Дві множини A і B є *рівними* тоді і лише тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

У випадку, коли виконується умова $A \subseteq B$, але маємо, що $A \neq B$, то будемо говорити, що A є *власною підмножиною* в B, або ж B містить A *власно*, і це записуватимемо так: $A \subset B$. Очевидно, що $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Наша перша теорема випливає з попереднього означення.

Теорема 1.2.6. *Нехай A, B і C — довільні множини. Тоді:*

(i) *$A \subseteq A$;*
(ii) *якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;*
(iii) *якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.*

1.2.3 Універсальна та порожня множини

В довільному застосуванні теорії множин усі множини, які вивчаються, є підмножинами деякої фіксованої множини. Ми називатимемо цю множину *універсальною множиною* або ж *універсумом*, і позначатимемо її через $\mathfrak{U}$. Також є потреба ввести поняття *порожньої множини*, тобто множини, яка не містить жодних елементів.

[1] Первинні числа в старій українській математичній термінології називалися *простими*.

Порожня множина позначається через $\varnothing$ і вважається, що вона є скінченною і міститься у кожній іншій підмножині. Таким чином, для довільної множини A маємо:

$$\varnothing \subseteq A \subseteq \mathfrak{U}.$$

Приклад 1.2.7. В планіметрії (геометрії на площині) універсальна множина складається з усіх точок площини.

Приклад 1.2.8. Нехай

$$A = \{x \mid x^4 = 13, x \in \mathbb{N}\}.$$

Тоді множина A є порожньою, тобто $A = \varnothing$.

Приклад 1.2.9. Нехай $B = \{\varnothing\}$. Тоді маємо, що $B \neq \varnothing$, оскільки множина B містить один елемент.

1.2.4 Класи, набори, сім'ї та простори

Дуже часто буває так, що елементи множин є множинами. Наприклад, кожна площина в множині площин є множиною точок, а кожна множина ліній є також множиною точок. Для спрощення такої ситуації ми використовуватимемо поняття "*клас*", "*набір*" і "*сім'я*"[2], як синоніми поняття множина. Ми використовуватимемо поняття клас усіх підмножин замість множини усіх множин (оскільки останнє поняття є суперечливим), і поняття набір чи сім'я для множини класів. Терміни "*підклас*", "*піднабір*" і "*підсім'я*" будемо використовувати по аналогії до терміну підмножина.

Приклад 1.2.10. Членами класу $\big\{\{1,2,3\},\{2,3,5\},\{4,5\}\big\}$ є множини $\{1,2,3\}$, $\{2,3,5\}$ та $\{4,5\}$.

Приклад 1.2.11. *Надмножиною* множини A називається клас усіх підмножин множини A і позначається через $\mathscr{P}(A)$ або ж 2^A. У частковому випадку, якщо $A = \{a, b, c\}$, то маємо:

$$\mathscr{P}(A) = \big\{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\big\}.$$

У загальному випадку, якщо множина A є скінченною і має n елементів, то надмножина $\mathscr{P}(A)$ має 2^n елементів.

Під поняттям *простір* будемо розуміти певну непорожню множину, наділену деякою математичною структурою, наприклад векторний (лінійний) простір, метричний простір або топологічний простір. У цьому випадку елемент простору будемо називати *точкою*.

1.2.5 Операції над множинами

Об'єднанням двох множин A і B, надалі це ми будемо позначати через $A \cup B$, називається множина, яка складається з усіх елементів, які є елементами множини A, або ж елементами множини B, тобто

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

[2] В сучасній математичній літературі також використовується термін "*родина*", в сенсі сім'я.

Тут "або" використовується в розумінні "і/або".

Перетином двох множин A і B, надалі це ми будемо позначати через $A \cap B$, називається множина, яка складається з усіх елементів, які є елементами одночасно множини A та множини B, тобто

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, тобто, якщо множини A і B не мають спільних елементів, то A і B називаються *диз'юнктними* або *неперетинними*. Клас $\mathscr{A}$ множин називається *диз'юнктним класом множин*, якщо довільна пара різних множин з $\mathscr{A}$ є диз'юнктною.

Доповненням множини B стосовно множини A або, просто *різницею* A і B, яка позначається через $A \setminus B$, називається множина, яка складається з тих елементів множини A, які не є елементами множини B. Іншими словами

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Абсолютним доповненням або, просто, *доповненням* до множини A, позначається через A^c або $C_{\mathfrak{U}}(A)$, називається множина елементів, які не належать до A, тобто

$$A^c = \{x \mid (x \in \mathfrak{U}) \wedge (x \notin A)\}.$$

Іншими словами, A^c є різницею універсальної множини $\mathfrak{U}$ та множини A.

Приклад 1.2.12. На рис. 1.1 зображено діаграми Венна, які ілюструють об'єднання, перетин і різницю множин X та Y.

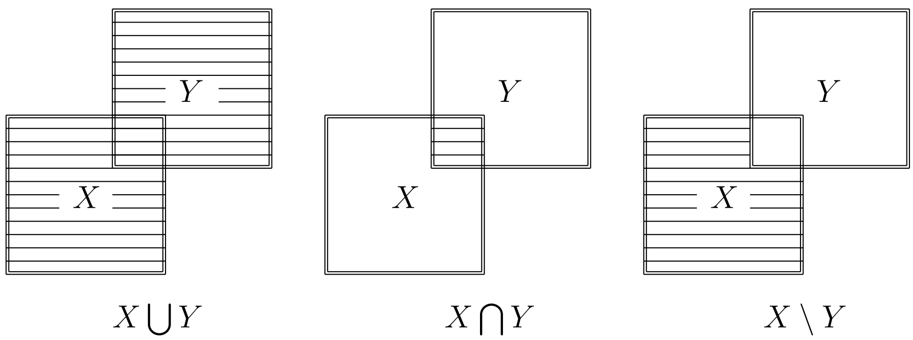


Рис. 1.1: Об'єднання, перетин і різниця множин

Симетричною різницею множин A і B називається така множина $A \triangle B$, яка складається з тих і лише тих елементів, які належать тільки одній з множин A чи B, тобто

$$A \triangle B = \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}.$$

Вправа 1.2.1. Зобразити діаграми Венна доповнення до множини та симетричної різниці двох множин.

Означення об'єднання та перетину двох множин поширюється на довільні сім'ї множин. А саме, нехай $\mathscr{I}$ — деяка множина індексів, така, що для довільного $i \in \mathscr{I}$ визначена множина A_i.

Об'єднанням сім'ї множин $\{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ називається така множина A, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній множині A_i. Позначається це так:

$$A = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in \mathscr{I}\} = \{x \mid \exists i \in \mathscr{I} (x \in A_i)\}.$$

Перетином сім'ї множин $\{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ називається така множина A, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать всім множинам A_i. Позначається це так:

$$A = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in \mathscr{I}\} = \{x \mid \forall i \in \mathscr{I} (x \in A_i)\}.$$

Зокрема, якщо $\mathscr{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$, то для об'єднання та перетину використовуються позначення

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{і} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

а якщо $\mathscr{I} = \mathbb{N}$, то записують

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{і} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

відповідно.

Твердження 1.2.13. *Для довільних множин A і B виконуються такі рівності:*

(i) $A \setminus B = A \cap B^c$;
(ii) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
(iii) $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$;
(iv) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$;
(v) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Доведення. Для демонстрації методу доведемо рівність (i).

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B^c)\} = A \cap B^v.$$

Інші рівності доводяться аналогічно. □

Вправа 1.2.2. Доведіть рівності $(ii) - (v)$ з твердження 1.2.13.

За твердженням 1.2.13 різниця та симетрична різниця можуть бути визначені через перетин і доповнення. З іншого боку, доповнення також можна визначити через різницю $A^c = \mathfrak{U} \setminus A$. Операції "$\cup$", "$\cap$" і $(\ )^c$ вважатимемо основними, а "$\setminus$" і "$\triangle$" виражатимемо через них, що дасть потым змогу нам порівнювати їх із законами логічних операцій.

Теорема 1.2.14. *Операції "$\cup$", "$\cap$" і $(\ )^c$ задовольняють такі закони:*

(i) *закони комутативності:*

(i_1) $A \cup B = B \cup A$;
(i_2) $A \cap B = B \cap A$;

(ii) *закони асоціативності:*

(ii_1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
(ii_2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) *закони дистрибутивності:*

(iii_1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(iii_2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(iv) *закони ідемпотентності:*

(iv_1) $A \cup A = A$;
(iv_2) $A \cap A = A$;

(v) *закони поглинання:*

(v_1) $A \cup (A \cap B) = A$;
(v_2) $A \cap (A \cup B) = A$;

(vi) *закони де Моргана:*

(vi_1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
(vi_2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

(vii) $(A^c)^c = A$;
($viii$) $A^c \cup A = \mathfrak{U}$;
(ix) $A \cap A^c = \varnothing$;
(x) $A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$;
(xi) $A \cap \mathfrak{U} = A$;
(xii) $A \cup \varnothing = A$;
($xiii$) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
(xiv) $\varnothing^c = \mathfrak{U}$;
(xv) $\mathfrak{U}^c = \varnothing$.

Доведення. Ми доведемо рівність (i_1).

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x \mid (x \in B) \vee (x \in A)\} = B \cup A.$$

Інші рівності доводяться аналогічно. □

Вправа 1.2.3. Доведіть рівності (i) – (xv) з теореми 1.2.14.

Приклад 1.2.15. Доведіть рівності:

(a) $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$;

(b) $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$.

Розв'язок. Ми доведемо лише рівність (a). Доведення рівності (b) аналогічне.

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B \Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \wedge x \in B \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1}) \vee (x \in A_n)) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1})) \vee (x \in A_n)) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1})) \wedge (x \in B)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A_n) \wedge (x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1 \wedge x \in B) \vee \cdots \vee (x \in A_n \wedge x \in B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1 \cap B) \vee \cdots \vee (x \in A_n \cap B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\,.
\end{aligned}$$

Приклад 1.2.16. Доведіть рівності:

(a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$;
(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

Розв'язок.

(a)
$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \setminus C).
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin C) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \wedge (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C).
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in A)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \in A \setminus C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A \setminus C).
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)^c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B^c) \wedge (x \in C^c)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B^c)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C^c)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Приклад 1.2.17. Доведіть рівність
$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B.$$

Розв'язок. Скориставшись відповідними твердженнями теореми 1.2.14, отримуємо
$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup ((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) = \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = \\ &= (A \cap (B \cup B^c)) \cup (B \cap (A \cup A^c)) = \\ &= (A \cap \mathfrak{U}) \cup (B \cap \mathfrak{U}) = \\ &= A \cup B. \end{aligned}$$

Приклад 1.2.18. Доведіть рівність
$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Розв'язок.
$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \setminus A) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B. \end{aligned}$$

Приклад 1.2.19. Доведіть рівність
$$A \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

Розв'язок.
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus A) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in A) \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0. \end{aligned}$$

Приклад 1.2.20. Доведіть рівність

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \wedge \neg(x \in B \setminus C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge 0) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}$$

Приклад 1.2.21. Доведіть рівність

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}$$

Приклад 1.2.22. Доведіть рівність

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)) \vee (x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in A \cap C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A \cap C) \wedge \neg(x \in A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C)) \vee
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vee((x \in A \wedge x \in C) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee\\
&\quad \vee((x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee\\
&\quad \vee((x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((0 \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee\\
&\qquad \vee((0 \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (0 \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee\\
&\qquad \vee(0 \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)) \vee (x \in A \wedge (x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \setminus C) \vee (x \in A \wedge x \in C \setminus B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \setminus C \cup C \setminus B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \triangle C) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \triangle C).
\end{aligned}
$$

Приклад 1.2.23. Доведіть рівність

$$(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

Розв'язок.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \triangle B) \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B \cup B \setminus A) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \vee\\
&\qquad \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \vee\\
&\qquad \vee((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \vee\\
&\qquad \vee((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \in A)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge 1) \vee (x \in B \wedge 1) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B.
\end{aligned}
$$

Приклад 1.2.24. Доведіть що для довільних підмножин A, B універсуму $\mathcal{U}$ виконується рівність

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

Розв'язок. Спростимо ліву та праву частину рівностей. Отримаємо

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) =$$

$$
\begin{aligned}
&= A \cap \mathcal{U} = \\
&= A
\end{aligned}
$$

і

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= A \cup (B \cap B^c) = \\
&= A \cup \varnothing = \\
&= A,
\end{aligned}
$$

і прирівнявши обидві частини, отримуємо, що в універсумі $\mathcal{U}$ виконується рівність

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

Приклад 1.2.25. Доведіть рівність

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Розв'язок. Скористаємося критерієм рівності множин і проведемо перетворення з обох боків.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A.
\end{aligned}
$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \cup (A \cap B).$$

Крім теоретико-множинних тотожностей у теорії множин між множинами існують і інші співвідношення. Розглянемо декілька таких прикладів.

Приклад 1.2.26. Доведіть, що для довільних підмножин A, B універсуму $\mathcal{U}$ виконується еквівалентність

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) Позаяк

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B) \;\Leftrightarrow\; (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \;\Leftrightarrow\; (x \notin B \Rightarrow x \notin A),$$

то виконується імплікація

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A.$$

Врахувавши цю імплікацію, отримуємо

$$x \in B^c \;\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin B \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A \;\Leftrightarrow\; x \in A^c.$$

($\Longleftarrow$) Нехай $B^c \subseteq A^c$. Тоді за попередньо доведеним маємо

$$(A^c)^c \subseteq (B^c)^c.$$

Оскільки

$$(A^c)^c = A \qquad \text{і} \qquad (B^c)^c = B,$$

то виконується включення $A \subseteq B$.

Приклад 1.2.27. Доведіть, що такі умови еквівалентні:

(1) $A \subseteq B$;
(2) $A \cup B = B$;
(3) $A \cap B = A$;
(4) $A \setminus B = \varnothing$.

Розв'язок. (1) $\Longrightarrow$ (2) Позаяк

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Rightarrow\; x \in B \vee x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in B$$

і

$$x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in A \cup B,$$

то маємо, що

$$(x \in A \cup B \;\Rightarrow\; x \in B) \wedge (x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cup B),$$

а отже з включення $A \subseteq B$ випливає рівність $A \cup B = B$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Оскільки $A \cup B = B$, то

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \wedge x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in A \wedge x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \;\Leftrightarrow\; x \in A.$$

А отже з $A \cup B = B$ випливає рівність $A \cap B = A$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Позаяк $A \cap B = A$, то

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0, \end{aligned}$$

а отже з рівності $A \cap B = A$ випливає, що $A \setminus B = \varnothing$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Оскільки $A \setminus B = \varnothing$, то

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow x \in A \wedge 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A \setminus B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in B, \end{aligned}$$

а отже з умови $A \setminus B = \varnothing$ випливає включення $A \subseteq B$.

Приклад 1.2.28. Доведіть, що виконується еквівалентність

$$A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C.$$

Розв'язок. ($\Longrightarrow$) З умови $A \cup B \subseteq C$ та імплікацій

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in C,$$

і

$$x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in C,$$

випливають включення $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$, в отже $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

($\Longleftarrow$) Оскільки $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$, то

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in C \vee x \in C \Rightarrow x \in C.$$

А отже отримуємо, що $A \cup B \subseteq C$.

Вправа 1.2.4. Доведіть, що

(a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
(b) $A \setminus B \subseteq A$;
(c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;
(d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
(e) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
(f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Вправа 1.2.5. Доведіть теоретико-множинні тотожності:

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
(c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
(d) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
(e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(f) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
(g) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
(h) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(i) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$, якщо A і B — підмножини універсуму $\mathcal{U}$;
(j) $A \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, якщо A і B — підмножини універсуму $\mathcal{U}$.

Вправа 1.2.6. Доведіть теоретико-множинні тотожності:

(a) $A \triangle B = B \triangle A$;
(b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
(c) $A \triangle (A \triangle B) = B$;
(d) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$;
(e) $(A \triangle B) \triangle (A \cup B) = A \cap B$;
(f) $A \setminus (A \triangle B) = A \cap B$;
(g) $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$;
(h) $(A \triangle B) \cap A = A \setminus B$;
(i) $A \triangle \varnothing = A$;

(j) $A \triangle A = \varnothing$;
(k) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$, якщо A і B — підмножини універсуму $\mathcal{U}$.

Вправа 1.2.7. Доведіть, що для довільних підмножин A і B універсуму $\mathcal{U}$ виконується еквівалентність

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B^c = \varnothing.$$

Вправа 1.2.8. Доведіть, що для довільних підмножин A, B і C універсуму $\mathcal{U}$ виконуються такі співвідношення:

(a) $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge A \subseteq C$;
(b) $A \cap B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B^c \cup C$;
(c) $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; A \cap B^c \subseteq C$;
(d) $(A \setminus B) \cup B = A \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A$;
(e) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup V) \;\Leftrightarrow\; C \subseteq A$;
(f) $A \cup B = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A = B$;
(g) $A \triangle B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A = B$;
(h) $A \setminus C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B^c \subseteq C$;
(i) $A \setminus C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq C \cup B$.

1.2.6 Декартовий добуток множин, відношення, відображення

Декартовий (*Картезіанський*) *добуток* множин X та Y позначається $X \times Y$ — це множина всеможливих упорядкованих пар (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

(див. рис. 1.2). Під *упорядкованою парою* (x, y) будемо розуміти одноелементну мно-

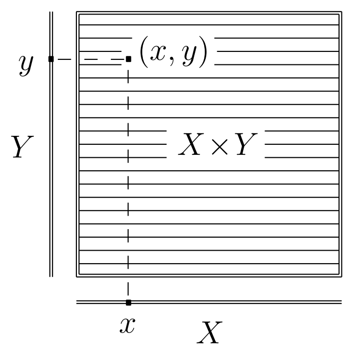


Рис. 1.2: Декартовий добуток двох множин

жину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару (x, y) можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент* x, *а на другому* — y. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин: $X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$ та $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$, для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини X і довільного натурального числа n через X^n позначатимемо *декартовий n-степінь* множини X, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та впорядкований набір з n елементів

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

Приклад 1.2.29. Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

Розв'язок. Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$.

Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ і $b \in B$. А отже $(a, b) \in A \times B$ і $A \times B \neq \varnothing$.

Приклад 1.2.30. Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$.

Розв'язок. $(\Rightarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і $A \times B \subseteq C \times D$.

Вправа 1.2.9. Доведіть такі рівності:

(*i*) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;
(*ii*) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;
(*iii*) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Вправа 1.2.10. Доведіть такі рівності:

(*i*) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(*ii*) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$;
(*iii*) $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C)$;
(*iv*) $(A \times D)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times D^c)$,

де $A, B \subseteq Y$ і $C, D \subseteq Y$.

Відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення f, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента x з X існує не більше одного елемента y з Y такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так $f\colon X \rightharpoonup Y$. У цьому випадку кажуть, що "f частково відображає X в Y". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* f, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x,y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* f.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина $\overline{x} = \{y \in Y \mid (x,y) \in f\}$ є не більше ніж одноточковою, хоча множина $\overline{y} = \{x \in X \mid (x,y) \in f\}$ може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення f.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з X, тобто $\mathbf{D}(f) = X$, називається *відображенням* з множини X в Y і позначається так $f\colon X \to Y$.

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x,y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові* $x \in X$ *часткове відображення* (*відображення*) f *ставить у відповідність елемент* $y \in Y$, і це позначатимемо так: $y = f(x)$. Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини X та Y, то для спрощення викладу відображення f позначатимемо так: $y = f(x)$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де Y — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

Приклад 1.2.31. 1. Відношення ρ_1, ρ_2, ρ_3 та ρ_4 на множині $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, які визначені наступним чином $\rho_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$, $\rho_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$, $\rho_3 = \{(0,0),(0,1)\}$ та $\rho_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = 1\}$, відповідно, не є частковими відображеннями (див. рис. 1.3).

2. Відношення φ_1 та φ_2 на множині $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, які визначені

$$\varphi_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \geqslant -1\} \qquad \text{і} \qquad \varphi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\},$$

відповідно, є частковими відображеннями, але не є відображеннями (див. рис. 1.4).

3. Відношення ψ_1 та ψ_2 на множині $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, які визначені

$$\psi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = y\} \qquad \text{і} \qquad \psi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x| = y\},$$

відповідно, є відображеннями (див. рис. 1.5).

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, то через $f(x)$ будемо позначати *образ* елемента x стосовно (частковового) відображення f, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x,y) \in f$; через $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ — *повний прообраз* елемента y стосовно (частковового) відображення f; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x\in A}\{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B}\{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати образом множини A та повним прообразом множини B стосовно (часткового) відображення f.

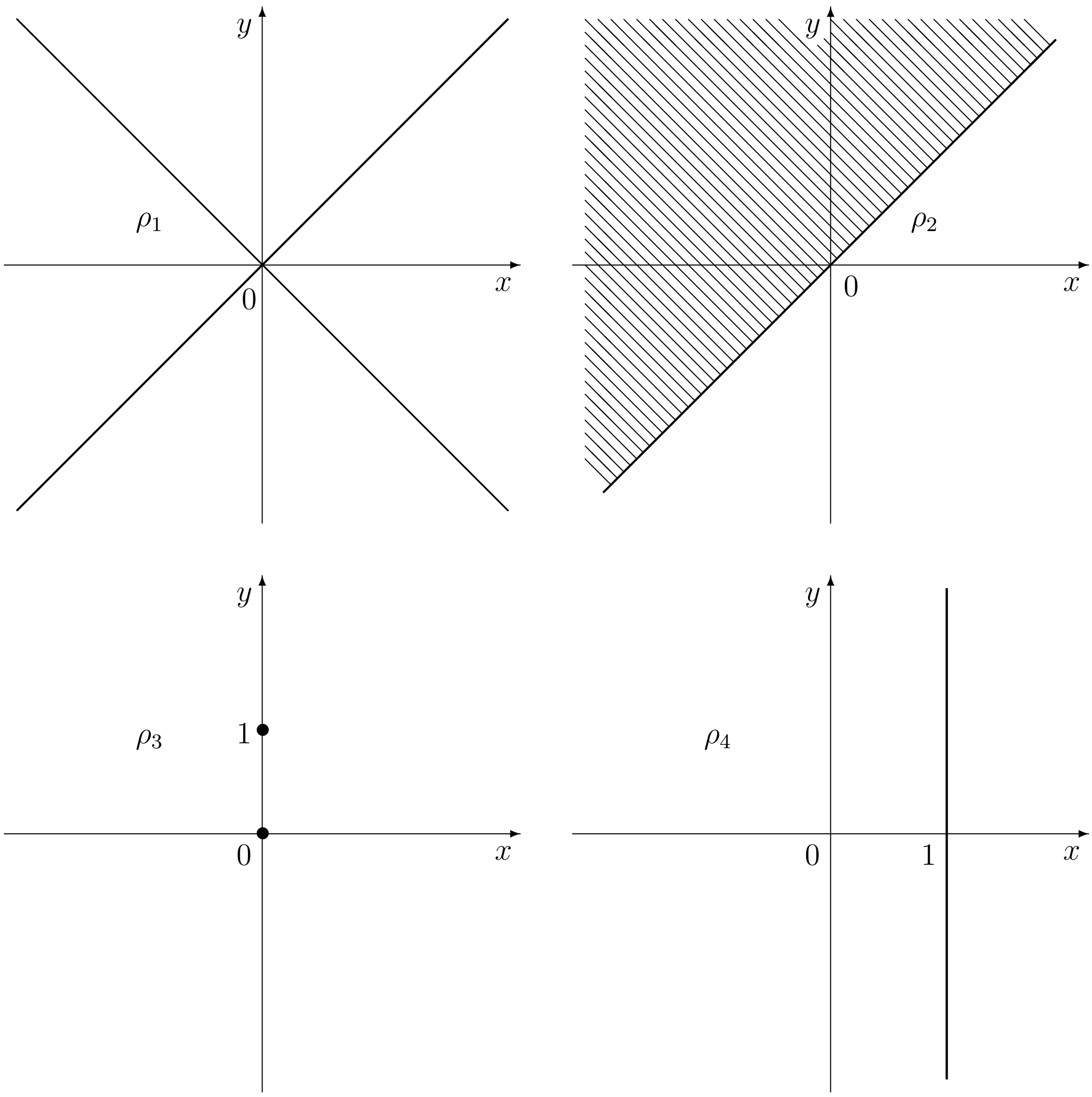


Рис. 1.3: Відношення, що не є частковими відображеннями

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$, *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент x з X такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

Приклад 1.2.32. Через sin позначимо відношення, яке кожному дійсному числу x ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

a) $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
b) $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
c) $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
d) $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

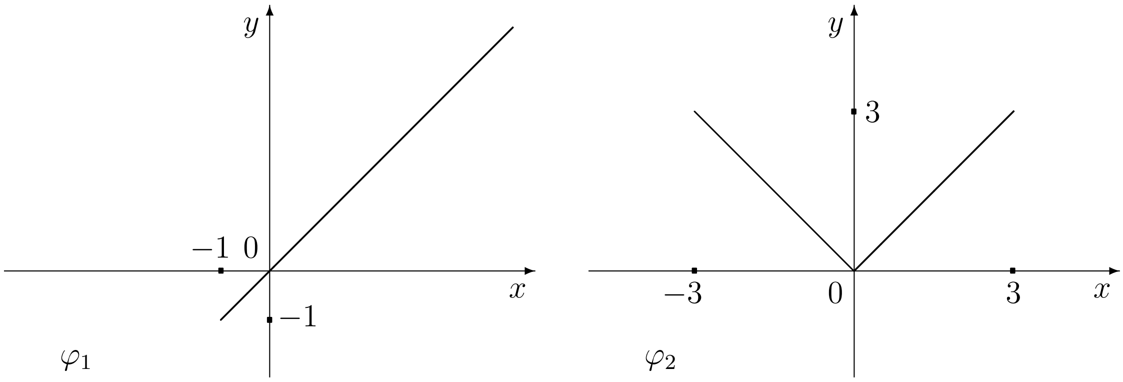


Рис. 1.4: Часткові відображення, що не є відображеннями

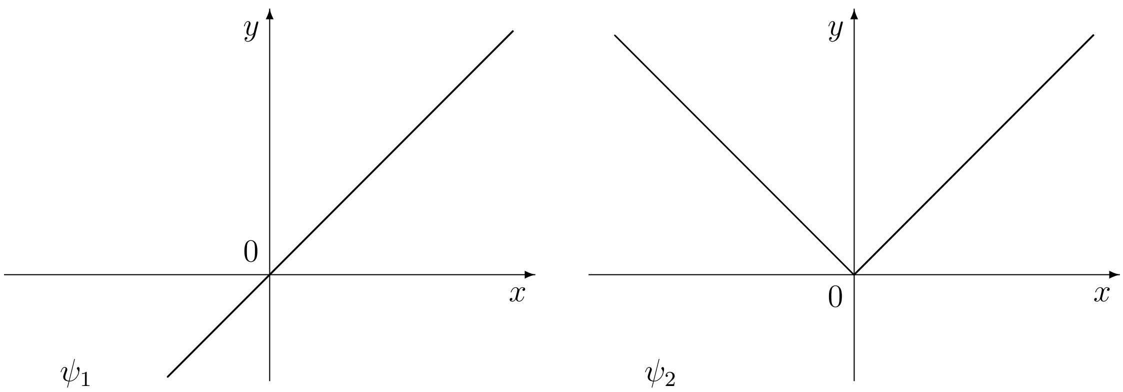


Рис. 1.5: Відображення

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

Приклад 1.2.33. Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$;

(iii) включення $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ не можна замінити рівністю;

(iv) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(v) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;

(vi) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;

(vii) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в X;

$(viii)$ $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в X;

(ix) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;

(x) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в Y;

(xi) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в Y;

(xii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Розв'язок. (i) Спочатку доведемо включення $f(A\cup B) \subseteq f(A)\cup f(B)$. Нехай $y \in f(A\cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A\cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A)\vee(x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

(ii) Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

(iii) Те, що включення $f(A\setminus B) \subseteq f(A)\setminus f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

(iv) Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(v) Те, що включення $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді
$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$
однак
$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

(vi) Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація
$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

(vii) Справді,
$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i), \end{aligned}$$
звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ Справді,
$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i). \end{aligned}$$

(ix) Приклад будується аналогічно, як і у випадку (vi).

(x) Справді, оскільки
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$
то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в X.

(xi) Справді, оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in \mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in \mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in \mathscr{J}} f^{-1}(A_i), \end{aligned}$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножини в X.

(xii) Оскільки

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \setminus D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D), \end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Вправа 1.2.11. Наведіть приклад відображення, для якого не виконується обернена імплікація в твердженні (vi) з прикладу 1.2.33.

Приклад 1.2.34. Доведіть, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

Розв'язок. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A\cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f\colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

Вправа 1.2.12. Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що виконуються такі умови:

(*i*) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;

(*ii*) $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ для довільних підмножин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, зокрема $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

Бінарним відношенням $\mathscr{R}$ на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

Відношенням еквівалентності (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині X називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються аксіоми:

1) *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

Приклад 1.2.35. Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;
б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;
в) подібність фігур на площині (в просторі);
г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення “мати можливість привітатися правою рукою” на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення “ділить” є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення “знайомий”, “друг” на множині, що складається з людей і відношення “прямі на площині мають спільну точку” є рефлексивними і симетричними, але не є транзитивними.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині X і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в X *класом суміжності елемента a за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність $X = \bigcup\limits_{a \in X} \widetilde{a}$.

Наступна теорема є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

Теорема 1.2.36. *Нехай X — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину X на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.*

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$ і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові x з множини X можна поставити у відповідність клас, що містить елемент x, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi\colon X \to X/\sim$. Відображення π називається *природним.*

Композиція $\beta \circ \alpha$ *двох відношень* $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{ існує елемент } b \in Y \text{ такий, що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

Вправа 1.2.13. Доведіть, що композиція

(i) часткових відображень є частковим відображенням;
(ii) відображень є відображенням;
(iii) ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
(iv) сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
(v) бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай X — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини X. Очевидно, що Δ_X — відношення еквівалентності на X.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$, то відношення

$$\alpha^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \alpha\}$$

називається *оберненим* до відношення α.

Приклад 1.2.37. Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y на X тоді і лише тоді, коли f — бієктивне відображення.

Розв'язок. Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де f^{-1} — обернене відношення до відношенням f, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини X.

Вправа 1.2.14. Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення f^{-1} до відношенням f є відображенням з Y в X тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X.$$

1.2.7 Потужність множини. Кардинали

Будемо говорити, що дві множини A і B є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що "*потужність множини A дорівнює потужності множини B*". Кожній множині X ставиться у відповідність деяке кардинальне число (кардинал), яке називається *потужністю* множини X і позначається через $|X|$. Рівність $|X| = |Y|$ виконується тоді і лише тоді, коли множини X і Y рівнопотужні. Для скінченної множини X її потужність дорівнює кількості її елементів. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що *потужність множини A злічення* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, будемо говорити, що *потужність множини A дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$. Множина називається *зліченною*, якщо вона або скінченна, або ж має потужність $\aleph_0$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис $|A| < |B|$ означає, що $|A| \leqslant |B|$ і $|A| \neq |B|$.

Вправа 1.2.15 (теорема Кантора–Берштейна). Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Вправа 1.2.16. Для довільної множини A виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Для кардинальних чисел визначені операції додавання та множення. *Сума* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \cup Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ і $X \cap Y = \varnothing$. *Добуток* кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ дорівнює потужності множини $X \times Y$, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Сума кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, а добуток кардиналів $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ позначається через $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ кардинальне число $2^{\mathfrak{m}}$, яке ми також будемо позначати через $\exp \mathfrak{m}$, визначається як потужність сім'ї всіх підмножин деякої множини X потужності $|X| = \mathfrak{m}$. Добре відомо, що $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. У більш загальному випадку означимо кардинал $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ як потужність множини всіх відображень з множини X у множину Y, де $|X| = \mathfrak{m}$ і $|Y| = \mathfrak{n}$. Можна довести, і ми це пропонуємо зробити читачеві, що для кардинальних чисел виконуються рівності

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_2}, \quad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}_1^{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}_2^{\mathfrak{m}} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}.$$

Нехай $\mathfrak{m}$ і $\mathfrak{n}$ — кардинали та $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$. Будемо говорити, що $\mathfrak{m}$ *не перевищує* $\mathfrak{n}$, або що $\mathfrak{n}$ *не менше* $\mathfrak{m}$, і це записуватимемо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, якщо існує ін'єктивне відображення з множини X у множину Y. Важливим фактом про нерівності між кардинальними числами є *теорема Кантора–Берштейна*:

$$\text{якщо} \quad \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \quad \text{і} \quad \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}, \quad \text{то} \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{n}.$$

Можна також довести, і це ми пропонуємо зробити читачеві, що $|f(X)| \leqslant |X|$ для довільного відображення f, визначеного на множині X. Звідси, зокрема, випливає, що сім'я всіх підмножин потужності $\leqslant \mathfrak{m}$ довільної множини потужності $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ має потужність $\leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Сума двох кардинальних чисел, хоча б одне з яких нескінченне, дорівнює не меншому з них. Схоже твердження виконується і для доьутку довільних двох кардинальних чисел, відмінних від нуля. Зокрема, маємо, що

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \qquad \text{для} \quad \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0.$$

Якщо $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ і $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, то будемо говорити, що *кардинал* $\mathfrak{m}$ *менше за кардинал* $\mathfrak{n}$, або, що *кардинальне число* $\mathfrak{n}$ *більше за кардинальне число* $\mathfrak{n}$, і в цьому випадку це записуватимемо так: $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ або $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}} \qquad \text{для довільного кардинального числа} \qquad \mathfrak{m},$$

зокрема, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Найменша (точна) верхня грань довільної множини $\{\mathfrak{m}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ кардиналів визначається як найменший кардинал $\mathfrak{m}$ такий, що $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ і позначається $\sup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathfrak{m}_s$, причому можна довести, що такий кардинал завжди існує.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

Приклад 1.2.38. Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| < \infty$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$\begin{aligned} &A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \\ &B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.39. Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$. Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{lllll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \ldots & c_{2n-1} = a_n, & \ldots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \ldots & c_{2n} = b_n, & \ldots . \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[dd] & a_3 \arrow[dd] & \cdots\ \cdots\ \cdots & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[dd] & \cdots\ \cdots\ \cdots \\
 & & & \cdots\ \cdots\ \cdots & & & \cdots\ \cdots\ \cdots \\
b_1 \arrow[uur] & b_2 \arrow[uur] & b_3 \arrow[uur] & \cdots\ \cdots\ \cdots \arrow[uur] & b_n \arrow[uur] & b_{n+1} \arrow[uur] & \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.6: До прикладу 1.2.39

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис. 1.6.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис. 1.7.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dd] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[dd] & \cdots\ \cdots\ \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[dd] & a_{n+1} \arrow[r] & \cdots\ \cdots\ \cdots \\
 & & & \cdots\ \quad\ \cdots & & & \cdots\ \quad\ \cdots \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[uu] & b_3 \arrow[r] & \cdots\ \cdots\ \cdots & b_n \arrow[r] & b_{n+1} \arrow[uu] & \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.7: До прикладу 1.2.39

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на рис. 1.7.

Вправа 1.2.17. Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина злічення.

Приклад 1.2.40. Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин злічення множина.

Розв'язок. Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$, і не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Приймемо

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\}, \\
A_3 &= \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{3,n}, \ldots\}, \\
\cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
A_n &= \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots, a_{n,n}, \ldots\}, \\
\cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Запропоновану нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис. 1.8.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.8: До прикладу 1.2.40

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис. 1.9.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на рис. 1.8 і 1.9.

Вправа 1.2.18. Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина зліченна.

Приклад 1.2.41. Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

Розв'язок. Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис. 1.10.

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на рис. 1.10.

Вправа 1.2.19. Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

Приклад 1.2.42. Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.9: До прикладу 1.2.40

Розв'язок. Нехай A_0 — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки A_0 — нескінченна, то $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, і т.д. Отже, з нескінченності множини A_0 випливає, що для довільного натурального числа n можна вибрати точку $a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в A_0 є зліченною та нескінченною.

Вправа 1.2.20. Для довільної нескінченної зліченної множини A знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$.

Приклад 1.2.43. Нехай A — нескінченна множина та B — скінченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

$$
\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1.10: До прикладу 1.2.41

За твердженням прикладу 1.2.38 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.21. Для множини A з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

(i) $|A \setminus B| = 0$;
(ii) $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа n;
(iii) $|A \setminus B| = \aleph_0$;
(iv) $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.44. Нехай A — незліченна множина та B — зліченна підмножина в A. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

Розв'язок. Оскільки за твердженням прикладу 1.2.39 об'єднання двох зліченних множин — зліченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.2.42 множина A_0 містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.2.39 множини C і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C\colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f\colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f\colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

Вправа 1.2.22. Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(i) $\mathbb{R}$;
(ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(v) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;
(vi) $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3,4,5\}$;
(vii) $\mathbb{R} \setminus (0,1)$;
(viii) $\mathbb{R} \setminus [0,1)$;
(ix) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$;
(x) $\mathbb{R} \setminus ([0,1] \cup (3,4))$;
(xi) $\mathbb{R} \setminus ([0,1] \cup \{3,4\})$;
(xii) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} [2i, 2i+1]$;
(xiii) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} (2i, 2i+1]$;
(xiv) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} (2i, 2i+1)$;
(xv) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} [2i, 2i+1]$;
(xvi) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} (2i, 2i+1]$;
(xvii) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} (2i, 2i+1)$.

Відповідь обґрунтуйте.

Приклад 1.2.45. Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a,b], \qquad [c,d), \qquad (e,f], \qquad (g,h)$$

рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.43 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a,b], \qquad [a,b), \qquad (a,b], \qquad (a,b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a,b], \qquad \text{і} \qquad [c,d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f\colon [a,b] \to [c,d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a,b]$ на $[c,d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a,b]$ і $[c,d]$ на паралельних прямих (див. рис. 1.11). Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки a і c та пряму $l_{b,d}$ через точки b і d, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через M. Тоді довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[a,b]$, перетинає $[c,d]$, і навпаки довільна пряма l, яка проходить через точку M та перетинає відрізок $[c,d]$, перетинає $[a,b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a,b]$ і $[c,d]$ (див. рис. 1.11).

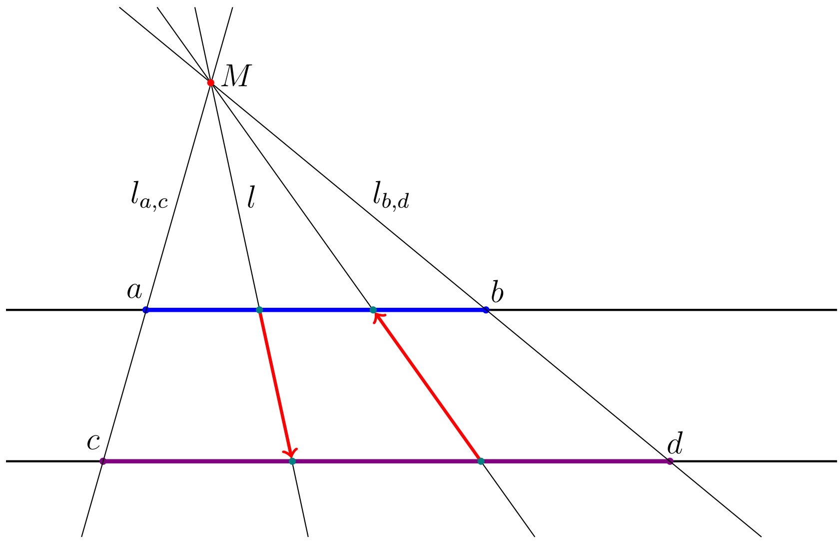


Рис. 1.11: До прикладу 1.2.45

Приклад 1.2.46. Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Розв'язок. За твердженням прикладу 1.2.45 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою $f(x) = \operatorname{tg} x$ бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

Приклад 1.2.47. Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Розв'язок. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_na_{n+1} \cdots ,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots ,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots .$$

Отже, ми визначили відображення $F\colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, $a \mapsto (b, c)$, яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

Вправа 1.2.23. Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його n-ий декартовий степінь

$$[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Вправа 1.2.24. Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її n-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу даігоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Приклад 1.2.48. Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ — незліченна множина.

Розв'язок. Припустимо протилежне: $[0, 1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0, 1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4} \cdots a_{1,n} \cdots , \\
a_2 = 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4} \cdots a_{2,n} \cdots , \\
a_3 = 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4} \cdots a_{3,n} \cdots , \\
a_4 = 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4} \cdots a_{4,n} \cdots , \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_n = 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4} \cdots a_{n,n} \cdots , \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots ,
\end{array}$$

причому $a_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільних натуральних чисел i та j.

Для довільного натурального числа i виберемо $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5 \cdots b_n \cdots .$$

Тоді $b \in [0, 1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_1$ для довільного натурального числа i, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0, 1]$ — незліченна множина.

1.2.8 Упорядкування. Порядкові числа

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині X називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині X будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина X із заданим на ній передпорядоком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується од на з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, тоді кажуть, що елементи x та y є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

Вправа 1.2.25. Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

Вправа 1.2.26. Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$ то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

Вправа 1.2.27. Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

Вправа 1.2.28. Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементам, який є максимальним?

Елемент a частково впорядкованої множини X називається *найменшою* (точною) *верхньою гранню* підмножини $A \subseteq X$, якщо $x \leqslant a$ для всіх $x \in A$ і якщо кожен елемент $b \in X$ такий, що $x \leqslant b$ для всіх $x \leqslant b$ для всіх $x \in A$, задовольняє нерівність $a \leqslant b$. *Найбільша (точна) нижня грань* підмножини $A \subseteq X$ визначається дуальним чином. Зауважимо, що найменша верхня грань частково впорядкованої множини X, якщо вона існує, є найбільшим елементом множини X, а найбільша нижня грань множини X, якщо вона існує, є найменшим елементом множини X.

Нехай X — довільна множина і $\leq$ — бінарне відношення на X. Будемо говорити, що відношення $\leq$ *направляє* або, що *множина X направлена відношенням* $\leq$, якщо відношення $\leq$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{D}1$) якщо $x \leq y$ і $y \leq x$, то $x \leq z$;
($\mathscr{D}2$) $x \leq x$ для кожного $x \in X$;
($\mathscr{D}3$) для довільних $x, y \in X$ існує такий елемент $z \in X$, що $x \leq z$ і $y \leq z$.

Підмножина A множини X, направленої відношенням $\leq$, *конфінальна* в X, якщо для кожного елемента $x \in X$ існує такий елемент $a \in A$, що $x \leq a$. Конфінальні підмножини лінійно впорядкованої множини та частково впорядкованої множини визначаються аналогічно.

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а це порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Будемо говорити, що відображення $f\colon (X,\leq)\to(Y,\leqq)$ частково впорядкованих множини $(X,\leq)$ і $(Y,\leqq)$ *зберігає порядок* або є *монотонним*, якщо для для довільних $x_1,x_2\in X$ з $x_1\leq x_2$ випливає $f(x_1)\leqq f(x_2)$. Якщо існує бієктивне монотонне відображення лінійно впорядкованої множини X на лінійно впорядковану множину Y, то будемо говорити, що X і Y є *подібними* або *порядково ізоморфними*, а саме це відображення називається *відображенням подібності* або *порядковим ізоморфізмом* лінійно впорядкованих множин X і Y. Бієктивне монотонне відображення $f\colon (X,\leq)\to(Y,\leqq)$ частково впорядкованих множини $(X,\leq)$ і $(Y,\leqq)$, обернене до якого є монотонним, називається *відображенням подібності* або *порядковим ізоморфізмом* частково впорядкованих множин $(X,\leq)$ і $(Y,\leqq)$.

Вправа 1.2.29. Чи бієктивне монотонне відображення частково впорядкованої множини $(X,\leq)$ на частково впорядковану множину $(Y,\leqq)$ є порядковим ізоморфізмом? Відповідь аргументуйте.

Кожній цілком впорядкованій множині X приписується деяке порядкове число, або ординал α, яке називається *порядковим типом* множини X. Порядкові типи цілком впорядкованих множини X і Y *однакові* тоді і лише тоді, коли X і Y подібні.

Оскільки кожен порядковий ізоморфізм є ін'єктивним відображення частково впорядкованих множин, то з подібності частково впорядкованих множини $(X,\leq)$ і $(Y,\leqq)$ випливає рівність $|X|=|Y|$. Тому кожному ординалу α відповідає деякий кардинал — потужність цілком впорядкованої множини порядкового типу α, і цей кардинал називається *потужністю ординала* α і позначається $|\alpha|$. Якщо $|\alpha|\leqslant\aleph_0$, то ординал α називається *зліченним*.

Нехай α і β — ординали, які є порядковими типами цілком впорядкованих множини X і Y. Будемо говорити, що ординал α *менше* β або β *більше* α, і в цьому випадку писатимемо $\alpha<\beta$ або $\beta>\alpha$, якщо існує такий елемент $y_0\in Y$, що цілком впорядковані множини X і $\{y\in Y\mid y<y_0\}$ подібні. Можна довести, і це ми пропонуємо читачеві, що кожна множина ординалів є цілком впорядкована відношенням $\leqslant$, яке збігається з відношенням $<\cup=$. Також, кожна цілком впорядкована множини порядкового типу α подібна множині всіх ординалів, менших α, яка лінійно впорядкована відношенням $\leqslant$.

Ординал λ називається *граничним*, якщо не існує порядкового числа, яке безпосередньо передує ординалу λ, тобто для кожного ординалу $\xi<\lambda$ існує ординал α такий, що $\xi<\alpha<\lambda$.

Якщо ординал ξ безпосередньо передує ординалу α, то будемо говорити, що ξ є *попередником* ординала α, ів цьому випадку будемо писати $\alpha=\xi+1$, сам ординал α називатимемо *наступником* ординала ξ. У кожного ординала є наступним, більше того для довільного ординала α і для довільного невід'ємного цілого числа n визначимо за індукцією ординал $\alpha+n$, прийнявши $\alpha+0=\alpha$ і $\alpha+n=(\alpha+(n-1))+1$ для $n\in\mathbb{N}$. Виявляється, що довільний ординал єдиним чином зображається у вигляді $\lambda+n$, де λ — деякий граничний ординал, а n — невід'ємне ціле число. Ординал $\lambda+n$ називається *парним* (*непарним*), якщо n — парне (непарне) число.

Якщо множина всіх ординалів, менших граничного ординала λ, містить підмножину A порядкового типу α таку, що для кожного ординала $\xi < \lambda$ існує ординал $\xi' \in A$, який задовольняє нерівність $\xi < \xi' < \lambda$, то кажуть, що *ординал α конфінальний ординалу λ*.

Нескінченний ординал λ (тобто порядковий тип деякої нескінченної цілком впорядкованої множини) називається *початковим* або *ініціальним*, якщо λ — найменший серед усіх ординалів α таких, що $|\alpha| = |\lambda|$, тобто якщо $|\xi| < |\lambda|$ для довільного ординала $\xi < \lambda$. Ініціальний ординал λ називається *регулярним*, якщо не існує ординала $\alpha < \lambda$, який конфінальний λ.

Для кожного кардинала $\mathfrak{m}$ існує ініціальний ординал λ такий, що $|\lambda| = \mathfrak{m}$, і цей ординал λ єдиний (див. теорему Цермело в підрозділі 1.2.9). Кардинал $\mathfrak{m}$ називається *регулярним*, якщо відповідний йому ординал λ такий, що $|\lambda| = \mathfrak{m}$ є регулярним. Ініціальний ординал потужності $\aleph_0$ позначається через ω_0, і він є порядковим типом множини всіх натуральних чисел зі звичайним порядком.

Найменший ординал, потужність якого більша за $\aleph_0$, тобто найменший незлічений ординал, позначається через ω_1, а його потужність через $\aleph_1$. Рівність $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ називається *гіпотезою континуума* або *континуум гіпотезою*. Гіпотеза континуума незалежить від аксіом теорії множин. Для кожної послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ординалів, менших за ω_1 існує такий ординал $\alpha < \omega_1$, що $\alpha_1 < \alpha$ для $i \in \mathbb{N}$. Найменший ординал потужності, більшої за $\aleph_1$, позначається через ω_2, а його потужність через $\aleph_1$. Більш загальним чиномЮ, кожному ординалу α відповідають кардинал $\aleph_\alpha$ та ординал ω_α, який є ініціальним ординалом потужності $\aleph_\alpha$. Можна довести, що кожен кардинал дорівнює $\aleph_\alpha$ для деякого ординала α.

Нехай α — деякий ординал і X — довільна множина. Під *трансфінітною послідовністю типу α* зі значенням у множині X розуміють довільне відображення f множини $W(\alpha)$, яка складається з усіх ординалів менших за ординал α, у множину X. Елемент множини X, поставлений у відповідність ординалу $\xi < \alpha$, позначається x_ξ, а не $f(\xi)$, а сама трансфінітна послідовність позначається

$$x_1, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \quad \xi < \alpha.$$

Трансфінітна послідовність

$$A_1, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \quad \xi < \alpha,$$

множин називається *зростаючою*, якщо $A_{\xi'} \subseteq A_\xi$ для $\xi' < \xi < \alpha$, і *спадною*, якщо $A_\xi \subseteq A_{\xi'}$ для $\xi' < \xi < \alpha$.

Для визначення трансфінітних послідовностей зазвичай використовується

Теорема про визначення за трансфінітною індукцією. *Нехай дано довільну множину Z і деякий ординал α. Нехай G — множина всіх трансфінітних послідовностей типів, менших за ординал α, зі значеннями в множині X. Для кожного відображення $h\colon G \to Z$ існує тоді в точності одна трансфінітна послідовність f типу α така, що*

$$f(\xi) = h(f|W(\xi)) \quad \textit{для всіх} \quad \xi < \alpha,$$

де $f|W(\xi)$ — трансфінітна послідовність типу ξ, отримана звуженням відображення f на множину $W(\xi)$ всіх ординалів, менших за ординал ξ.

Теорему про визначення за трансфінітною індукцією часто використовують у випадку, коли Z є сім'єю всіх підмножин множини X. У цьому випадку зазвичай відображення h визначається трьома різними способами. перша формула визначає значення відображення h на послідовності g порядкового типу 0, де 0 — порядковий тип порожньої множини, яка є порожньою послідовністю, тобто значення $h(\varnothing)$. Друга формула визначає значення $h(g)$ на всіх послідовностях g порядкового типу $\xi+1$, і, нарешті, третя формула визначає значення $h(g)$ на всіх послідовностях g порядковий тип яких є граничним ординалом. Наприклад, перша формула може бути такою:

$$h(\varnothing) = A,$$

друга може мати вигляд

$$h(g) = F(g(\xi)),$$

а третьою може бути формула

$$h(g) = G\Big(\bigcup_{\xi<\lambda} g(\xi)\Big) \qquad \text{або} \qquad h(g) = G\Big(\bigcap_{\xi<\lambda} g(\xi)\Big),$$

де F і G — дані функції й A — деяка множина. Тоді послідовність

$$A_1, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \quad \xi < \alpha,$$

яка існує за теоремою про про визначення за трансфінітною індукцією, задовольняє такі умови:

$$A_0 = A, \qquad A_{\xi+1} = F(A_\xi),$$

$$A_\lambda = G\Big(\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi\Big) \qquad \text{або} \qquad A_\lambda = G\Big(\bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi\Big).$$

Отже, для того щоб визначити трансфінітну послідовність

$$A_1, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots, \quad \xi < \alpha,$$

достатньо визначити множину A_0 та описати, як множина $A_{\xi+1}$ залежить від множини A_ξ, і як множина A_λ залежить або від $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$, або від $\bigcap\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$.

Нехай множина X цілком впорядкована відношенням $\leqslant$. Тоді кожна підмножина $A \subseteq X$, для кожного $x_0 \in X$, яка задовольняє умову

$$\text{якщо} \qquad \{x \in X \mid x < x_0\} \subseteq A, \qquad \text{то} \qquad x_0 \in A,$$

збігається з множиною X. Цей факт служить основою для індуктивних доведень. Ми будемо використовувати його як у випадку, коли X — множина натуральних чисел — *доведення за математичною індукцією*, так і у випадку, коли X — множина всіх ординалів, менших даного ординала α — *доведення за трансфінітною індукцією*.

1.2.9 Аксіома вибору та еквівалентні їй твердження

Аксіома вибору часто використовується в цих лекціях, хоча на факт її використання зазвичай не звертають уваги. Однак інколи зручно користуватися аксіомою вибору не в її первинному вигляді, а в одній з її альтернативних форм, які є важливими теоремами теорії множин. Далі ми сформулюємо теорему Цермело про цілком впорядкування та два принципи максимума, які є альтернативними формами аксіоми вибору.

Нехай дано множину X і властивість $\mathscr{P}$, яку можуть задовольняти підмножини множини X. Будемо говорити, що $\mathscr{P}$ є *властивістю скінченного характеру*, якщо порожня множина задовольняє властивість $\mathscr{P}$, а множина $A \subseteq X$ задовольняє властивість $\mathscr{P}$ тоді і лише тоді, коли її задовольняє кожна скінченна підмножина A.

Аксіома вибору. Для кожної сім'ї $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ непорожніх множин існує відображення $f\colon \mathcal{S} \to \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ таке, що $f(x) \in X_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$.

Теорема Цермело про цілком впорядкованість. На кожній множині X існує відношення $\leq$, яке цілком впорядковує множину X.

Лема Тейхмюллера–Т'юкі. Нехай дано множину X і деяку властивість $\mathscr{P}$ її підмножин. Якщо $\mathscr{P}$ є властивістю скінченного характеру, то кожна множинв $A \subseteq X$, яка задовольняє властивість $\mathscr{P}$, міститься в множині $B \subseteq X$, яка задовольняє властивість $\mathscr{P}$ і є максимальним елементом у впорядкований за включенням сім'ї всіх підмножин множини X, що задовольняють властивість $\mathscr{P}$.

Лема Куратовського–Цорна. Якщо для кожної лінійно впорядкованої підмножини A множини X, упорядкованої відношенням $\leq$, існує такий елемент $x_0 \in X$, що $x \leq x_0$ для всіх $x \in A$, то в X існує максимальний елемент.

Доведення еквівалентності аксіоми вибору, теореми Цермело про цілком впорядкованість, леми Тейхмюллера–Т'юкі та леми Куратовського–Цорна можна знайти в кожній класичній монографії з теорії множин, а також в монографії Енґелькінґа [1,2].

Розділ 2

Топологія метричних просторів

2.1 Метрики та метричні простори

Означення 2.1.1. Нехай X — непорожня множина. Відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, де $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, називається *метрикою* на X, якщо виконуються такі умови:

(*i*) $d(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$, для $x, y \in X$;
(*ii*) $d(x,y) = d(y,x)$ для всіх $x, y \in X$ (функція d — симетрична);
(*iii*) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X,d), де X — деяка непорожня множина, а d — метрика на X, називається *метричним простором*. Інколи для спрощення запису, метричний простір (X,d) будемо позначати просто через X у випадку, коли з контексту зрозуміло, яка метрика визначена на множині X. Елементи метричного простору будемо називати точками.

Якщо (X,d) — метричний простір і Y — підмножина множини X, то, очевидно, що звуження $d_Y\colon Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ відображення $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ на $Y \times Y$ є метрикою на Y. У цьому випадку ми будемо говорити, що (Y, d_Y) є *метричним підпростором* метричного простору (X,d). Очевидно, що метричний простір (Y,ρ) є (метричним) підпростором метричного простору (X,d) тоді і лише тоді, коли $Y \subseteq X$ і $d|_{Y\times Y} = \rho$. Також, якщо (Y,ρ) є підпростором метричного простору (X,d), то будемо говорити що метрика d *індукує* (*породжує*) метрику ρ на Y, або ρ є *індукованою метрикою* з метричного простору (X,d) на множині $Y \subseteq X$.

Приклад 2.1.2. Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, називається *евклідовою метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2.1.3. Нехай n і p — довільні натуральні числа. Відображення $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_p\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p + \ldots + |x_n-y_n|^p},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, є метрикою на $\mathbb{R}^n$. Якщо $p = 1$, то метрика d_p на $\mathbb{R}^n$ визначається так:

$$d_1\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|.$$

Приклад 2.1.4. Нехай n — довільне натуральне число. Відображення $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, означене за формулою

$$d_\infty\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) = \max\left\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\right\},$$

де $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, називається max-*метрикою* на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $d = d_2$ у випадку $p = 2$, і у випадку нескінченного зростання $p \to +\infty$ значення функції d_p наближається до значення функції d_∞ на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ і $\mathbb{C}^n$, а $(\mathbb{N}^n,d)$ $((\mathbb{Z}^n,d)$, $(\mathbb{Q}^n,d)$, $(\mathbb{R}^n,d))$ є метричним підпростором метричного простору $(\mathbb{C}^n,d)$. Аналогічні твердження виконуються для метрик d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Вправа 2.1.1. Доведіть, що функції d, d_p і d_∞ є метриками на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$).

Вправа 2.1.2. Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, відповідно) індукують *звичайну метрику*

$$d_u(x,y) = |x-y| \tag{2.1}$$

на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$, відповідно).

Приклад 2.1.5. На довільній непорожній множині X *дискретна метрика* $\delta\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ визначається так:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y;\\ 1, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

$x,y\in X$. Множина із заданою най ній дискретною метрикою називається *дискретним метричним простором*, або просто *дискретним простором*.

Вправа 2.1.3. Доведіть, що дискретна метрика на довільній непорожній множині є (насправді) метрикою.

Вправа 2.1.4. Доведіть, що метрики d, d_p і d_∞ на $\mathbb{N}^n$ ($\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$) індукують на $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ дискретну метрику.

Приклад 2.1.6. Відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ означимо за формулою

$$d_{\pi\varrho}\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \begin{cases} |x_2-y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1;\\ |x_2|+|x_1-y_1|+|y_2|, & \text{якщо } x_1\neq y_1, \end{cases}$$

де $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$. Так визначене відображення $d_{\pi\varrho}$ називається *метрикою прерій*, або *метрикою виноградника* на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.5. Доведіть, що відображення $d_{\pi\varrho}\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$.

Вправа 2.1.6. Доведіть, що метрика $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ індукує звичайну метрику на $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, відповідно).

Вправа 2.1.7. Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для вищих вимірів $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$.

Вправа 2.1.8. Побудуйте аналог метрики $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$ для декартового добутку метричних просторів $(X,d_X)\times(Y,d_Y)$.

2.2 Топологія метричного простору

Означення 2.2.1. Нехай (X, d) — метричний простір, r — довільне дійсне додатне число та x — довільна точка в (X, d). Множина

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

називається *відкритою кулею радіуса r в точці x*, а множина

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

називається *замкненою кулею радіуса r в точці x*.

Очевидно, що в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою метрикою (див. приклад 2.1.2) замкнена $\overline{B}_r(x)$ та відкрита $B_r(x)$ кулі — це звичайна куля радіуса r в точці x і звичайна куля радіуса r в точці x без обмежуючої її сфери. У випадку дискретного метричного простору (див. приклад 2.1.5) маємо

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } r > 1 \end{cases}$$

і

$$\overline{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } r < 1; \\ X, & \text{якщо } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Вправа 2.2.1. Опишіть відкриті та замкнені кулі у випадку метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$.

Означення 2.2.2. Послідовність $\{x_n\}$ метричного простору (X, d) *збігається* до точки $x_0 \in X$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. У цьому випадку ми кажемо, що точка x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$ у метричному просторі (X, d) і записуватимемо це так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності в метричному просторі (X, d) є *стала послідовність*, тобто така послідовність $\{x_n\}$, що $x_n = x_0 \in X$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 2.2.2. Опишіть всі збіжні послідовності в дискретному метричному просторі.

Вправа 2.2.3. Перевірте чи послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною в $(0, 1)$ із звичайною метрикою (2.1).

Означення 2.2.3. Точка x_0 називається *точкою дотику* множини A в метричному просторі (X, d), якщо існує послідовність в A, збіжна в (X, d) до точки x_0.

Твердження 2.2.4. *Точка x_0 є точкою дотику множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.*

Доведення. Якщо x_0 — точка дотику множини A в метричному просторі (X,d), то існує послідовність $\{x_n\}$ в A, яка збігається в (X,d) до точки x_0. Отже для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тому кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A.

Припустимо, що кожна відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у x_0 містить точку з множини A. Через x_n позначимо довільну точку, яка лежить у кулі $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Тоді очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. □

Легко бачити, що кожна точка множини A в метричному просторі (X,d) є точкою дотику множини A. Множину точок дотику множини A в метричному просторі (X,d) будемо позначати через $\overline{A}$, і називатимемо *замикання множини* A в метричному просторі (X,d). Очевидно, що $A \subseteq \overline{A}$ для довільної множини A метричного простору (X,d).

Множина A в метричному просторі (X,d) називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої точки дотику, тобто $A = \overline{A}$.

З означення точки дотику випливає таке твердження.

Твердження 2.2.5. *Множина A метричного простору (X,d) є замкненою тоді і тільки тоді, коли границя кожної збіжної послідовності точок з A міститься в A.*

Означення 2.2.6. Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини A в метричному просторі (X,d), якщо деяка відкрита куля $B_r(x_0)$ з центом в точці x_0 міститься в A.

Означення 2.2.7. Множина A в метричному просторі (X,d) називається відкритою, якщо всі її точки є внутрішніми.

Твердження 2.2.8. *Множина A метричного простору (X,d) є відкритою тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).*

Доведення. Якщо множина A метричного простору (X,d) є відкритою, то кожна її точка x разом з деякою її відкритою кулею $B_r(x)$ міститься в A. Це означає, що множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в метричному просторі (X,d). А отже $X \setminus A$ є замкненою множиною в (X,d).

Припустимо, що $X \setminus A$ — замкнена множина в (X,d). Тоді множина $X \setminus A$ містить усі свої точки дотику в (X,d), а отже кожна точка $x \in X \setminus (X \setminus A) = A$ має відкриту кулю $B_r(x)$, яка міститься в A. Тому множина A є відкритою в метричному просторі (X,d). □

З аксіоми трикутника випливає, що кожна відрита куля в метричному просторі є відкритою множиною, а кожна замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною в ньому. Також, кожна підмножина дискретного метричного простору є одночасно відкритою та замкненою. Такі підмножини ми будемо надалі називати *відкрито-замкненими*. Зауважимо, що в метричних просторах існують підмножини, які не є ні відкритими, ні замкненими. Зокрема в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою (2.1) такими є множина раціональних точок, множина ірраціональних точок і послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

З означення відкритої множини випливають такі властивості відкритих множин:

Твердження 2.2.9. *Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:*

(i) *$\varnothing$ і X — відкриті множини в (X, d);*
(ii) *перетин двох відкритих множин є відкритою множиною в (X, d);*
(iii) *об'єднання довільної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною в (X, d).*

Доведення. (i) Порожня множина $\varnothing$ є відкритою множиною в (X, d), бо $\varnothing$ не містить жодної точки. Множина X є відкритою в (X, d), оскільки кожна точка з X міститься разом із всіма своїми околами в множині X.

(ii) Нехай A і B — відкриті множини в (X, d) і $x \in A \cap B$. Існують такі дійсні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, що $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тоді, очевидно, що $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ і $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$, а отже $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

(iii) Об'єднання відкритих множин є відкритою множиною в (X, d), бо кожна точка з об'єднання входить в об'єднання разом з тим ж околом, з яким вона входить в елемент об'єднання, що її містить. □

З тверджень 2.2.8, 2.2.9 і законів де Моргана (див. теорема 1.2.14(vi)) випливає

Твердження 2.2.10. *Нехай (X, d) — метричний простір. Тоді:*

(i) *$\varnothing$ і X — замкнені множини в (X, d);*
(ii) *об'єднання двох замкнених множин є замкненою множиною в (X, d);*
(iii) *перетин довільної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною в (X, d).*

Таким чином, ми довели, що кожна метрика d на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин в (X, d), а також сім'ю замкнених підмножин в (X, d), які за твердженнями 2.2.9 і 2.2.10 мають дуальні властивості стосовно булевих операцій. Також, різні метрики на фіксованій множині X породжують однакові сім'ї відкритих (а отже і замкнених) множин.

Приклад 2.2.11. Позаяк у кожен квадрат можна вписати коло, у яке можна вписати ромбічний квадрат, а в останній також можна вписати коло і т. д. так, щоб центри кіл та точки перетину діагоналей квадратів збігалися (див. рис. 2.1), то отримуємо,

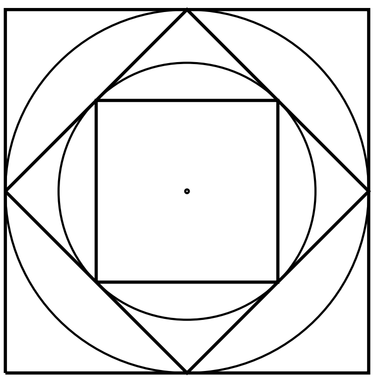


Рис. 2.1: Вписування квадрата у коло та в коло квадрат

що метрики d, d_1 і d_∞ на $\mathbb{R}^2$ породжують однакові сім'ї відкритих, а отже й однакові сім'ї замкнених множин. Це випливає з того факту, що відкриті кулі в цих метричних просторах є областями, які обмежені відповідними квадратами чи колами.

Вправа 2.2.4. Доведіть, якщо (X, d) — метричний простір, то:

(i) $\widetilde{d}_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $x, y \in X$;
(ii) $\widetilde{d}_2(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$;
(iii) $\widetilde{d}_3(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $x, y \in X$,

також метрики на X. Причому всі ці метрики породжують однакові сім'ї відкритих множин.

З означення внутрішньої точки множини в метричному просторі та з твердження 2.2.9 випливає таке твердження:

Твердження 2.2.12. *Множина внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) — це найбільша відкрита множина в (X, d), яка міститься в A.*

Надалі множину внутрішніх точок підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *внутрішністю множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\operatorname{Int}(A)$. Тоді з твердження 2.2.12 випливає така рівність:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{B \mid B \subseteq A \text{ і } B - \text{відкрита множина в } (X, d)\}.$$

З твердження 2.2.12 і законів де Моргана (див. теорема 1.2.14(vi)) випливає

Твердження 2.2.13. *Множина точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) — це найменша замкнена множина в (X, d), яка містить множину A.*

Надалі множину точок дотику підмножини A метричного простору (X, d) називатимемо *замиканням множини* A в метричному просторі (X, d) і позначатимемо її через $\overline{A}$ або $\operatorname{Cl}(A)$. Тоді з твердження 2.2.13 випливає така рівність:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ і } B - \text{замкнена множина в } (X, d)\}.$$

Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) позначимо

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A),$$

і називатимемо $\operatorname{Fr}(A)$ *межею* множини A в метричному просторі (X, d).

Очевидно, що в кожному дискретному метричному просторі межа кожної його підмножини є порожньою множиною.

Вправа 2.2.5. Доведіть, що межа кожної множини метричного простору (X, d) є замкненою множиною.

Вправа 2.2.6. Доведіть, що кожна відкрита множини в метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ є відкритою $(\mathbb{R}^2, d_{\pi\varrho})$, але обернене твердження не виконується.

Вправа 2.2.7. Доведіть, що в скінченному метричному просторі кожна множина є одночасно відкритою та замкненою.

Вправа 2.2.8. Доведіть, що в довільному метричному просторі одноточкова множина є замкненою. Виведіть звідси, що в довільному метричному просторі кожна скінченна множина є замкненою.

Вправа 2.2.9. Доведіть, що в метричному просторі $(\mathbb{R}, d_u)$, де d_u — звичайна метрика (див. вправу 2.1.2), відкритими множинами є об'єднання не більше, ніж зліченної кількості попарно неперетинних інтервалів (під *інтервалами* в $\mathbb{R}$ вважаємо множини вигляду (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$).

Вправа 2.2.10. Наведіть приклад нескінченного метричного простору, у якому кожна одноточкова множина є відкритою.

Означення 2.2.14. Точка x_0 називається *граничною точкою* множини A в метричному просторі (X, d), якщо вона є границею деякої послідовності елементів множини A, відмінних від x_0.

Множина усіх граничних точок множини A в метричному просторі (X, d) називається *похідною множиною* множини A і позначається A'.

Вправа 2.2.11. Доведіть, що x_0 є граничною точкою множини A в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли в кожній кулі $B_\varepsilon(x_0)$ з центром у точці x_0 міститься деякий елемент $a \neq x_0$ множини A.

Вправа 2.2.12. Доведіть, що для множини A метричного простору (X, d) виконується рівність $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Вправа 2.2.13. Нехай ρ — одна з метрик d_1, d_p $(p \geqslant 3)$, d_∞ і $d_{\pi\varrho}$ на $\mathbb{R}^2$. Знайдіть внутрішність, замикання, межу та похідну множину таких підмножин метричного простору $(\mathbb{R}^2, \rho)$:

(*i*) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$;
(*ii*) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant -1\}$;
(*iii*) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(*iv*) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$;
(*v*) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 2\}$;
(*vi*) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$;
(*vii*) $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 3 \text{ і } |y| \leqslant 3\}$.

Вправа 2.2.14. Доведіть, що для довільної точки x множини A метричного простору (X, d) виконується висловлення: $x \in \mathrm{Int}(A)$ або $x \in \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

Вправа 2.2.15. Доведіть, що для довільних множин A і B метричного простору (X, d) виконуються такі твердження:

(*i*) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;
(*ii*) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;
(*iii*) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$;
(*iv*) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Наведіть приклади, що включення в твердженнях (*iii*) і (*iv*) не можна замінити на рівності.

Вправа 2.2.16. Наведіть приклад двох диз'юнктних множини A і B в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою, для яких справджується рівність $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(B)$.

2.3 Властивості метричних просторів

Означення 2.3.1. Множин A метричного простору (X, d) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X.

Очевидно, і це випливає з вище наведених означень, що множин A метричного простору (X, d) є:

- *щільною* в X тоді і лише тоді, коли кожна відкрита куля простору X містить точки множини A;
- *ніде не щільною* в X тоді і лише тоді, коли в кожній відкритій кулі простору X міститься відкрита куля, яка не містить точок множини A.

Приклад 2.3.2. У множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є одночасно щільними та кощільними множинами, а множини цілих і натуральних чисел $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$ є ніде не щільними.

Означення 2.3.3. Метричний простір називається *сепарабельним*, якщо він містить зліченну щільну підмножину.

Дійсні числа зі звичайною метрикою є сеперабельним простором, оскільки містять множину раціональних чисел, як щільну підмножину. Також, очевидно, що кожен незліченний дискретний метричний простір не є сепарабельним.

Наступне означення походить з математичного аналізу.

Означення 2.3.4. Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (X, d) називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, шо $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всіх $i, j > n_0$.

Зауважимо, що всі збіжні послідовності є фундаментальними, але існують фундаментальні послідовності, які не є збіжними. Наприклад, очевидно, що на інтервалі $(0, 1)$ зі звичайною індукованою метрикою з $\mathbb{R}$ довільна послідовність, яка збігається до 0, чи до 1 в $\mathbb{R}$ є фундаментальною, але не є збіжною.

Означення 2.3.5. Метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним*. Метрику d на множині X, стосовно якої метричний простір (X, d) є повним називають *повною*.

Очевидно, що дискретний метричний простір є повним, а отже дискретна метрика на довільній множині є повною. Множини раціональних та ірраціональних чисел $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ зі звичайною метрикою є неповними метричними просторами.

Твердження 2.3.6. *Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.*

Доведення. Нехай X' — замкнений підпростір повного метричного простору X. Тоді кожна фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ у X' є фундаментальною в X, оскільки звуження метрики простору X на X' збігається з метрикою простору X'. У повному метричному просторі X існує границя послідовності $\{x_n\}$, яка міститься в X', оскільки X' — замкнена підмножина в метричному просторі X. □

Вправа 2.3.1. Чи може скінченна множина бути щільною в нескінченному метричному просторі? А зліченна підмножина в незліченному метричному просторі?

Вправа 2.3.2. Доведіть, що кожен скінченний метричний простір є повним.

2.4 Неперервні відображення метричних просторів

Означення 2.4.1. Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ в X, яка збігається до точки x_0, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $f(x_0)$ в X'.

Простими словами неперервність відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ означає, що коли при послідовному наближенні x до точки x_0 значення $f(x)$ також збігається до точки $f(x_0)$ в X'. Відображення яке не є неперервним у точці $x_0 \in X$ називається *розривним* в цій точці.

Означення 2.4.2. Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.

Приклад 2.4.3. Очевидно, що кожне тотожне відображення з метричного простору в себе є неперервним, а також кожне стале відображення метричних просторів є неперервним.

Існує інше означення неперервності відображень метричних просторів в точці, яке не пов'язане з поняттям послідовності.

Означення 2.4.4. Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x,x_0) < \delta$ в X виконується умова $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ в X'.

Використовуючи поняття відкритої кулі, означення 2.4.4 можна переформулювати так:

Означення 2.4.5. Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної кулі $B_\varepsilon(f(x_0))$ в X' з центром в точці $f(x_0)$ існує куля $B_\delta(x_0)$ в X з центром в точці x_0 така, що

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Означення 2.4.4 і 2.4.5 називаються *означеннями неперервності за Коші*, або *означеннями мовою* $\varepsilon - \delta$, а означення 2.4.1 називаються *означенням неперервності за Гейне*, або *означенням мовою послідовностей*.

Твердження 2.4.6. *Відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в точці $x_0 \in X$ за Коші.*

Доведення. Нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Гейне. Припустимо, що f не є неперервним за Коші в точці $x_0 \in X$. Тоді для деякого дійсного числа $\varepsilon > 0$ у кожній кулі $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, міститься така точка x, що $f(x) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Для довільного натурального числа n через x_n позначимо саме таку точку з кулі $B_{1/n}(x_0)$, образ якої не міститься в $B_\varepsilon(f(x_0))$. Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, але гарантовано маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, що суперечить неперервності відображення $f\colon (X,d) \to (X',d')$ в точці $x_0 \in X$ за Гейне, отримали протиріччя.

Тепер, нехай відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ за Коші, і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ для довільної послідовності $\{x_n\}$ в (X,d). Для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$, з $d(x,x_0) < \delta$ в X випливає, що $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ в метричному просторі X'. За означенням границі послідовності для цього числа $\delta > 0$ існує таке натуральне число n_0, що $d(x_n,x_0) < \delta$ для всіх $n \geqslant n_0$. Отже, $d'(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Таким чином, $f\colon (X,d) \to (X',d')$ неперервне відображення в точці $x_0 \in X$ за Гейне □

Теорема 2.4.7. *Для відображення метричних просторів $f\colon (X,d) \to (X',d')$ такі умови є еквівалентними:*

(i) *f — неперервне;*

(ii) *повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини U в X' є відкритою множиною в метричному просторі X;*

(iii) *повний прообраз $f^{-1}(K)$ замкненої множини K в X' є замкненою множиною в метричному просторі X.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення та U відкрита непорожня множина в метричному просторі X'. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує така відкрита куля $B_\varepsilon(f(x))$ з центром в точці $f(x)$ в X', що $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. З неперервності відображення f випливає, що існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці x в X, що

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U.$$

З останнього випливає, що x — внутрішня точка множини $f^{-1}(U)$, а отже повний прообраз $f^{-1}(U)$ відкритої множини U в X' є відкритою множиною в метричному просторі X.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для довільної відкритої множини U в метричному просторі X' повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в X. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Нехай $B_\varepsilon(f(x))$ — довільна відкрита куля з центром в точці $f(x)$ в X'. Тоді з припущення випливає, що повний прообраз $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ є відкритою множиною в X. Отже, для точки x існує така відкрита куля $B_\delta(x)$ з центром в точці x в X, що $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Звідки отримуємо, що $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, а отже $f\colon (X,d) \to (X',d')$ — неперервне відображення в точці $x \in X$.

Еквівалентність $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ випливає з твердження 2.2.8. □

Теорема 2.4.8. *Нехай* $f\colon (X,d)\to(X',d')$ *і* $g\colon (X',d')\to(X'',d'')$ *— відображення метричних просторів. Тоді:*

(i) *якщо* f *— неперервне відображення в точці* $x_0\in X$ *і* g *— неперервне в точці* $y_0=f(x_0)\in X'$*, то композиція* $g\circ f\colon (X,d)\to(X'',d'')$ *— неперервне відображення в точці* $x_0\in X$*;*

(ii) *якщо* f *і* g *— неперервні відображення, то композиція* $g\circ f$ *— неперервне відображення.*

Доведення твердження (i) випливає з означення неперервності за Коші, а твердження (i) безпосередньо випливає з теореми 2.4.7.

Вправа 2.4.1. Чи справджуються твердження обернені до тверджень теореми 2.4.8.

Вправа 2.4.2. Доведіть, що довільне відображення з дискретного метричного простору в довільний метричний простір є неперервним.

Вправа 2.4.3. Доведіть, якщо (X,d) — метричний простір такий, що довільне відображення $f\colon (X,d)\to(X',d')$ в довільний метричний простір (X',d') є неперервним, то (X,d) — дискретний метричний простір.

Розділ 3

Топологічні простори

3.1 Означення

Означення 3.1.1. *Топологією* на множині X називається така сім'я τ підмножин множини X, для якої виконуються умови:

($\mathscr{O}1$) $\varnothing, X \in \tau$;

($\mathscr{O}2$) $U \cap V \in \tau$ для довільних $U, V \in \tau$;

($\mathscr{O}3$) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i \in \tau$ для довільної підсім'ї $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \tau$.

Тобто топологія на множині X — це така сім'я τ підмножин множини X, що:

($\mathscr{T}1$) τ містить порожню множину $\varnothing$ і саму множину X;

($\mathscr{T}2$) τ є замкненою стосовно скінченних перетинів;

($\mathscr{T}3$) τ є замкненою стосовно довільних об'єднань.

Іншими словами, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови ($\mathscr{T}1$) – ($\mathscr{T}3$).

Пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологія на X, називається *топологічним простором*. Елементи сім'ї τ називаються *відкритими множинами* в топологічному просторі (X, τ). Елементи топологічного простору будемо називати *точками*.

Приклад 3.1.2. На одноелементній множині $X = \{a\}$ існує лише одна топологія $\tau = \{\varnothing, X\}$.

Приклад 3.1.3. На множині X, яка містить хоча б два елементи, завжди існує хоча б дві різні топології:

(*i*) $\tau_{\mathrm{ad}} = \{\varnothing, X\}$ — *антидискретна*;

(*ii*) $\tau_{\mathfrak{d}} = \{A \mid A \subseteq X\} = \mathscr{P}(X)$ — *дискретна*.

Множина X з антидискретною (відп., дискретною) топологією називається *антидискретним* (відп., *дискретним*) топологічним простором, або просто *антидискретним* (відп., *дискретним*) простором.

Зауважимо, з твердження 2.2.9 випливає, що кожна метрика на множині X породжує сім'ю відкритих підмножин, яка є топологією на X. Так, зокрема дискретна метрика на множині X породжує дискретну топологію на X. Однак, існують топології, які не породжуються жодними метриками, зокрема такою є антидискретна топологія на непорожній неодноточковій множині.

Вправа 3.1.1. Опишіть всі топології на двоелементній множині.

Вправа 3.1.2. Опишіть всі топології на триелементній множині.

Вправа 3.1.3. Скільки існує топологій на множині, яка має n елементів ($n \in \mathbb{N}$)?

Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині X. Якщо $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то будемо говорити, що τ_1 є *слабшою* за τ_2, чи τ_1 є *грубшою* за τ_2, а τ_2 є *сильнішою* за τ_1, чи τ_2 є *тоньшою* за τ_1, і це записуватимемо так $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Якщо топологій τ_1 і τ_2 на множині X виконується одна з умов $\tau_1 \leqslant \tau_2$, чи $\tau_2 \leqslant \tau_1$, то будемо говорити, що топології τ_1 і τ_2 на множині X *порівняльні*. Очевидно, що антидискретна топологія на множині X є слабшою за довільну топологію на X, тобто вона є найслабшою топологією на X, а дискретна топологія на множині X є сильнішою за довільну топологію на X, тобто вона є найсильнішою топологією на X. Іншими словами, довільна топологія τ на фіксованій множині X задовольняє умову $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, а отже всі топології на множині X утворюють частково впорядковану множину стосовно вище означеного відношення $\leqslant$.

Приклад 3.1.4. На двоелементній множині $X = \{a, b\}$ топологію $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ будемо називати *топологією зв'язної двокрапки* або *топологією Серпіньського*, а сам топологічний простір (X, τ_2) — *зв'язною двокрапкою* або *простором Серпіньського*. Очевидно, що $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$ на $X = \{a, b\}$. Також $\tau_2' = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ є топологією зв'язної двокрапки на X, причому $\tau_{\mathrm{ad}} \leqslant \tau_2' \leqslant \tau_{\mathfrak{d}}$, але топології τ_2 і τ_2' є непорівняльними на двоелементній множині X.

Означення 3.1.5. Нехай (X, τ) — топологічний простір. *Відкритим околом* точки $x \in X$ називається довільна відкрита множина U, яка містить точку x.

Приклад 3.1.6. У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) для кожної точки єдиним її околом є сама множина X.

Вправа 3.1.4. Опишіть околи точок у дискретному просторі.

Вправа 3.1.5. Опишіть околи точок у зв'язній двокрапці.

Означення 3.1.7. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Підмножина $A \subseteq X$ називається *замкненою* в (X, τ), якщо $X \setminus A$ — відкрита в (X, τ), тобто $X \setminus A \in \tau$.

Приклад 3.1.8. У антидискретному просторі (X, τ_{ad}) замкненими множинами є лише $\varnothing$ та X.

Приклад 3.1.9. У дискретному просторі $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ замкненими множинами є довільні підмножини множини X.

Приклад 3.1.10. Перевірити, які з нижче наведених сімей підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологіями на $\mathbb{R}$:

(i) $\gamma_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, +\infty)\}$;
(ii) $\gamma_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k] \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(iii) $\gamma_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
(iv) $\gamma_4 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(-\infty, k) \mid k \in \mathbb{Q}\}\}$;

(v) $\gamma_5 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{U_k = \{0\} \cup [k, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}\}$.

Розв'язок. Як було зазначено раніше, для того, щоб перевірити чи сім'я τ підмножин множини X є топологією на X достатньо довести, що τ задовольняє умови $(\mathscr{T}1)$, $(\mathscr{T}2)$ та $(\mathscr{T}3)$.

(i) Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_1$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \cap [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cap [0, +\infty) = \varnothing \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною:

$$\varnothing \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} \cup [0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \in \gamma_1,$$

$$\varnothing \cup [0, +\infty) = [0, +\infty) \in \gamma_1.$$

Отже, сім'я γ_1 є топологією на $\mathbb{R}$.

(ii) Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_2$.

Умова $(\mathscr{T}2)$ виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(-\infty, k_1] \cap (-\infty, k_2] = (-\infty, k], \qquad \text{де} \quad k = \min\{k_1, k_2\}.$$

Умова $(\mathscr{T}3)$ виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathfrak{J} \subseteq \mathbb{Z}} (-\infty, k] = \begin{cases} (-\infty, k_0], & \text{якщо } \mathfrak{J} \text{ містить максимальний елемент } k_0; \\ \mathbb{R}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, сім'я γ_2 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iii) Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_3$. Оскільки сім'я γ_3 скінченна та $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то γ_3 замкнена стосовно скінченних перетинів та об'єднань, тобто виконуються умови $(\mathscr{T}2)$ і $(\mathscr{T}3)$.

Отже, сім'я γ_3 є топологією на $\mathbb{R}$.

(iv) Сім'я γ_4 не є топологією на $\mathbb{R}$, оскільки вона не задовольняє умову $(\mathscr{T}3)$. Справді, нехай $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — монотонно зростаюча послідовність раціональних чисел, яка збігається до ірраціонального числа r. Тоді

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (-\infty, q_i) = (-\infty, r) \notin \gamma_3,$$

оскільки $r \notin \mathbb{Q}$.

(v) Умова $(\mathscr{T}1)$ виконується: $\varnothing, \mathbb{R} \in \gamma_5$.

Умова ($\mathscr{T}2$) виконується, врахувавши, що операція перетин "$\cap$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cap A = \varnothing$ і $\mathbb{R} \cap A = A$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_{k_1} \cap U_{k_2} = \{0\} \cup [k, +\infty) = U_k, \qquad \text{де} \quad k = \max\{k_1, k_2\}.$$

Умова ($\mathscr{T}3$) виконується, врахувавши, що операція об'єднання "$\cup$" є ідемпотентною, а також $\varnothing \cup A = A$ і $\mathbb{R} \cup A = \mathbb{R}$ для довільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\bigcup_{k \in \mathfrak{J} \subseteq \mathbb{N}} U_k = U_{k_0} = \{0\} \cup [k_0, +\infty), \qquad \text{де} \quad k_0 = \min \mathfrak{J}.$$

Зауважимо, що довільна непорожня підмножина $\mathfrak{J}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить мінімальний елемент, оскільки остання є цілком впорядкованою зі звичайним лінійним порядком.

Отже, сім'я γ_5 є топологією на $\mathbb{R}$.

Через $\mathscr{C}(X, \tau)$ позначимо сім'ю всіх замкнених підмножин топологічного простору (X, τ). Тоді з законів де Моргана (див. теорема 1.2.14(vi)) випливає, що сім'я $\mathscr{C}(X, \tau)$ задовольняє такі умови:

($\mathscr{C}1$) $\varnothing, X \in \mathscr{C}(X, \tau)$;
($\mathscr{C}2$) $A \cup B \in \mathscr{C}(X, \tau)$ для довільних $A, B \in \mathscr{C}(X, \tau)$;
($\mathscr{C}3$) $\bigcap\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i \in \mathscr{C}(X, \tau)$ для довільної підсім'ї $\{A_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \mathscr{C}(X, \tau)$.

Виконується й обернене твердження, яке випливає з законів де Моргана:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

і

$$\bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\} = X \setminus \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\}.$$

Твердження 3.1.11. *Якщо сім'я $\mathscr{C}$ підмножин множини X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), то сім'я $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{C}\}$ є топологією на X.*

З твердження 3.1.11 випливає, що топологію можна вводити через замкнені множини.

Приклад 3.1.12. Нехай X — непорожня множина і сім'я $\mathscr{C}(X)$ складається з X і всіх скінченних підмножин в X. Очевидно, що сім'я $\mathscr{C}(X)$ задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на нескінченній множині X називається *коскінченною топологією*, а на скінченній множині X так визначена топологія є дискретною.

Приклад 3.1.13. Нехай X — незліченна множина. Тоді сім'я $\mathscr{C}(X)$ всіх зліченних і скінченних підмножин в X задовольняє умови ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}2$) і ($\mathscr{C}3$), а отже всі доповнення в X до елементів сім'ї $\mathscr{C}(X)$, а саме $\varnothing$ та підмножини в X зі скінченними та зліченними доповненнями, утворюють топологію на X. Така топологія на незліченній множині X називається *козліченною топологією*.

Означення 3.1.14. Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою множини* A, якщо існує така відкрита підмножина U в (X,τ), що $x \in U \subseteq A$. Множину

$$\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid x - \text{внутрішня точка множини } A\}$$

будемо називати *внутрішністю множини* A в топологічному просторі (X,τ).

Отож, внутрішність множини A в топологічному просторі (X,τ) складається з усіх точок множини A, які разом зі своїми відкритими околами містяться в множині A, тобто $\operatorname{Int}(A)$ — це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A. Очевидно, що $\operatorname{Int}(A)$ є відкритою множиною, причому найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X,τ), які містяться в A, а отже $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Надалі, якщо $x \in \operatorname{Int}(A)$ в топологічному просторі (X,τ), то будемо говорити, що множина A є *околом точки* x.

Означення 3.1.15. Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику множини* A, якщо кожен відкритий окіл U точки x перетинає множину A. Множину

$$\operatorname{Cl}(A) = \{x \in X \mid x - \text{точка дотику множини } A\}$$

будемо називати *замиканням множини* A в топологічному просторі (X,τ). Також, замикання множини A в топологічному просторі (X,τ) будемо позначати через $\overline{A}$.

Як ми бачили раніше відриті та замкнені підмножини в топологічному просторі мають дуальні властивості, тобто їх властивої поєднані законами де Моргана. З твердження 3.1.16 випливає, що поняття внутрішності та замикання множини в топологічному просторі є також дуальними.

Твердження 3.1.16. *Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді точка $x \in X$ — точка дотику множини A тоді і лише тоді коли x не є внутрішньою точкою доповнення $X \setminus A$ до множини A в (X,τ).*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \operatorname{Cl}(A)$. Тоді кожний відкритий окіл U точки x в топологічному просторі (X,τ) перетинає множину A. Звідси випливає, що $U \nsubseteq X \setminus A$ для довільного відкритого околу U точки x в (X,τ), а отже $x \notin \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \notin \operatorname{Int}(X \setminus A)$. Тоді $U \nsubseteq X \setminus A$ для кожного відкритого околу U точки x в топологічному просторі (X,τ), а отже $U \cap A \neq \varnothing$. Звідки випливає, що $x \in \operatorname{Cl}(A)$. □

З властивостей внутрішності множини в топологічному просторі та твердження 3.1.16 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.1.17. *Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді:*

(i) $\operatorname{Cl}(A)$ *— замкнена підмножина в (X,τ);*
(ii) $\operatorname{Cl}(A)$ *— найменша замкнена підмножина в (X,τ), яка містить множину A;*
(iii) $\operatorname{Cl}(A)$ *— перетин усіх замкнених підмножин в (X,τ), які містить множину A;*

(*iv*) $\mathrm{Cl}(A) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(*v*) *якщо* U — *відкрита множина множина в* (X,τ) *і* $U \cap A = \varnothing$, *то* $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$;
(*vi*) *якщо* $B \subseteq A$, *то* $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

Зауважимо, що твердження (*iv*) наслідку 3.1.17 дає змогу шукати замикання множини методом пошуку внутрішніх точок доповнення цієї множини.

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її замикання $\mathrm{Cl}(A)$ називається *оператором замикання* на множині X.

Теорема 3.1.18. *Нехай* (X,τ) — *топологічний простір і* $A, B \subseteq X$. *Тоді оператор замикання має такі властивості:*

($\mathscr{CO}1$) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$;
($\mathscr{CO}2$) $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$;
($\mathscr{CO}3$) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$;
($\mathscr{CO}4$) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$.

Доведення. Властивості ($\mathscr{CO}1$) і ($\mathscr{CO}2$) безпосередньо випливають з означення оператора замикання, а властивість ($\mathscr{CO}4$) випливає з того, що $\mathrm{Cl}(A)$ — замкнена підмножина в (X,τ).

($\mathscr{CO}3$) З наслідку 3.1.17(*vi*) випливає, що $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$ і $\mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$, а отже $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \cup B)$.

З властивості ($\mathscr{CO}2$) випливає, що виконуються включення $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ і $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$, а тому $A \cup B \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. Множина $\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, як об'єднання двох замкнених множин є замкненою, а отже отримуємо, що $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, звідки і випливає необхідна рівність $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$. □

Відповідність, яка кожній множині A топологічного простору (X,τ) ставить її внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ називається *оператором взяття внутрішності* на множині X.

Властивості оператора взяття внутрішності дуальні властивостям ($\mathscr{CO}1$)–($\mathscr{CO}4$) і перелічені в наступній теоремі, яка випливає з наслідку 3.1.17(*iv*), теореми 3.1.18 і законів де Моргана.

Теорема 3.1.19. *Нехай* (X,τ) — *топологічний простір і* $A, B \subseteq X$. *Тоді оператор взяття внутрішності має такі властивості:*

($\mathscr{OO}1$) $\mathrm{Int}(\varnothing) = \varnothing$;
($\mathscr{OO}2$) $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$;
($\mathscr{OO}3$) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;
($\mathscr{OO}4$) $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$.

Вправа 3.1.6. Доведіть твердження теореми 3.1.19.

Зауваження 3.1.20. Якщо на множині X задано оператори Cl і Int, для яких виконуються умови ($\mathscr{CO}1$)—($\mathscr{CO}4$), чи ($\mathscr{OO}1$)—($\mathscr{OO}4$), відповідно, то вони породжують сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови ($\mathscr{C}1$)—($\mathscr{C}3$), чи сім'ю підмножин в X, яка задовольняє умови ($\mathscr{O}1$)—($\mathscr{O}3$), відповідно. Отож, кожен з цих операторів визначає деяку топологію τ на X, для якої оператор Cl, чи оператор Int, є оператором замикання, чи оператором взяття внутрішності, відповідно. Доведення цього факту можна знайти зокрема в монографії [1, підрозділ 1.2]. У цих випадках ми будемо говорити, що оператор Cl, чи оператор Int, *породжує топологію* на множині X.

Приклад 3.1.21. Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай x_0 — довільна фіксована точка в X. Приймемо $\mathrm{Cl}(\varnothing) = \varnothing$ і $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$. Так визначений оператор замикання задовольняє умови ($\mathscr{CO}$1)—($\mathscr{CO}$4). Множина $\{x_0\}$ — єдина одноточкова множина в X, замкнена стосовно топології, породженої цим оператором замикання. Інші одноточкові множини є відкритими, але не є замкненими.

Приклад 3.1.22. Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Cl}(A) = A$ на X задовольняє умови ($\mathscr{CO}$1)—($\mathscr{CO}$4) і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$, а оператор

$$\mathrm{Cl}(A) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } A = \varnothing; \\ X, & \text{якщо } A \neq \varnothing \end{cases}$$

задовольняє умови ($\mathscr{CO}$1)—($\mathscr{CO}$4) і визначає антидискретну топологію τ_{ad} на X.

Приклад 3.1.23. Нехай X — довільна множина, яка містить більше однієї точки, і нехай $X_0 \subset X$ — така підмножина, що $|X \setminus X_0| > 1$. Приймемо $\mathrm{Int}(A) = A \cap X_0$ для довільної власної підмножини $A \subset X$ і $\mathrm{Int}(X) = X$. Визначений так оператор взяття внутрішності задовольняє умови ($\mathscr{OO}$1)—($\mathscr{OO}$4). Усі підмножини множини X_0 і сама множина X — єдині підмножини в X, які відкриті стосовно топології, породженої цим оператором. Якщо $X_0 = \varnothing$, то топологія породжена цим оператором є антидискретною.

Приклад 3.1.24. Нехай X — довільна множина. Тоді тривіальний оператор $\mathrm{Int}(A) = A$ задовольняє умови ($\mathscr{OO}$1)—($\mathscr{OO}$4) і визначає дискретну топологію $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Надалі для спрощення викладу топологічний простір (X, τ) будемо позначати просто через X.

Тепер поширимо на топологічні простори і деякі інші поняття, які ми визначили для метричних просторів.

Для довільної підмножини A топологічного простору X визначимо *межу* множини A як множину

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Найважливіші властивості оператора взяття границі множини перелічено в такій теоремі.

Теорема 3.1.25. *Нехай (X, τ) — топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді:*

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$;
(2) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$;
(3) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(4) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;
(5) $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$;
(6) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;
(7) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(8) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$;
(9) *множина A відкрита в X тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A$;

(10) *множина A замкнена в X тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$*;*
(11) *множина A відкрито-замкнена в X тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$*.*

Доведення. Властивості (1)–(11) перевіряються простими обчисленнями. У якості зразка доведемо властивості (1):

$$\begin{aligned} A \setminus \mathrm{Fr}(A) &= A \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= (A \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cup (A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)) = \\ &= A \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) = \\ &= A \cap \mathrm{Int}(A) = \\ &= \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

і (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \mathrm{Cl}(A \cup B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus (A \cup B)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B) \subseteq \\ &\subseteq (\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(B) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus B)) = \\ &= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B). \end{aligned}$$

□

Вправа 3.1.7. Доведіть твердження (2), (4)–(11) теореми 3.1.25.

Точка x_0 топологічного простору X називається *точкою накопичення* або *граничною точкою* множини $A \subseteq X$, якщо $x_0 \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x_0\})$. Множина точок накопичення множини A в топологічному просторі X називається *похідною множиною* множини A та позначається A^d.

Точки множини $A \setminus A^d$ називаються *ізольованими точками* множини A в топологічному просторі X. Точка x_0 є ізольованою точкою топологічного простору X тоді і лише тоді, коли одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X. Справді, одноточкова множина $\{x_0\}$ відкрита в X тоді і тільки тоді, коли $\{x_0\} = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$, тобто коли $x_0 \notin \mathrm{Cl}(X \setminus \{x_0\})$.

Теорема 3.1.26. *Похідна множина задовольняє такі умови:*

(1) $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A^d$*;*
(2) *якщо* $A \subseteq B$*, то* $A^d \subseteq B^d$*;*
(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$*;*
(4) $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i^d = \Big(\bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} A_i\Big)^d$.

Вправа 3.1.8. Доведіть твердження теореми 3.1.26.

Означення 3.1.27. Множин A топологічного простору (X, τ) називається:

- *щільною* або *всюди щільною* в X, якщо $\mathrm{Cl}(A) = X$;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;

- *щільною* в собі, якщо $A \subseteq A^d$.

Твердження 3.1.28. *Нехай X — топологічний простір. Тоді:*

1. *Множина A є щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки множини A.*
2. *Множина A є кощільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить точки доповнення множини A.*
3. *Множина A є ніде щільною в просторі X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита підмножина в X містить непорожню відкриту множину, яка не перетинається з множиною A.*

Приклад 3.1.29. Доведіть, що перетин довільної сім'ї топологій на множині X є знову топологією на X.

Розв'язок. Нехай $\{\tau_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — сім'я топологій на множині X.

Оскільки $\varnothing, X \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$, то

$$\varnothing, X \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} \tau_i.$$

Припустимо, що $A, B \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$. Тоді для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A, B \in \tau_i$, а отже $A \cap B \in \tau_i$ для кожного індекса $i \in \mathcal{J}$. Звідси випливає, що $A \cap B \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Нехай $\{A_j \mid j \in \mathcal{A}_0\}$ — така сім'я підмножин множини X, що $A_j \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$ для довільного $j \in \mathcal{A}_0$. Тоді для довільного $j \in \mathcal{A}_0$ і для кожного $i \in \mathcal{J}$ маємо, що $A_j \in \tau_i$. Звідки випливає, що $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \tau_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$, а отже $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{A}_0} A_j \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{J}} \tau_i$.

Приклад 3.1.30. Наведіть приклад, що об'єднання сім'ї топологій на множині X може і не бути топологією на X.

Розв'язок. Розглянемо множину $X = \{a, b, c\}$ і дві топології

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \qquad \text{і} \qquad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

на X. Тоді сім'я

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

не є топологією на множині X, оскільки $\{a\}, \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

Вправа 3.1.9. Нехай X — нескінченна множина і

$$\tau_Z = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ скінченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_Z — топологія на X[1]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, якщо $X = \mathbb{R}$.

[1]Так визначена топологія τ_Z на нескінченій множині X називається *топологією Зариського* або *топологією коскінченних підмножин* на множині X.

Приклад 3.1.31. Нехай X — незліченна множина і

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U - \text{ зліченна, або } U = \varnothing\}.$$

Доведіть, що τ_{cc} — топологія на X[2]. Знайдіть замикання, внутрішність і межу множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в топологічному просторі (X, τ_{cc}), якщо $X = \mathbb{R}$.

Розв'язок. З означення топології τ_{cc} випливає, що $X, \varnothing \in \tau_{cc}$, оскільки $X = X \setminus \varnothing$[3].

Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{cc}$. Тоді $|X \setminus U_1| \leqslant \aleph_0$ і $|X \setminus U_2| \leqslant \aleph_0$, а оскільки за законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2,$$

а також об'єднання двох зліченних множин є зліченна множина, то отримуємо, що $U_1 \cap U_2 \in \tau_{cc}$.

Нехай $\{U_i\}_{i \in \mathfrak{I}} \subseteq \tau_{cc}$. Тоді законом де Моргана маємо, що

$$X \setminus \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} U_i = \bigcap_{i \in \mathfrak{I}} X \setminus U_i \subseteq X \setminus U_{i_0} \quad \text{для кожного} \quad i_0 \in \mathfrak{I},$$

а оскільки довільна підмножина зліченної множини є зліченною, то $\bigcup\limits_{i \in \mathfrak{I}} U_i \in \tau_{cc}$.

Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ в $\mathbb{R}$ мають незліченні доповнення, то з означення топології τ_{cc} випливає, що $\operatorname{Int}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ і $\operatorname{Int}(\{1,2,3\}) = \varnothing$. Оскільки множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ зліченні, то $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ — відкриті підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$, а отже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\{1,2,3\}$ — замкнені підмножини в $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$. Звідки випливає, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Cl}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Отже, маємо, що $\operatorname{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ і $\operatorname{Fr}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$. Аналогічно маємо, що $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Оскільки множини $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ незліченні, то $\operatorname{Cl}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \mathbb{R}$ і $\operatorname{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$ і $\operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

3.2 База та передбаза топології

Явне визначення топології на множині вимагає перелічення всіх відкритих підмножин, або ж точного описання їх. Це ж саме стосується і замкнених множин. Вже навіть описання всіх відкритих, чи замкнених підмножин, на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією породженою звичайною евклідовою метрикою $d(x,y) = |x - y|$ є достатньо складним. Також визначення топології за допомогою оператора замикання, чи оператора взяття внутрішності, є достатньо простим, але вимагає описання всіх таким множини, на яких цей оператор діє тотожно. А таке описання може бути як завгодно нетривіальним.

[2] Так визначена топологія τ_{cc} на незліченній множині X називається *топологією козліченних підмножин*.

[3] Ми вважаємо, що кожна скінченна множина є зліченною, тобто множина A є зліченною, якщо $|A| \leqslant \aleph_0$.

У випадку метричного простору об'єднання відкритих куль утворювали відкриті множини в топології, породженої метрикою цього простору. Для топологічних просторів існує аналог поняття системі (сім'ї) відкритих куль метричного простору — це *база* топологічного простору, чи *база* топології. Означимо це поняття.

Означення 3.2.1. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B} \subseteq \tau$ називається *базою топології* τ, або *базою топологічного простору* (X, τ), якщо кожна непорожня відкрита множина в (X, τ) є об'єднанням деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

З вище сказаного випливає, що сім'я всеможливих відкритих куль у метричному просторі утворює базу топології, яка породжується метрикою на цьому просторі.

З означення 3.2.1 випливає, що сама топологія є однією зі своїх баз, і самих різних баз фіксованої топології може бути дуже багато. Також, з означення 3.2.1 випливає, якщо $\mathscr{B}$ є базою деякої топології на множині X, то ця топологія єдина та складається з усіх всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$.

Зауважимо, також, що порожня множини $\varnothing$, як елемент топології, для довільної бази може бути зображена як порожнє об'єднання елементів цієї бази.

Приклад 3.2.2. Оскільки кожна непорожня множина є об'єднанням своїх елементів, то для довільної множини X сім'я, яка складається з усіх одноелементних підмножини множини X є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X.

Зауважимо, що перевіряти чи сім'я $\mathscr{B}$ є базою конкретної топології, зручно за допомогою такого критерію:

Твердження 3.2.3. *Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{B}$ є базою топології τ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B} \subseteq \tau$ і для довільної відкритої множини $V \in \tau$ і для довільної точки $x \in V$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq V$.*

Доведення твердження 3.2.3 є безпосереднім наслідком означення бази топології.

Вправа 3.2.1. Доведіть, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою дискретної топології $\tau_{\mathfrak{d}}$ на X тоді і лише тоді, коли $\mathscr{B}$ містить усі одноелементні підмножини множини X.

Вправа 3.2.2. Опишіть базу антидискретної топології τ_{ad} на непорожній множині X.

Природно виникає питання: *за виконання яких умов сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології τ на X?* Відповідь на це питання дає такий критерій:

Твердження 3.2.4. *Сім'я $\mathscr{B}$ підмножини множини X є базою деякої топології на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:*

($\mathscr{B}$1) *для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ і для довільної точки $x \in U_1 \cap U_2$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$;*

($\mathscr{B}$2) *для довільного елемента $x \in X$ існує такий елемент $U \in \mathscr{B}$, що $x \in U$.*

Доведення. Припустимо, що сім'я $\mathscr{B}$ є базою деякої топології τ на X. Тоді з того, що $X \in \tau$ випливає умова ($\mathscr{B}2$), оскільки $X = \bigcup \mathscr{B}$. Також, оскільки сім'я τ замкнена стосовно скінченних перетинів, то виконується умова ($\mathscr{B}1$).

Припустимо, що умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) виконуються для сім'ї $\mathscr{B}$ і сім'я τ складається з всеможливих об'єднань елементів сім'ї $\mathscr{B}$. Тоді $\varnothing \in \tau$ і $X = \bigcup \mathscr{B} \in \tau$, а отже виконується умова ($\mathscr{O}1$) для сім'ї τ. Очевидно також, що виконується умова ($\mathscr{O}3$) для сім'ї τ. Зафіксуємо довільні $U, V \in \tau$. Якщо $U \cap V = \varnothing$, то $U \cap V \in \tau$ за попередньо доведеним. Припустимо, що $U \cap V = W \neq \varnothing$, $U = \bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathscr{B},\ i \in \mathfrak{I}\}$ і $V = \bigcup\{V_j \mid V_j \in \mathscr{B},\ j \in \mathfrak{J}\}$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap V$ існують U_i і V_j такі, що $x \in U_i \cap V_j \subseteq U \cap V$. З умови ($\mathscr{B}1$) випливає, що існує такий елемент $W_{i,j} \in \mathscr{B}$, що $x \in W_{i,j} \subseteq U_i \cap V_j$. З останнього включення випливає, що $U \cap V \in \tau$. □

Надалі, якщо $\mathscr{B}$ — база топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{B}$ *породжує топологію* τ на X.

Приклад 3.2.5. Сім'я $\mathscr{B}_{ZL} = \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (див. рис. 3.1) задовольняє

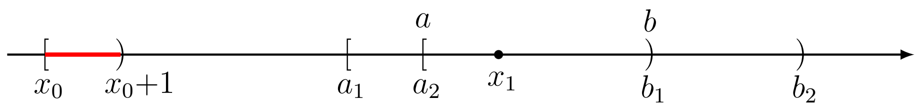


Рис. 3.1: Стрілка Зорґенфрея

умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$). Справді, $x_0 \in [x_0, x_0 + 1)$ для довільного дійсного числа x_0. Якщо $x_1 \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, то $x_1 \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, де $a = \max\{a_1, a_2\}$ і $b = \min\{b_1, b_2\}$. Топологія τ_{ZL} на $\mathbb{R}$, породжена базою $\mathscr{B}_{ZL}$, називається *топологією стрілки Зорґенфрея*, а сам топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ будемо називати *стрілкою Зорґенфрея*.

Множина всіх кардинальних чисел вигляду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ — база топологічного простору (X, τ), має найменший елемент, оскільки довільна множина кардиналів є цілком впорядкованою відношенням $\leqslant$. Таке найменше кардинальне число називається *вагою топологічного простору* (X, τ), і позначається через $w((X, \tau))$.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ відкритих околів точки x називається *базою топологічного простору* (X, τ) *в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in U \subseteq V$.

Вправа 3.2.3. Доведіть, якщо $\mathscr{B}$ є базою топологічного простору (X, τ), то сім'я

$$\mathscr{B}(x) = \{V \in \mathscr{B} \mid x \in V\}$$

є базою топологічного простору (X, τ) в точці x. А також, якщо для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ топологічного простору (X, τ) в точці x, то об'єднання $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ є базою топологічного простору (X, τ).

Характером точки x в топологічному просторі (X,τ) називається кардинал

$$\chi(x,(X,\tau)) = \min\left\{|\mathscr{B}(x)| \mid \mathscr{B}(x) - \text{база топологічного простору } (X,\tau) \text{ в точці } x\right\}.$$

А *характером топологічного простору* (X,τ) називається кардинал

$$\chi((X,\tau)) = \sup\left\{\chi(x,(X,\tau)) \mid x \in (X,\tau)\right\}.$$

Якщо $\chi((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з першою аксіомою зліченності*, а це означає, що в кожній точці $x \in X$ існує зліченна база. Якщо $w((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$, то кажуть, що топологічний простір (X,τ) є *простором з другою аксіомою зліченності*, а це означає, що простір (X,τ) має зліченну базу.

Приклад 3.2.6. Кожен метричний простір (X,d) є простором з першою аксіомою зліченності. Справді, легко переконатися, що для довільної точки $x_0 \in X$ сім'я

$$\mathscr{B}(x_0) = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

відкритих куль з центром в точці x_0 є базою топології породженої метрикою d на X в точці x_0. Однак, незліченний дискретний простір не має зліченної бази.

Приклад 3.2.7. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{R}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою евклідової топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на $\mathbb{R}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{R},\tau_{\mathfrak{u}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.8. На одиничному замкненому інтервалі[4] $\mathbb{I} = [0,1]$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ топологія $\tau_{\mathfrak{u}}$, породжена звичайною евклідовою метрикою

$$d(x,y) = |x-y|,$$

називається *звичайною* або *евклідовою топологією* на $\mathbb{I}$. Оскільки відкритими кулями в $\mathbb{I}$ зі звичайною метрикою є відриті інтервали, то сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

[4] Надалі замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ будемо позначати через $\mathbb{I}$.

є базою евклідової топології $\tau_{\text{ц}}$ на $\mathbb{I}$.

Крім того кожен елемент, який є об'єднанням елементів сім'ї $\mathscr{B}_{\text{ц}}$ можна зобразити як зліченне об'єднання елементів її підсім'ї

$$\mathscr{B}'_{\text{ц}} = \{(a,b) \cap [0,1] \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Звідси випливає, що простір $(\mathbb{I}, \tau_{\text{ц}})$ має зліченну базу, тобто є простором з другою аксіомою зліченності.

Приклад 3.2.9. Доведіть, що сім'я

$$\mathscr{B} = \left\{\left[a, a + \tfrac{1}{n}\right) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

є базою топології стрілки Зоргенфрея τ_{ZL} на $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай U — довільна відкрита непорожня множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ і $x \in U$ — довільна точка. Оскільки сім'я

$$\mathscr{B}_{ZL} = \{[a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології τ_{ZL} (див. приклад 3.2.5), то за твердженням 3.2.3 існує елемент $[c,d)$ бази $\mathscr{B}_{ZL}$ такий, що $x \in [c,d) \subseteq U$. Очевидно, що $c \leqslant x < d$. Існує натуральне число n таке, що $\frac{1}{n} < d - x$, а отже маємо

$$x \in \left[x, x + \tfrac{1}{n}\right) \subseteq [c,d) \subseteq U$$

і, очевидно, що $\left[x, x + \frac{1}{n}\right) \in \tau_{ZL}$. Далі скористаємося твердженням 3.2.3.

Приклад 3.2.10. Доведіть, що топологія τ_Z (див. вправу 3.1.9) на незліченній множині X не має зліченної бази.

Розв'язок. Припустимо протилежне: на незліченній множині X існує зліченна база $\mathscr{B} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ топології τ_Z. Тоді для довільного елемента $U_i \in \mathscr{B}$ множина $X \setminus U_i$ скінченна, і оскільки об'єднання зліченної кількості скінченних множин — зліченна множина (див. вправа 1.2.18), то

$$A = X \setminus \bigcup \{X \setminus U_i \mid U_i \in \mathscr{B}\}$$

— незліченна множина. Тоді для довільної точки $x \in A$ маємо, що $X \setminus \{x\} \in \tau_Z$, однак $U_i \nsubseteq X \setminus \{x\}$ для довільного $U_i \in \mathscr{B}$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що топологія τ_Z на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.4. Доведіть, що топологія τ_{cc} (див. приклад 3.1.31) на незліченній множині X не має зліченної бази.

Вправа 3.2.5. Доведіть, що стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ є простором з першою аксіомою зліченності, який не має зліченної бази.

Наступне твердження надає передумови означення передбази топологічного простору.

Твердження 3.2.11. *Для довільної сім'ї $\mathscr{P}$ підмножин множини X такої, що $\bigcup \mathscr{P} = X$, всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють базу $\mathscr{B}$ деякої топології τ на X, причому топологія τ є найслабшою серед тих, які містять сім'ю $\mathscr{P}$.*

Доведення. Очевидно, що $\bigcup \mathscr{B} = X$ і сім'я $\mathscr{B}$ замкнена стосовно скінченних перетинів, а отже виконуються умови ($\mathscr{B}$1) і ($\mathscr{B}$2) твердження 3.2.4. Звідси випливає, що $\mathscr{B}$ — база деякої топології τ на X.

Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{P}$ є відкритими множинами в деякій топології τ' на X, то і відкритими множинами є їхні скінченні перетини, а отже $\mathscr{B} \subseteq \tau'$. Звідси випливає, що всі всеможливі об'єднання елементів сім'ї $\mathscr{B}$ є елементами сім'ї τ', а отже $\tau \subseteq \tau'$. □

Означення 3.2.12. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\mathscr{P} \subseteq \tau$ називається *передбазою топології* τ, або *передбазою топологічного простору* (X, τ), якщо всі скінченні перетини сім'ї $\mathscr{P}$ утворюють деяку базу топології τ.

Надалі, якщо $\mathscr{P}$ — передбаза топології τ на X, то будемо говорити, що $\mathscr{P}$ *породжує топологію* τ на X.

З твердження 3.2.11 випливає, що довільна сім'я $\mathscr{P}$ підмножин множини X така, що $\bigcup \mathscr{P} = X$ є передбазою деякої топології τ на X.

Означення 3.2.13. Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожної точки $x \in X$ визначена база $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *системою відкритих околів топологічного простору* (X, τ).

Твердження 3.2.14. *Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ підмножин множини X є системою відкритих околів топологічного простору (X, τ) для деякої топології τ на X тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:*

($\mathscr{BP}$1) *$\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ для довільного $x \in X$ і $x \in U$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;*
($\mathscr{BP}$2) *якщо $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U$;*
($\mathscr{BP}$3) *для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $V \subseteq U_1 \cap U_2$.*

Доведення. Очевидно, що довільна система $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ відкритих околів топологічного простору (X, τ) задовольняє умови ($\mathscr{BP}$1), ($\mathscr{BP}$2) і ($\mathscr{BP}$3). Справді, властивість ($\mathscr{BP}$1) випливає безпосередньо з означення бази в точці x. Властивості ($\mathscr{BP}$2) і ($\mathscr{BP}$3) також випливають з цього означення, оскільки $U \in \mathscr{B}(y)$ і $U_1 \cap U_2$ — відкрита множина, що містить точку x.

Обернене твердження очевидне. □

Твердження 3.2.15. *Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:*

(*i*) *$x \in \mathrm{Cl}(A)$;*
(*ii*) *$U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x і довільного $U \in \mathscr{B}(x)$;*
(*iii*) *існує база $\mathscr{B}(x)$ в точці x така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}(x)$.*

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з означення дочки дотику множини.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Існує відкритий окіл V точки x такий, що $V \cap A = \varnothing$. Тоді для довільної бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x існує елемент $U \in \mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subseteq V$. Звідси випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить умові (iii). □

З твердження 3.2.15 випливають два наслідки.

Наслідок 3.2.16. *Нехай (X, τ) — топологічний простір. Якщо U — відкрита множина в (X, τ), $A \subset X$ і $U \cap A = \varnothing$, то $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.*

Зокрема, якщо U і V — диз'юнктні відкриті множини в (X, τ), то

$$U \cap \mathrm{Cl}(V) = \varnothing = \mathrm{Cl}(U) \cap V.$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$. Візьмемо за базу $\mathscr{B}(x)$ в точці x сім'ю всіх відкритих околів точки x. З твердження 3.2.15 випливає, що $U \cap A = \varnothing$, а це суперечить нашому припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.

Друге частина наслідку випливає з першої. □

Наслідок 3.2.17. *Нехай (X, τ) — топологічний простір. Для довільної підмножини $A \subset X$ такі умови є еквівалентними:*

(i) A щільна в (X, τ);
(ii) $U \cap A \neq \varnothing$ для довільної бази $\mathscr{B}$ простору (X, τ) і довільного $U \in \mathscr{B}$;
(iii) існує база $\mathscr{B}$ простору (X, τ) така, що $U \cap A \neq \varnothing$ для довільного $U \in \mathscr{B}$.

Твердження 3.2.18 описує точки накопичення множини мовою бази в точці.

Твердження 3.2.18. *Точка $x \in X$ належить A^d у топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожен елемент U деякої (або, що еквівалентно, довільної) бази $\mathscr{B}(x)$ у точці x простору X містить хоча б одну точку множини A, відмінну від x.*

Доведення. Припустимо, x — точка накопичення множини A. За означенням маємо, що $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$. Звідси випливає, що для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$ перетин $U \cap (A \setminus \{x\})$ є непорожньою множиною, тобто множина U містить точку множини A, відмінну від точки x.

Якщо кожен елемент U деякої бази $\mathscr{B}(x)$ в точці x простору X містить деяку точку множини A, відмінну від точки x, тобто $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ для кожного елемента U бази $\mathscr{B}(x)$, то $x \in \mathrm{Cl}(A \setminus \{x\})$ за твердженням 3.2.15, а це означає що $x \in A^d$. □

Наступну теорему ми будемо часто використовуватимемо в доведеннях.

Теорема 3.2.19. *Якщо множина A щільна в топологічному просторі X, то*

$$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$$

для довільної відкритої множини U в X.

Доведення. Для довільної точки $x \in \mathrm{Cl}(U)$ і довільного її околу W у просторі X перетин $W \cap U$ є відкритою непорожньою множиною в X. За твердженням 3.1.28 маємо, що $W \cap U \cap A \neq \varnothing$. Тоді з твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \mathrm{Cl}(U \cap A)$. Отже виконується включення

$$\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(U \cap A).$$

Обернене включення $\mathrm{Cl}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}(A)$ очевидне. □

З властивості ($\mathscr{CO}3$) оператора замикання випливає, що замикання скінченного об'єднання множин збігається з об'єднанням замикання цих множин, тобто оператор замикання є скінченно адитивним. Виявляється, що оператор замикання не є зліченно адитивним, тобто замикання зліченного об'єднання множин не збігається з об'єднанням замикання цих множин.

Приклад 3.2.20. На $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією розглянемо зліченну сім'ю замкнених одноточкових підмножин

$$\mathscr{C} = \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $\operatorname{Cl}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, а отже

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Однак, очевидно, що точка $0 \in \mathbb{R}$ — єдина точка накопичення множини $\bigcup \mathscr{C}$, а отже

$$\operatorname{Cl}\left(\bigcup \mathscr{C}\right) = \operatorname{Cl}\left(\bigcup \left\{\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl}\left(\left\{\tfrac{1}{n}\right\}\right).$$

Визначимо тепер важливий клас сімей множин, для яких оператор замикання адитивний.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченним*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина

$$\{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. Якщо довільна точка $x \in X$ має окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, то ми називаємо сім'ю $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *дискретною*. Очевидно, що кожна дискретна сім'я, а також довільна скінченна сім'я є локально скінченною.

Теорема 3.2.21. *Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ підмножин топологічного простору X виконується рівність*

$$\operatorname{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \operatorname{Cl}_X(A_s).$$

Доведення. З наслідку 3.1.17(iv) випливає включення

$$\operatorname{Cl}_X(A_s) \subseteq \operatorname{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$$

для довільного $s \in \mathcal{S}$, а отже виконується включення

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \operatorname{Cl}_X(A_s) \subseteq \operatorname{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right).$$

Для того, щоб довести обернене включення, зауважимо, що з локальної скінченності сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, для довільної точки $x \in \operatorname{Cl}_X\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\right)$ існує такий її окіл U, що множина

$$\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid U \cap A_s \neq \varnothing\}$$

скінченна. З твердження 3.2.15 випливає, що

$$x \notin \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big).$$

Оскільки

$$x \in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s\Big) = \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) \cup \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0} A_s\Big),$$

то маємо

$$x \in \mathrm{Cl}_X\Big(\bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} A_s\Big) = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathrm{Cl}_X(A_s) \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Cl}_X(A_s),$$

що і завершує доведення теореми. □

Наслідок 3.2.22. *Нехай $\mathscr{F}$ — локально скінченна сім'я топологічного простору X і $F = \bigcup \mathscr{F}$. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є замкненими множинами топологічного простору X, то F — замкнена множина в просторі X. Якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{F}$ є відкрито-замкненими множинами в просторі X, то множина F також є відкрито-замкненою в X.*

Теорема 3.2.23. *Нехай $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — локально скінченна (дискретна) сім'я топологічного простору X. Тоді сім'я $\{\mathrm{Cl}_X(A_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є також локально скінченною (дискретною) в X.*

Щільністю топологічного простору (X,τ) називається кардинал

$$d((X,\tau)) = \min\{|A| \mid \mathrm{Cl}(A) = X\}.$$

Означення 3.2.24. Топологічний простір (X,τ) називається *сепаребельним*, якщо (X,τ) містить зліченну щільну підмножину, тобто $d((X,\tau)) \leqslant \aleph_0$.

З наслідку 3.2.17 випливає

Наслідок 3.2.25. *Для довільного топологічного простору (X,τ) виконуєтьс нерівність $d((X,\tau)) \leqslant w((X,\tau))$.*

Приклад 3.2.26. Нехай $(\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$ — дійсні числа зі звичайною топологією (див. приклад 3.2.7). Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, і топологічний простір $(\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$ має зліченну базу (див. приклад 3.2.7). Отже, маємо, що

$$d((\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})) = w((\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})) = \aleph_0.$$

Приклад 3.2.27. Нехай $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ — стрілка Зоргенфрея. Оскільки між двома різними дійсними числами існує хоча б одне раціональне число, то за наслідком 3.2.17 множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$. Однак топологічний простір простір $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ не має зліченної бази (див. вправу 3.2.5). Отже,

$$d((\mathbb{R},\tau_{ZL})) = \aleph_0 < w((\mathbb{R},\tau_{ZL})).$$

Приклад 3.2.28. Нехай

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\},$$
$$L_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \subset L$$

і

$$L_1 = L \setminus L_0.$$

Для кожної точки $x \in L_0$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, що дотикається прямої L_0 у точці x (див. рис. 3.2). Нехай далі

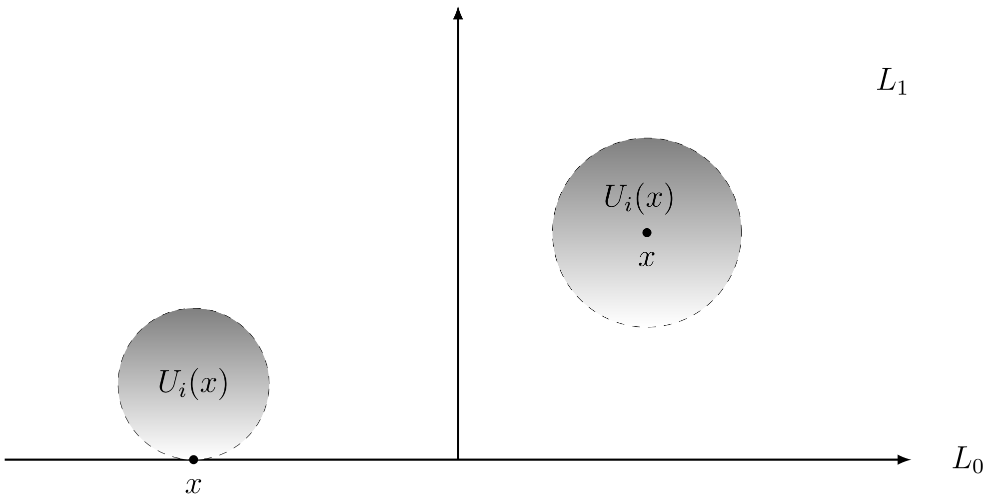


Рис. 3.2: Площина Немицького L

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right) \cup \{x\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Для кожної точки $x \in L_1$ і довільного дійсного числа $r > 0$ через $U(x,r)$ позначимо множину всіх точок з L, які лежать в середині круга радіусі r, і нехай

$$U_i(x) = U\left(x, \tfrac{1}{i}\right), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Безпосередньою перевіркою доводиться, що сім'я $\{\mathscr{B}(x) \mid x \in L\}$, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$).

Множина L_0 замкнена стосовно топології, породженої системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$.

Топологічний простір L називається *площиною Немицького*.

Вправа 3.2.6. Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in L}$, означена в прикладі 3.2.28, де $\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$, задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$), а також для площини Немицького виконуються умови:[5]

$$d(L) = \chi(L) = \aleph_0 \qquad \text{і} \qquad w(L) > \aleph_0.$$

[5]Надалі, якщо зрозуміло про який топологічний простір X йде мова, то вагу, характер і щільність цього простору X будемо позначати через $w(X)$, $\chi(X)$ і $d(X)$, відповідно.

Вправа 3.2.7. Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}(x)\}_{x\in\mathbb{I}}$, де

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{u}}(x) = \begin{cases} \{U_\varepsilon(0) = [0,\varepsilon) \mid 0 < \varepsilon < 1\}, & \text{якщо } x = 0; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid 0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 1\}, & \text{якщо } 0 < x < 1; \\ \{U_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1] \mid 0 < \varepsilon < 1\}, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$$

задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$), а також є базою звичайної (евклідової) топології $\tau_{\mathfrak{u}}$ на одиничному замкненому інтервалі $\mathbb{I}$.

Приклад 3.2.29. На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \left\{\mathbb{R}^2, \left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-\varepsilon)^2=\varepsilon^2\right\} \mid \varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}\right\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ має злічену базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ є сепарабельним?

Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2,\tau)$:

(*i*) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$;
(*ii*) $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$;
(*iii*) $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
(*iv*) $D = \{(0,0)\}$.

Розв'язок. Спочатку опишемо елементи передбази $\mathscr{P}$, відмінні від $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 3.3). Множина

$$W_\varepsilon = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-\varepsilon)^2=\varepsilon^2\right\}$$

— це коло радіуса $|\varepsilon|$ з центром у точці $(0,\varepsilon)$, причому $\varepsilon\neq 0$.

(1) Сім'я $\mathscr{P}$ не є базою топології на множині $\mathbb{R}^2$, оскільки $\{(0,0)\} = W_2\cap W_{-1{,}5}$ — одноточкова множина, яка не елементом сім'ї $\mathscr{P}$, а отже не виконується умова ($\mathscr{B}1$) твердження 3.2.4.

Тепер ми побудуємо базу $\mathscr{B}$ топології, породженої передбазою $\mathscr{P}$. Покладемо $\mathscr{B} = \mathscr{P}\cup\{(0,0)\}$. Очевидно, що сім'я $\mathscr{B}$ задовольняє умови ($\mathscr{B}1$) і ($\mathscr{B}2$) твердження 3.2.4. Опишемо базові околи точок множини $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що кожну точку (x,y), де $y\neq 0$, містить лише один елемент W_ε бази $\mathscr{B}$. Точку $(0,0)$ містять усі елементи бази $\mathscr{B}$. Кожну точку $(x,0)$, де $x\neq 0$, містить лише один елемент $\mathbb{R}^2$ бази $\mathscr{B}$.

(2) Розглянемо елемент W_ε бази $\mathscr{B}$ і точку $(\varepsilon,\varepsilon)\in W_\varepsilon$. Оскільки підсім'я $\{W_\varepsilon \mid \varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ в $\mathscr{B}$ незліченна та $W_{\varepsilon_1}\cap W_{\varepsilon_2} = \{(0,0)\}$ для довільних різних відмінних від нуля дійсних чисел ε_1 і ε_2, то не існує такої зліченної сім'ї $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2,\tau)$, що для довільного числа $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ існує відкрита множина $U_i\in\mathscr{U}$ така, що $(\varepsilon,\varepsilon)\in U_i\subseteq W_\varepsilon$. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2,\tau)$ не має зліченної бази.

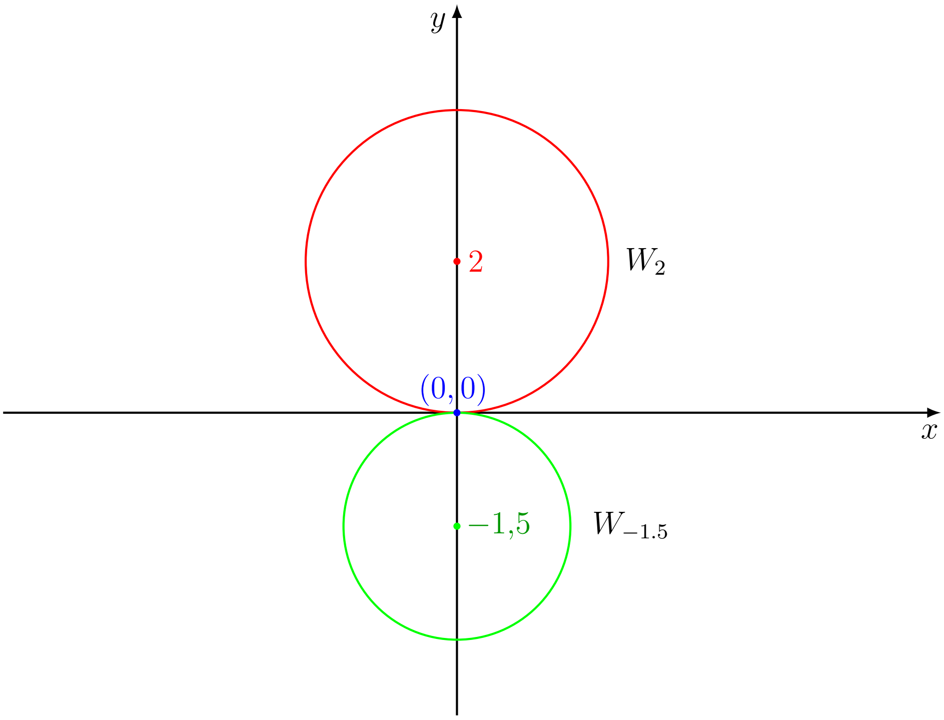


Рис. 3.3: До прикладу 3.2.29

(3) Зауважимо, що кожен елемент бази $\mathscr{B}$ містить точку $(0,0)$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що множина $\{(0,0)\}$ щільна в просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$, а отже топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним.

Зауважимо, що внутрішність $\mathrm{Int}(A)$ множини A в топологічному просторі (X, τ) є найбільшою серед таких відкритих підмножин топологічного простору (X, τ), які містяться в A. Звідси випливає, що для того, щоб знайти $\mathrm{Int}(A)$ у топологічному просторі (X, τ), достатньо знайти елементи бази топології τ, які містяться в множині A та об'єднати їх. Також, за твердженням 3.2.15 перевіряти, чи точка x є точкою дотику до множини A топологічного простору (X, τ) достатньо лише на елементах бази топології τ.[6]

Використавши попередні два зауваження отримуємо:

(i) $\mathrm{Int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-4)^2 < 16\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+4)^2 < 16\} \cup \{(0,0)\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}^2$, де $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 4\}$ (див. рис. 3.4(i));

(ii) $\mathrm{Int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$, $\overline{B} = \mathbb{R}^2$, де $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant 4\}$ (див. рис. 3.4(ii));

(iii) $\mathrm{Int}(C) = \{(0,0)\}$, $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, де $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;

(iv) $\mathrm{Int}(D) = \{(0,0)\}$, $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, де $D = \{(0,0)\}$.

[6] Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше (див. означення 3.1.15), будемо позначати через $\overline{A}$.

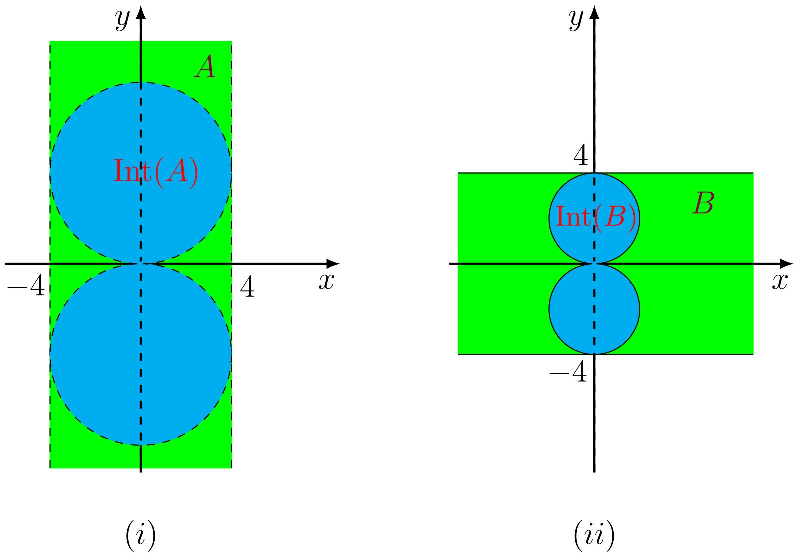


Рис. 3.4: До прикладу 3.2.29, $\mathrm{Int}(A)$ і $\mathrm{Int}(B)$

Приклад 3.2.30. Нехай X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Очевидно, що (X, τ) — топологічний простір. Усі одноточкові підмножини топологічного простору (X, τ), за виключенням одноточкової множини $\{x_0\}$, є відкрито-замкненими, а множина $\{x_0\}$ є замкненою, але не є відкритою. Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus F$, де F — скінченна підмножина в X, є базою топологічного простору (X, τ). Ця база є базою мінімальної потужності, а отже

$$w((X, \tau)) = |X|.$$

Сім'я, яка складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$ таких, що $x \neq x_0$ і всіх множини вигляду $X \setminus \{x\}$ є передбазою топологічного простору (X, τ). Для довільної підмножини $A \subset X$ маємо

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{якщо } A - \text{скінченна множина;} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{якщо } A - \text{нескінченна множина} \end{cases}$$

і

$$\mathrm{Int}(A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } X \setminus A - \text{скінченна множина;} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{якщо } X \setminus A - \text{нескінченна множина.} \end{cases}$$

З передостанньої рівності випливає, що довільні дві нескінченні замкнені підмножини топологічного простору (X, τ) перетинаються.

Вправа 3.2.8. Доведіть, що сім'я τ, яка означена в прикладі 3.2.30 є топологією.

Приклад 3.2.31. На площині $\mathbb{R}^2$ дано сім'ю підмножин

$$\mathscr{P} = \{\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай τ — топологія на $\mathbb{R}^2$, породжена передбазою $\mathscr{P}$.

Перевіримо:

(1) чи сім'я $\mathscr{P}$ є базою?
(2) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ має зліченну базу?
(3) чи топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є сепарабельним?

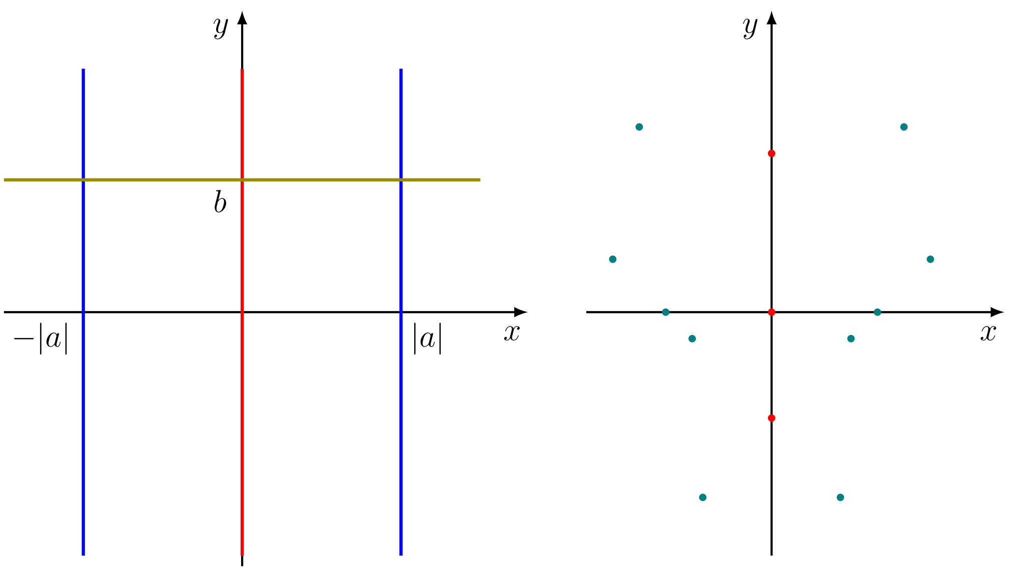
Знайдіть замикання, внутрішність і межу таких підмножин у топологічному просторі $(\mathbb{R}^2, \tau)$:

(i) $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$;
(ii) $B = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$;
(iii) $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$;
(iv) $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$;
(v) $E = \{(1, 1)\}$.

Розв'язок. Спочатку зобразимо елементи сім'ї $\mathscr{P}$ на площині $\mathbb{R}^2$. Очевидно, що елементами підсім'ї

$$\mathscr{P}_1 = \big\{\big\{(x, y) \mid x^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\big\} \mid a \in \mathbb{R}\big\}$$

є пари вертикальних прямих $x = |a|$ та $x = -|a|$, якщо $a \neq 0$ (на рис. 3.5(i) вони зображені синім кольором), а елементами підсім'ї



(i) (ii)

Рис. 3.5: До прикладу 3.2.31

$$\mathscr{P}_2 = \{\{(x, y) \mid y = b, x \in \mathbb{R}\} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

є горизонтальні прямі $y = b$ (на рис. 3.5(i) вони зображені оливковим кольором).

Очевидно, що для довільних $U_1 \in \mathscr{P}_1$ і $U_2 \in \mathscr{P}_2$ маємо, що $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, і не існує такого елемента $U \in \mathscr{P}$, що $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Звідси випливає, що сім'я $\mathscr{P}$ не може бути базою топології (не виконується умова ($\mathscr{B}1$)).

За визначенням сім'ї $\mathscr{P}$ маємо, що елементи з сім'ї $\mathscr{P}_1$ або збігаються, або не перетинаються. Аналогічну властивість задовольняють елементи сім'ї $\mathscr{P}_2$. Отож, сім'я

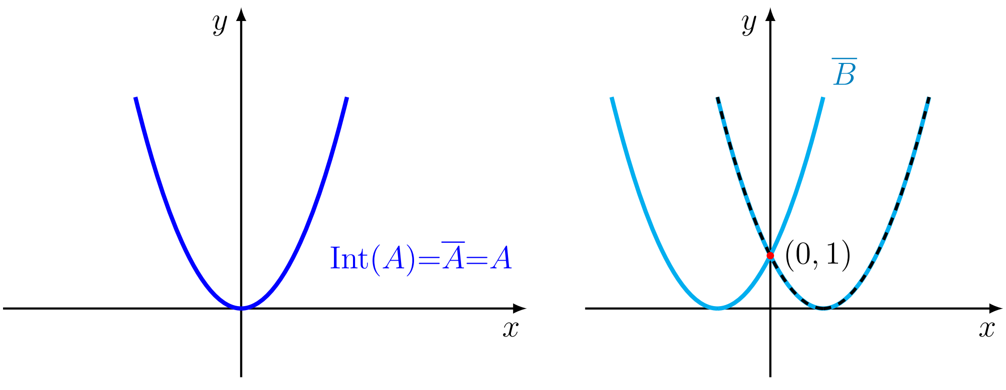
$$\mathscr{B} = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathscr{P}_1, U_2 \in \mathscr{P}_2\} = \{\{(-a, b), (a, b)\} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

є базою топології на $\mathbb{R}^2$, породженою передбазою $\mathscr{P}$. Елементами бази $\mathscr{B}$ є всеможливі одноточкові множини, які лежать на осі Oy (на рис. 3.5(ii) вони зображені червоним кольором), а також множини, які парами точок, симетричних стосовно осі Oy (на рис. 3.5(ii) вони зображені кольором морської хвилі). З вище сказаного випливає, що кожна точка (x, y) має найменший базовий окіл

$$U(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{якщо} \quad x = 0; \\ \{(x, y), (-x, y)\}, & \text{якщо} \quad x \neq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

З вище сказаного випливає, що підсім'я $\mathscr{B}_0 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ в $\mathscr{B}$ є підсім'єю довільної бази топології τ на $\mathbb{R}^2$, породженої передбазою $\mathscr{P}$, оскільки елементами її одноточкові підмножини. Також, позаяк $|\mathscr{B}_0| = \mathfrak{c}$, то топологія τ не має зліченної бази, а з наслідку 3.2.17 і принципу Діріхле випливає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ не є сепарабельним.

(i) Оскільки множина $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ симетрична стосовно осі Oy (див. рис. 3.6(i)), то з означення бази $\mathscr{B}$ випливає, що всі точки множини A є вну-



(i) (ii)

Рис. 3.6: До прикладу 3.2.31

трішніми, а отже $\operatorname{Int}(A) = A$. Також з того, якщо $(x, y) \notin A$ випливає, що $(-x, y) \notin A$ (див. рис. 3.6(i)), то з (3.1) отримуємо, що $\overline{A} = A$ і

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A) = A \setminus A = \varnothing.$$

(ii) Оскільки множина $B = \{(x, y) \mid y = (x-1)^2\}$ містить лише одну точку симетричну стосовно осі Oy (на рис. 3.6(ii) множина B зображена штрихованою лінією), це точка $(0, 1)$, то $\operatorname{Int}(B) = \{(0, 1)\}$. Також, з з (3.1) випливає, що всі точки, які симетричні точкам множини B стосовно осі Oy є точками дотику цієї множини, а отже

$$\overline{B} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2\right\}$$

(на рис. 3.6(ii) множина $\overline{B}$ зображена голубою лінією). Очевидно, що

$$\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \setminus \{(0, 1)\} = \left\{(x, y) \mid y = (x-1)^2, x \neq 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = (x+1)^2, x \neq 0\right\}.$$

(iii) Для множини $C = \{(x, y) \mid y = 0, x \geqslant -1\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}(C) &= \{(x, y) \mid y = 0, |x| \leqslant 1\}, \\ \overline{C} &= \{(x, y) \mid y = 0\}, \\ \operatorname{Fr}(C) &= \{(x, y) \mid y = 0, x < -1\}. \end{aligned}$$

(iv) Для множини $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$ з наведених міркувань у (i) та (ii) випливає, що $\operatorname{Int}(D) = \overline{D} = D$ (див. рис. 3.7), а отже $\operatorname{Fr}(D) = \varnothing$.

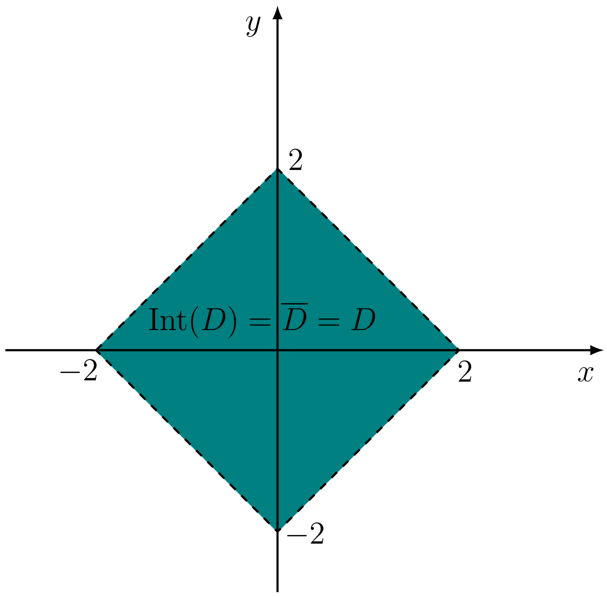


Рис. 3.7: До прикладу 3.2.31

(v) Для множини $E = \{(1, 1)\}$ аналогічно отримуємо, що

$$\operatorname{Int}(E) = \varnothing, \qquad \overline{E} = \{(1, 1), (-1, 1)\} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{Fr}(E) = \{(1, 1), (-1, 1)\}.$$

Приклад 3.2.32. Доведіть, що топологічний простір (X, τ_Z), означений у вправі 3.1.9, є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай A — довільна нескінченна зліченна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z). Оскільки довільна непорожня відкрита підмножина U в топологічному просторі (X, τ_Z) має скінченне доповнення, то $A \cap U \neq \varnothing$. Тоді за наслідком 3.2.17 маємо, що A — щільна підмножина в топологічному просторі (X, τ_Z), а отже топологічний простір (X, τ_Z) є сепарабельним.

Зауважимо, що для довільної незліченної множини X топологічний простір (X, τ_{cc}), означений у прикладі 3.1.31, не є сепарабельним. Справді, якщо A — довільна нескінченна зліченна підмножина в (X, τ_{cc}), то $X \setminus A$ — відкрита множина в просторі (X, τ_{cc}), а отже за наслідком 3.2.17 топологічний простір не є сепарабельним.

На завершенні цього підрозділу ми наведемо дві теореми про сім'ї відкритих множин в топологічному просторі ваги $\mathfrak{m}$. Ці теореми часто застосовуються пвд час доведень різноманітних фактів у загальній топології.

Теорема 3.2.33.

3.3 Неперервні відображення топологічних просторів

Означення 3.3.1. Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Будемо говорити, що відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ є *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) існує такий відкритий окіл $V(x_0)$ точки x_0 у топологічному просторі (X, τ_X), що

$$f(V(x_0)) \subseteq O(f(x_0))$$

(див. рис. 3.8). Відображення топологічних просторів $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $x_0 \in X$.

Зауважимо, що означення неперервного відображення топологічних просторів у точці, а отже і в загальному випадку, подібне до означення неперервного відображення метричних просторів (див. означення 2.4.4 і 2.4.5): ми лише замінили відкриті кулі з центром в точці у випадку метричних просторів на відкриті околи точки у випадку топологічних просторів.

Приклад 3.3.2. Нехай $f\colon (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y, \tau)$ — довільне відображення з дискретного простору $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$ у довільний топологічний простір (Y, τ). Ми стверджуємо, що відображення $f\colon (X, \tau_{\mathfrak{d}}) \to (Y, \tau)$ неперервне. Справді, для довільної точки $x_0 \in (X, \tau_{\mathfrak{d}})$ і для довільного відкритого відкритого околу $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ у топологічному просторі (Y, τ) маємо, що

$$\{x_0\} \in \tau_{\mathfrak{d}} \qquad \text{і} \qquad f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq O(f(x_0)).$$

Приклад 3.3.3. Нехай $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ — стрілка Зорґенфрея (див. приклад 3.2.5). Означимо відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ за формулою $f(x) = x^2$. Тоді для довільної

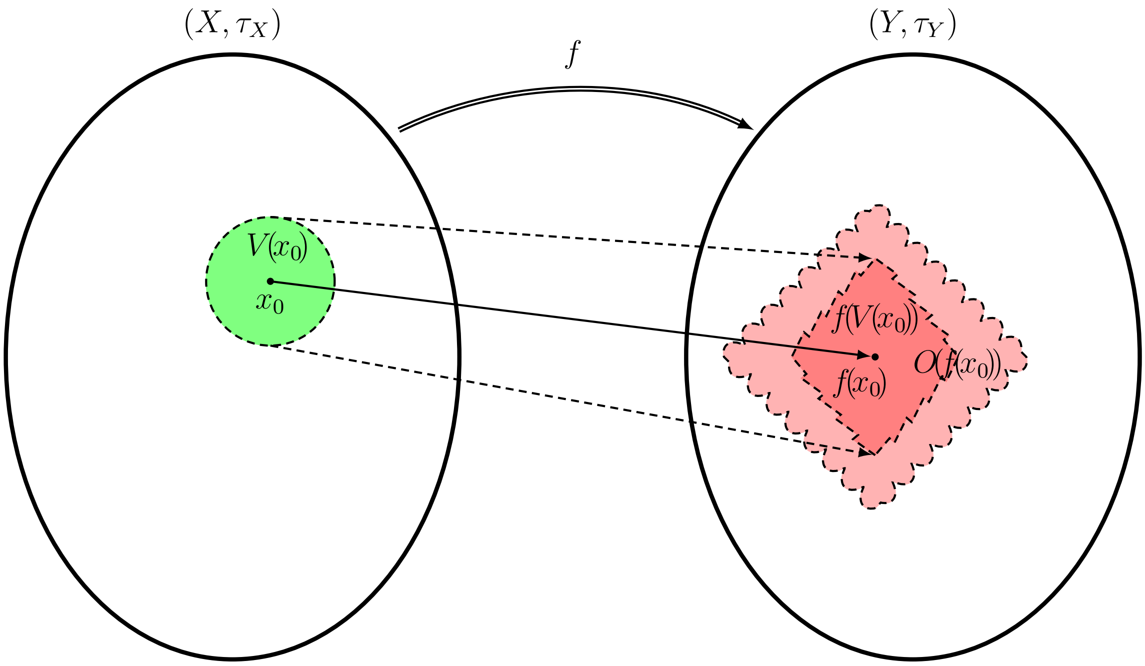


Рис. 3.8: Неперервність відображення $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ в точці $x_0 \in X$

дійсної точки $x_0 \geqslant 0$ і для довільного відкритого околу $U(x_0^2)$ точки x_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ існує її базовий окіл $[x_0^2, x_0^2+\varepsilon) \subseteq U(x_0^2)$, де $\varepsilon > 0$ (див. рис. 3.9). З рівняння

$$(x_0+\delta)^2 = x_0^2 + \varepsilon$$

отримуємо рівність

$$x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 = x_0^2 + \varepsilon,$$

з якої отримуємо квадратне рівняння

$$\delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon = 0,$$

стосовно змінної δ. Розв'язавши його стосовно змінної δ, отримуємо

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$

Оскільки $x_0 \geqslant 0$, то базовий окіл точки x_0 в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ має вигляд $[x_0, x_0+\delta)$ і $\delta > 0$, а отже

$$\delta = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}.$$

Тоді для так вибраного дійсного числа δ виконується умова

$$f\left([x_0, x_0+\delta)\right) \subseteq \left[x_0^2, x_0^2+\varepsilon\right) \subseteq U(x_0^2),$$

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ неперервне в кожній точці $x_0 \geqslant 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

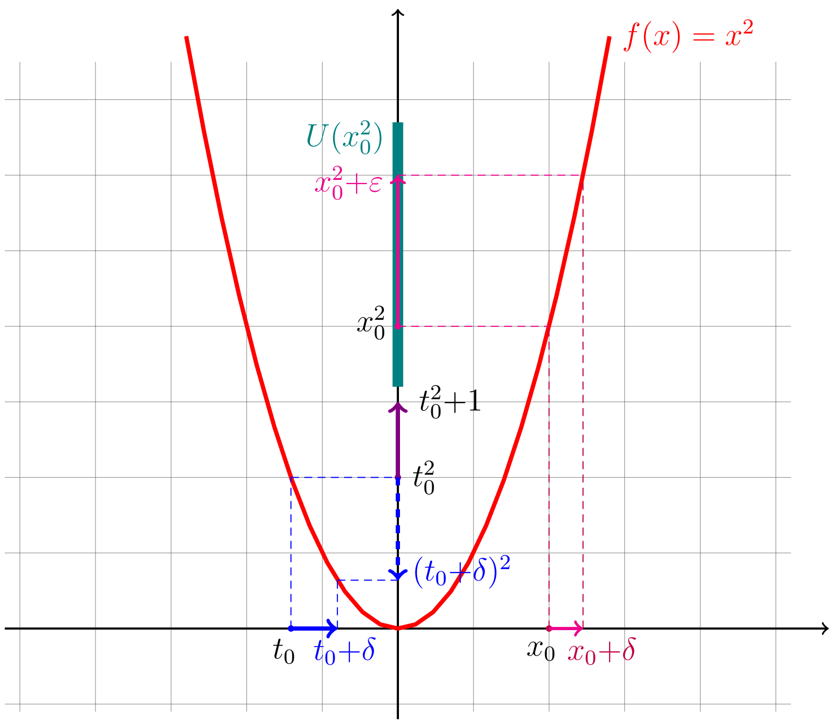


Рис. 3.9: До прикладу 3.3.3

Для довільної дійсної точки $t_0 < 0$ і для базового околу $U(t_0^2) = [t_0^2, t_0^2 + 1)$ точки t_0^2 в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ маємо, що для довільного дійсного числа $\delta > 0$ (див. рис. 3.9) не виконується включення

$$f([t_0, t_0 + \delta)) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right),$$

а отже відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є неперервним в кожній точці $t_0 < 0$ простору стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, оскільки з цього включення випливає, що умова

$$f(U(t_0)) \subseteq \left[t_0^2, t_0^2 + 1\right)$$

не виконується для довільного відкритого околу $U(t_0)$ точки $t_0 < 0$ в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$.

Наше означення неперервного відображення з топологічного простору (X, τ_X) у топологічний простір (Y, τ_Y) ґрунтується на локальній властивості неперервності відображення, а саме на неперервності цього відображення в кожній точці простору (X, τ_X). У подальшому ми будемо часто користуватися методами введення топологій, які описані в підрозділах 3.1 і 3.2, а тому зручно мати критерії неперервності відображень топологічних просторів, які сформульовані у відповідних поняттях і термінах. Критерії такого типу перелічені в теоремі 3.3.4.

Теорема 3.3.4. *Нехай (X, τ_X) і (Y, τ_Y) — топологічні простори. Тоді для відображення $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ такі умови еквівалентні:*

(1) *f — неперервне відображення;*
(2) *$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільної множини $U \in \tau_Y$, тобто повний прообраз довільної відкритої множини в (Y, τ_Y) є відкритою підмножиною в просторі (X, τ_X);*
(3) *$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y;*
(4) *$f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U бази $\mathscr{B}_Y$ топології τ_Y;*
(5) *існують системи околів $\{\mathscr{B}_X(x)\}_{x\in X}$ у топологічному просторі (X, τ_X) і $\{\mathscr{B}_Y(y)\}_{y\in Y}$ у топологічному просторі (Y, τ_Y) такі, що для довільної точки $x \in X$ і для кожного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, що виконується включення $f(U) \subseteq V$;*
(6) *повний прообраз довільної замкненої множини топологічного простору (Y, τ_Y) замкнений в просторі (X, τ_X);*
(7) *$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$;*
(8) *$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ для довільної множини $B \subseteq Y$;*
(9) *$f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$ для довільної множини $B \subseteq Y$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення та $U \in \tau_Y$ — непорожня множина. Тоді для довільної точки $x \in X$ такої, що $f(x) \in U$ існує відкритий окіл V точки x у топологічному просторі (X, τ_X) такий, що $f(V) \subseteq U$, а це означає, що кожна точка множини $f^{-1}(U)$ є внутрішньою, а отже $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Якщо виконується умова (2), то для довільної точки $x \in X$ і для довільної відкритої множини U у топологічному просторі (Y, τ_Y), що містить образ $f(x)$, множина $V = f^{-1}(U)$ є відкритим околом точки x у топологічному просторі (X, τ_X) для якого виконується умова

$$f(V) = f(f^{-1}(U)) = U,$$

а отже $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ — неперервне відображення за означенням 3.3.1.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) очевидно, оскільки всі елементи U передбази $\mathscr{P}_Y$ є елементами топології τ_Y на Y.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай $\mathscr{P}_Y$ — така передбаза топології τ_Y на Y, що $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$. Виберемо базу $\mathscr{B}_Y$ топологічного простору (Y, τ_Y), яка складається з усіх скінченних перетинів $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$ елементів передбази $\mathscr{P}_Y$. Оскільки

$$f^{-1}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k\right) = f^{-1}\left(V_1\right) \cap f^{-1}\left(V_2\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(V_k\right),$$

то виконується умова (4).

(4) $\Rightarrow$ (5). Для довільного елемента $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$ існує такий елемент $W \in \mathscr{B}_Y$, що $f(x) \in W \subseteq V$. Оскільки множина $f^{-1}(W)$ відкрита в топологічному просторі (X, τ_X), то існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє умову $U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді

$$f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V.$$

(5) $\Rightarrow$ (6). Нехай $B = \overline{B}$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y, τ_Y).[7] Оскільки

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B),$$

[7]Надалі для простоти викладу замикання множини A, як ми домовлялися раніше (див. означення 3.1.15), будемо позначати через $\overline{A}$.

то достатньо довести, що повний прообраз множини $Y \setminus B$ стосовно відображення f є відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ_X). Для цього доведемо, що кожна точка $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ має відкритий окіл U, який міститься в $f^{-1}(Y \setminus B)$, тобто є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(Y \setminus B)$. Для довільної точки $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ маємо

$$f(x) \in f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B.$$

Отже, існує такий елемент $V \in \mathscr{B}_Y(f(x))$, що $V \subseteq Y \setminus B$. За умовою (5) існує елемент $U \in \mathscr{B}_X(x)$, який задовольняє включення $f(U) \subseteq V$. Очевидно, що

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y \setminus B).$$

Для доведення імплікації (6) $\Rightarrow$ (7) зауважимо, що $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі (X, τ_X), яка містить множину A, а отже

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

звідки випливає, що

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Для доведення імплікації (7) $\Rightarrow$ (8), використаємо умову (7) для рівності $A = f^{-1}(B)$. Отримаємо включення

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

звідки випливає включення

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Для доведення імплікації (8) $\Rightarrow$ (9), використаємо умову (8) для множини $Y \setminus B$. Отримаємо включення

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right),$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = \\ &= X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}\left(Y \setminus B\right)} = \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \\ &= \operatorname{Int}\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

(9) $\Rightarrow$ (2). Для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ виконується рівність $U = \operatorname{Int}(U)$. З умови (9) отримуємо, що

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(U)) \subseteq \operatorname{Int}\left(f^{-1}(U)\right).$$

Отож,

$$f^{-1}(U) = \operatorname{Int}\left(f^{-1}(U)\right),$$

тобто $f^{-1}(U)$ — відкрита множина в топологічному просторі (X, τ_X). $\square$

Якщо $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ — відображення, то очевидно, що виконується рівність

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{3.2}$$

З рівності (3.2) і теореми 3.3.4, а саме з еквівалентності тверджень (1) і (2) цієї теореми, випливає

Твердження 3.3.5. *Композиція двох неперервних відображень топологічних просторів є неперервним відображенням.*

Приклад 3.3.6. З теореми 3.3.4 випливає, що довільне відображення з довільного топологічного простору в антидискретний простір є неперервним. Аналогічно з теореми 3.3.4 випливає твердження, доведене в прикладі 3.3.2, а також, що відображення $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, означене в прикладі 3.3.3, не є неперервним.

Приклад 3.3.7. Доведіть, якщо довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то (X, τ_X) — антидискретний простір.

Розв'язок. Оскільки довільне відображення з довільного топологічного простору (Y, τ) у топологічний простір (X, τ_X) є неперервним, то за топологічний простір (Y, τ) можемо взяти множину X з антидискретною топологією, тобто простір (X, τ_{ad}) (див. приклад 3.1.3). Розглянемо тотожне відображення

$$\mathrm{id}_X\colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X),\ x \mapsto x,$$

яке за умовою має бути неперервним. Якщо топологічний простір (X, τ_X) не антидискретний, то існує відкрита множина U в (X, τ_X), яка відмінна від X і $\varnothing$. З неперервності відображення $\mathrm{id}_X\colon (X, \tau_{\mathrm{ad}}) \to (X, \tau_X)$ випливає, що U — відкрита множина в антидискретному просторі (X, τ_{ad}). Однак це неможливо, оскільки за припущенням $\varnothing \neq U \neq X$. З отрманого протиріччя випливає, що (X, τ_X) — антидискретний простір.

Приклад 3.3.8. Нехай L — площина Немицького (див. приклад 3.2.28). Перевірте яка з проекцій

$$\mathrm{pr}_1\colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (x, 0),$$
$$\mathrm{pr}_2\colon L \to L,\ (x, y) \mapsto (0, y)$$

є неперервним відображенням. Якщо ж відображення не є неперервним, то вказати його точки неперервності.

Розв'язок. Спочатку розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_1\colon L \to L$ (див. рис. 3.10).

Оскільки $\mathrm{pr}_1(x, y) = (x, 0)$ для довільної точки (x, y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_1(U_i(x, y)) = \left\{(a, 0) \mid x - \tfrac{1}{i} < a < x + \tfrac{1}{i}\right\} \nsubseteq U_k(x, 0)$$

для довільних околів $U_i(x, y)$ та $U_k(x, 0)$ точок (x, y) і $(x, 0)$, відповідно, в топологічному просторі L. На рис. 3.10 образ $\mathrm{pr}_1(U_i(x, y))$ відкритого окола $U_i(x, y)$ точки (x, y) зображено червоним кольором. Отож, проекція $\mathrm{pr}_1\colon L \to L$ не є неперервним відображенням в жодній точці площини Немицького L.

Тепер розглянемо проекцію $\mathrm{pr}_2\colon L \to L$ (див. рис. 3.11).

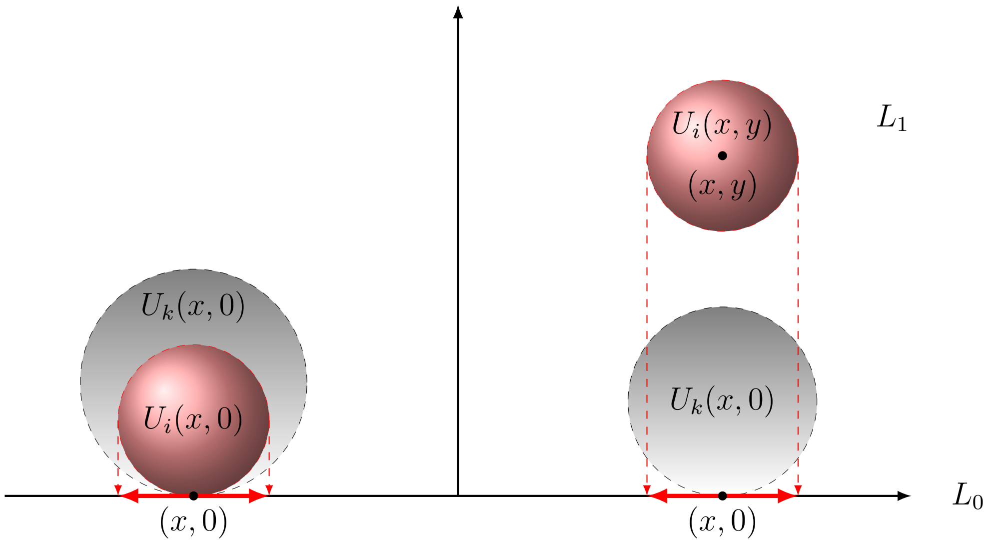


Рис. 3.10: Неперервність проекції $\mathrm{pr}_1\colon L \to L$ на площині Немицького L

Оскільки $\mathrm{pr}_2(x,y) = (0,y)$ для довільної точки (x,y) площини Немицького L, то маємо, що

$$\mathrm{pr}_2(U_i(x,y)) = \left\{(0,b) \mid y - \tfrac{1}{i} < b < y + \tfrac{1}{i}\right\} \subseteq U_k(0,y)$$

для околів $U_i(x,y)$ та $U_k(0,y)$ точок (x,y) і $(0,y)$, відповідно, де $i > k$, в топологічному просторі L. На рис. 3.11 образ $\mathrm{pr}_2(U_i(x,y))$ відкритого окола $U_i(x,y)$ точки (x,y) зображено відтінками зеленого кольору. Отож, проекція $\mathrm{pr}_2\colon L \to L$ є неперервним відображенням у кожній точці площини Немицького L.

Вправа 3.3.1. Доведіть, якщо довільне відображення з топологічного простору X у довільний топологічний простір Y є неперервним, то X — дискретний простір.

Вправа 3.3.2. Наведіть приклади відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів, що композиція $g \circ f\colon X \to Z$ є неперервним відображенням і виконується одна з умов:

(i) $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ не є неперервними відображеннями;

(ii) $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, але $g\colon Y \to Z$ не є неперервним відображенням;

(iii) $f\colon X \to Y$ не є неперервним відображенням, але $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення.

Вправа 3.3.3. Доведіть, якщо на множині X визначено дві топології τ_1 і τ_2, то тотожне відображення

$$f = \mathrm{id}_X\colon (X,\tau_1) \to (X,\tau_2), \ x \mapsto x$$

є неперервним тоді і лише тоді, коли топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2.

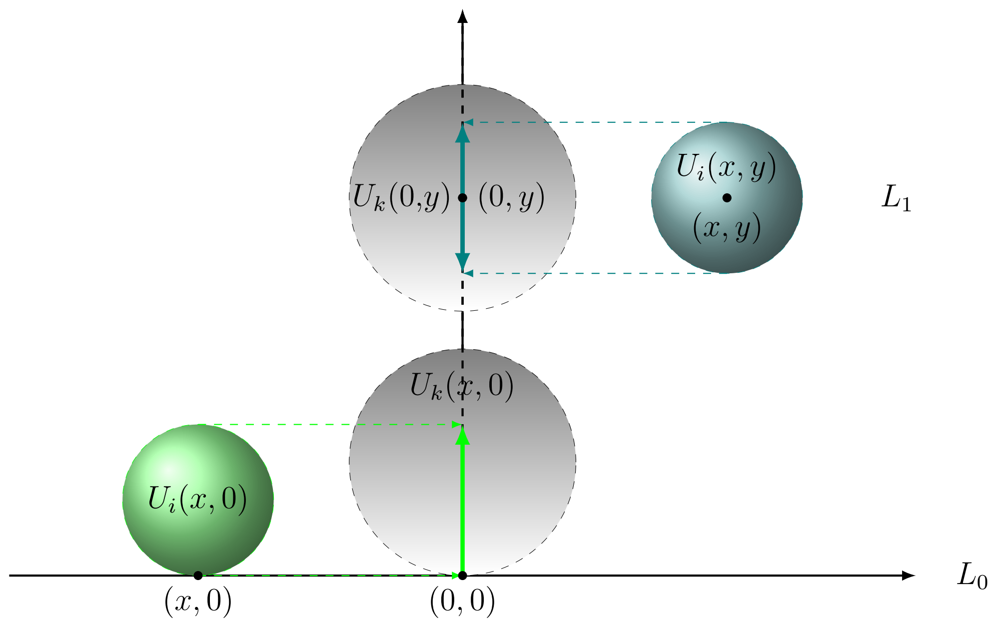


Рис. 3.11: Неперервність проекції $\mathrm{pr}_2\colon L \to L$ на площині Немицького L

Вправа 3.3.4. Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$ (див. приклади 3.2.5 і 3.2.7). Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою $f(x) = [x]$, є неперервним.[8]

Вправа 3.3.5. Нехай τ_{ZL} — топологія стрілки Зорґенфрея на $\mathbb{R}$ і τ_{u} — звичайна топологія на $\mathbb{R}$ (див. приклади 3.2.5 і 3.2.7). Нехай $[a,b)$ — деякий елемент бази $\mathscr{B}_{ZL}$ стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$. Перевірте, чи відображення $f\colon (\mathbb{R},\tau_{ZL}) \to (\mathbb{R},\tau_{\mathrm{u}})$, означене за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [a,b); \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

є неперервним.

Якщо існує неперервне відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y, тобто таке неперервне відображення $f\colon X \to Y$, що $f(X) = Y$, то ми будемо говорити, що топологічний простір X можна *відобразити на* топологічний простір Y або, що топологічний простір Y є *неперервним образом простору* X.

Вправа 3.3.6. Доведіть, що кожен топологічний простір є неперервним образом дискретного простору, а саме своєї дискретної копії.

Твердження 3.3.9. *Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення й A — щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна підмножина в Y.*

[8] Функція $[x]$ взяття цілої частини дійсного числа x визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує числа x.

Доведення. Твердження (1) і (7) теореми 3.3.4 еквівалентні, отже

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)},$$

що і завершує доведення. □

З твердження 3.3.9 випливають такі два наслідки:

Наслідок 3.3.10. *Якщо топологічний простір Y є неперервним образом топологічного простору X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.*

Наслідок 3.3.11. *Неперервний образ сепарабельного простору є сепарабельним простором.*

Тепер звернемося до вивчення двох важливих класів неперервних відображень топологічних просторів: замкнених та відкритих відображень.

Означення 3.3.12. Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *замкненим* (*відкритим*), якщо для кожної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$ образ $f(A)$ — замкнена (відрита) множина в Y. Відображення топологічних просторів, яке одночасно є замкненим і відкритим, називається *відкрито-замкненим відображенням*.[9]

Очевидно, що виконується таке твердження

Твердження 3.3.13. *Композиція двох відкритих (замкнених) відображень топологічних просторів є відкритим (замкненим) відображення.*

Теорема 3.3.14. *Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної відкритої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така відкрита множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.*

Доведення. Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ замкнене, $B \subseteq Y$ і A — відкрита підмножина в просторі X, яка містить $f^{-1}(B)$. Тоді множина $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ відкрита в просторі Y і містить множину B. Крім того,

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) &= \\ = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) &\subseteq \\ \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A. \end{aligned}$$

Припустимо, що неперервне відображення $f\colon X \to Y$ задовольняє вище перелічені умови. Зафіксуємо замкнену підмножину $F \subseteq X$. Множина $A = X \setminus F$ — відкрита в просторі X, і для

$$B = Y \setminus f(F)$$

[9] У літературі із загальної топології дуже часто замкнені, відкриті та відкрито-замкнені відображення визначають як не обов'язково неперервні відображення, а лише такі, які задовольняють вище перелічені відповідні умови.

маємо

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= X \setminus f^{-1}(f(F)) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus F = \\ &= A. \end{aligned}$$

Отож, існує відкрита підмножина $C \subseteq Y$ така, що $Y \setminus f(F) \subseteq C$ і $f^{-1}(C) \subseteq A$, тобто $f^{-1}(C) \cap F = \varnothing$. Останнє означає, що $C \cap f(F) = \varnothing$, тобто $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Отже, $f(F) = Y \setminus C$, тобто множина $f(F)$ замкнена в топологічному просторі Y. □

Для відкритих відображень топологічних просторів справджується дуальне твердження до теореми 3.3.14:

Теорема 3.3.15. *Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли для довільної множини $B \subseteq Y$ і кожної замкненої множини $A \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(B)$, існує така замкнена множина $C \subseteq Y$, що містить B і $f^{-1}(C) \subseteq A$.*

Вправа 3.3.7. Доведіть теорему 3.3.15.

Теорема 3.3.16. *Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є замкненим тоді і лише тоді, коли для довільної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U \subseteq X$, яка містить прообраз $f^{-1}(y)$, існує такий відкритий окіл V точки y, що $f^{-1}(V) \subseteq U$.*

Доведення. За теоремою 3.3.14 достатньо довести, якщо відображення f задовольняє сформульованим вище умовам, то відображення f замкнене. Нехай $B \subseteq Y$ — деяка підмножина й $A \subseteq X$ — відкрита підмножина така, що $f^{-1}(B) \subseteq A$. Для кожної точки $y \in B$ виберемо такий окіл $V_y \subseteq Y$ точки y, що $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. Для відкритої множини $C = \bigcup\limits_{y \in B} V_y$ виконуються умови

$$B \subseteq C \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(C) \subseteq A,$$

а отже відображення $f\colon X \to Y$ є замкненим за теоремою 3.3.14. □

Теорема 3.3.17 випливає з означення бази топологічного простору.

Теорема 3.3.17. *Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y є відкритим тоді і лише тоді, коли існує така база $\mathscr{B}_X$ топологічного простору X, що множина $f(U)$ відкрита в топологічному просторі Y для довільного елемента $U \in \mathscr{B}_X$.*

Приклад 3.3.18. Нехай на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{I} = [0,1]$ визначена звичайна (евклідова) топологія (див. приклади 3.2.7 і 3.2.8).

Відображення $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, визначене за формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

є замкненим, але не є відкритим.

Відображення $f_2 \colon L \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ з площини Немицького L в $\mathbb{R}$ є відкритим, але не є замкненим.

Відображення $f_3 \colon (\mathbb{R}, \tau_{ZL}) \to D_2$ стрілки Зорґенфрея у дискретний двоточковий простір $D_2 = \{0, 1\}$, визначене за формулою

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$$

є відкрито-замкненим.

З теореми 3.3.17 випливає, що неперервні відкриті відображення відображають базу точки в базу точки, а в припущені, що вони є ще крім того сюр'єктивними, отримуємо, що вони відображають базу простору в базу простору, а отже виконується така теорема:

Теорема 3.3.19. *Якщо $f \colon X \to Y$ — відкрите неперервне відображення топологічних просторів X і Y та $x \in X$, то*

$$\chi(f(x), Y) \leqslant \chi(x, X).$$

А якщо крім того $f(X) = Y$, то

$$w(Y) \leqslant w(X) \qquad \text{і} \qquad \chi(Y) \leqslant \chi(X).$$

Означення 3.3.20. Відображення $f \colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо:

(i) f — неперервне;
(ii) f — бієктивне;
(iii) f^{-1} — неперервне.

Два топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм простору X на простір Y.

Для довільного топологічного простору X тотожне відображення $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ є гомеоморфізмом. Очевидно, що обернене відображення до гомеоморфізму, а також композиція двох гомеоморфізмів топологічних просторів, є гомеоморфізмом. Отже, відношення "*гомеоморфності топологічних просторів*" на класі топологічних просторів є відношенням еквівалентності. А тому топологічні простори вивчають з точністю до гомеоморфізму.

Теорема 3.3.21. *Нехай $f \colon X \to Y$ — бієктивне відображення топологічного простору X на топологічний простір Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(i) *f — гомеоморфізм;*
(ii) *f — замкнене відображення;*
(iii) *f — відкрите відображення;*
(iv) *множина $f(A)$ замкнена в топологічному просторі Y тоді і лише тоді, коли множина A замкнена в топологічному просторі X;*

(v) *множина* $f^{-1}(B)$ *замкнена в топологічному просторі* X *тоді і лише тоді, коли множина* B *замкнена в топологічному просторі* Y*;*

(vi) *множина* $f(A)$ *відкрита в топологічному просторі* Y *тоді і лише тоді, коли множина* A *відкрита в топологічному просторі* X*;*

(vii) *множина* $f^{-1}(B)$ *відкрита в топологічному просторі* X *тоді і лише тоді, коли множина* B *відкрита в топологічному просторі* Y*.*

Доведення. Еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (ii)$ та $(i) \Leftrightarrow (iii)$ випливають з того, що

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Аналогічно, еквіваленції $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ та $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливають з рівності

$$A = f^{-1}(f(A))$$

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

З еквіваленції $(i) \Leftrightarrow (iv)$ випливає, що умова (v) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а також з $(iii) \Leftrightarrow (v)$ випливає, що умова (vii) рівносильна тому, що f^{-1} — гомеоморфізм, а це еквівалентно умові (i). □

Приклад 3.3.22. Нехай X — множина дійсних чисел з однією з таких топологій:

(i) дискретна топологія;

(ii) звичайна топологія;

(iii) топологія, означена в прикладі 3.1.21 з $x_0 = 0$;

(iv) топологія стрілки Зорґенфрея;

(v) антидискретна топологія.

Для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a \colon X \to X$, визначене за формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Якщо $a < 0$, то відображення $f_a \colon X \to X$ є гомеоморфізмом для всіх вище перелічених просторів, крім стрілки Зорґенфрея.

Приклад 3.3.23. Наведіть приклад двох різних порівняльних топологій τ_1 і τ_2 на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ таких, що топологічні простори $(\mathbb{R}, \tau_1)$ і $(\mathbb{R}, \tau_2)$ гомеоморфні.

Розв'язок. Зафіксуємо довільне дійсне число r. Топологію τ_r на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначимо так. Сім'я $\{\mathscr{B}_r(x) \mid x, r \in \mathbb{R}\}$, де

$$\mathscr{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{якщо } x \leqslant r; \\ \{U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, & \text{якщо } x > r, \end{cases}$$

очевидно, задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}2)$ і $(\mathscr{BP}4)$, а отже породжує топологію τ_r на $\mathbb{R}$.

Очевидно, що топологія τ_{r_1} — власна підсім'я топології τ_{r_2} для довільних дійсних чисел $r_1 < r_2$. Також відображення $f \colon (\mathbb{R}, \tau_{r_1}) \to (\mathbb{R}, \tau_{r_2})$, означене за формулою $f(x) = x - r_1 + r_2$ є гомеоморфізмом.

Вправа 3.3.8. Доведіть, що топології

$$\tau_{(m)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(mi, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$
$$\tau_{(n)} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(ni, +\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}\},$$

на $\mathbb{R}$, де m і n — довільні різні натуральні числа, також задовольняють умову з прикладу 3.3.23.

Вправа 3.3.9. Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервні відображення[10]. Доведіть, що такі функції

$$|f|(x) = |f(x)|;$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$
$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\};$$
$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

є неперервними. Якщо крім того функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ не перетворюється в нуль в жодній точці топологічного простору X, то функція $1/f$, де $(1/f)(x) = 1/f(x)$, неперервна.

Доведіть, що аналогічні твердження виконуються для неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{I}$ та $g\colon X \to \mathbb{I}$ за виконання відповідних обмежень[11].

Приклад 3.3.24. Нехай (X, τ) — топологічний простір, означений у прикладі 3.2.30: X — довільна нескінченна множина, x_0 — фіксована точка множини X і τ — сім'я, яка складається з усіх підмножини множини X, які не містять точки x_0, а також з усіх підмножин множини X, які мають скінченне доповнення. Ми доведемо, що для довільної неперервної функції $f\colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ існує зліченна множина $X_0 \subset X$ така, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X \setminus X_0$.

Множина

$$X_i = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/i, f(x_0) + 1/i)\right)$$

є замкненою в просторі (X, τ) і не містить точки x_0, а отже X_i є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Означення 3.3.25. Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік образу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

---

[10] Надалі, якщо нічого не зазначено, то через $\mathbb{R}$ будемо позначати топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ (див. приклад 3.2.7).

[11] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0,1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ (див. приклад 3.2.8).

Використовуючи вище наведену термінологію, можна переформулювати наслідок 3.3.10 так: властивість "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантом неперервних відображень. Аналогічно можна переформулювати теорему 3.3.19, сказавши, що "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" і "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" є інваріантами неперервних відкритих відображень.

Означення 3.3.26. Нехай $\mathcal{M}$ — клас неперервних відображень, а $\mathcal{P}$ — деяка властивість топологічних просторів. Будемо говорити, що $\mathcal{P}$ *є оберненим інваріантом класу* $\mathcal{M}$ або властивість $\mathcal{P}$ зберігається в бік прообразу *при відображеннях з класу* $\mathcal{M}$, якщо властивість $\mathcal{P}$ зберігається відображеннями з класу $\mathcal{M}$, тобто якщо для кожного відображення $f \in \mathcal{M}$, де $f\colon X \to Y$ і $f(X) = Y$, простір X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, за умови, що простір Y задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Зауважимо, що властивість $\mathcal{P}$ є оберненим інваріантом класу $\mathcal{M}$ тоді і лише тоді, коли властивість не-$\mathcal{P}$ (тобто заперечення властивості $\mathcal{P}$) є інваріантом класу $\mathcal{M}$. Отож, поняття оберненого інваріанта зводиться до поняття інваріанта. Воно введено для спрощення багатьох тверджень. Очевидно, якщо $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то кожен інваріант (обернений інваріант класу) $\mathcal{M}_2$ є інваріантом (оберненим інваріантом) класу $\mathcal{M}_1$.

Інваріанти гомеоморфізмів є особливо важливими. Вони називаються *топологічними властивостями*. Оскільки обернене відображення до гомеоморфізму є знову гомеоморфізмом, то поняття інваріанта й оберненого інваріанта в класі гомеоморфізмів збігаються. Отож, топологічний простір X має властивість $\mathcal{P}$ тоді і лише тоді, коли таку ж властивість має довільний йому гомеоморфний простір. Оскільки гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками й відкритими множинами обох топологічних просторів, то кожна властивість, означена в термінах відкритих множин і в термінах теорії множин, є топологічною властивістю.

Предмет топології — вивчення топологічних властивостей. Коли ми розглядаємо окремий простір X, ми робимо спробу визначити, якими топологічними властивостями цей прості володіє. При побудові якої-небудь загальної теорії теорії зазвичай вичається деяка конкретна топологічна властивість $\mathcal{P}$ та її взаємозв'язки з іншими топологічними властивостями. Ми робимо спробу визначити, які операції над топологічними просторами не змінюють властивість $\mathcal{P}$ і які класи відображень, стосовно яких властивість $\mathcal{P}$ інваріантна. Отож, з топологічної точки зору два гомеоморфні простори можна розглядати як один об'єкт.

Ми вже визначили декілька топологічних властивостей. Найбільш важливими серед них є такі: "вага $\leqslant \mathfrak{m}$", "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і "щільність $\leqslant \mathfrak{m}$".

Довільна властивість $\mathcal{P}$ визначає клас усіх топологічних просторів, які задовольняють цю властивість. Якщо $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, то визначений нею клас топологічно інваріантний, тобто разом з деяким простором X, який задовольняє властивість $\mathcal{P}$, він містить всі топологічні простори, гомеоморфні простору X. Топологічні властивості, перелічені в кінці попереднього абзаца, визначають (для $\mathfrak{m} = \aleph_0$) відповідно клас просторів з дугою аксіомою зліченності, з першою аксіомою зліченності та сепарабельних. Усі ці класи топологічно інваріантні. В подальшому ми визначимо значну кількість топологічних властивостей, тобто топологічно інваріантних класів топологічних просторів. Вводячи новий клас топологічних просторів, ми зазвичай не будемо зупинятися на його топологічній інваріантності. Це випливає, однак, із самого означення, у якому беруть участь лише теоретико-множинні поняття та поняття, які зводяться до поняття відкритої множини. Ми не будемо розглядати класти топологічних просторів, які не є топологічно інваріантними. Подібно ми будемо розглядати лише класи топологічно інваріантних відображень, тобто таких відображень, композиція яких з гомеоморфізмами (з обох боків) є знову в цьому класі відображень.

Приклад 3.3.27. Нехай X і Y — дві множини однакової потужності. Розглянемо на обидвох множинах дискретну топологію. Очевидно, що кожне взаємно однозначне відображення множини X на Y є гомеоморфізмом. З іншого боку, якщо дискретні топологічні простори X і Y мають різну потужність, то вони не можуть бути гомеоморфними. Таким чином, дискретний простір не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від природи точок множини X, а залежить лише від потужності множини X. Далі дискретний простір потужності $\mathfrak{m}$ будемо позначати через $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$.

Аналогічна властивість виконується для нескінченних множин X і Y з топологією, означеною в прикладі 3.2.30. Однак в цьому випадку, коли обидві множини X і Y мають однакову потужність, для того щоб отримати гомеоморфізм, необхідно взяти такі взаємно однозначні відображення X на Y, які переводять точку x_0 е y_0 — точку накопичення простору Y, Топологічний простір, отриманий як і в прикладі 3.2.30, з множини потужності $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, будемо позначати через $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Означення 3.3.28. Нехай X — топологічний простір і $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність функцій з простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$. Будемо говорити, що *послідовність* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *рівномірно збігається* до дійсно визначеної функції f, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k, що $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ для довільних $x \in X$ і $i \geqslant k$, і це ми записуватимемо так $f = \lim\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$.

Теорема 3.3.29. *Якщо послідовність $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій з топологічного простору X у $\mathbb{R}$ або $\mathbb{I}$ рівномірно збігається до функції f, то f — неперервна функція з X у $\mathbb{R}$. Якщо всі f_i — функції з X в $\mathbb{I}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція.*

Доведення. Доведемо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in U_{x_0}$.

Виберемо так ціле число k, що

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in X \qquad \text{і} \qquad i \geqslant k. \tag{3.3}$$

Оскільки функція f_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$, то існує такий відкритий окіл U_{x_0} точки x_0 в топологічному просторі X, що

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всіх} \qquad x \in U_{x_0}. \tag{3.4}$$

Окіл U_{x_0} точки x_0 має необхідні нам властивості. Справді, з умов (3.3) і (3.4) випливає, що для довільної точки $x \in U_{x_0}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= |f(x_0) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} =$$
$$= \varepsilon.$$

Очевидно, якщо $f_i(X) \subseteq \mathbb{I}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, то $f\colon X \to \mathbb{I}$ — неперервна функція. $\square$

Опишемо тепер метод введення топологій за допомогою неперервних відображень.

Твердження 3.3.30. *Нехай дано множину X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де $f_i\colon X \to Y_i$ для довільного $i \in \mathcal{J}$. Тоді в класі всіх топологій на множині X, стосовно яких усі відображення $f_i\colon X \to Y_i$ неперервні, існує найслабша топологія $\tau_{\{f_i\}}$. Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ породжена базою, яка складається з усіх множин вигляду*

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j),$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathcal{J}$ і U_j — довільна відкрита підмножина топологічного простору Y_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доведення. Сім'я $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$, яка складається з усіх підмножин множини X вигляду $\bigcap\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}^{-1}(V_j)$, задовольняє умови ($\mathscr{B}$1) і ($\mathscr{B}$2), і за теоремою 3.3.4 всі відображення $f_i\colon X \to Y_i$ є неперервними стосовно топології $\tau_{\{f_i\}}$ породженої базою $\mathscr{B}_{\{f_i\}}$.

З іншого боку, з теореми 3.3.4 випливає, якщо всі відображення $f_i\colon X \to Y_i$ є неперервними стосовно топології τ на множині Xб то $\mathscr{B}_{\{f_i\}} \subseteq \tau$. Звідси випливає включення $\tau \subseteq \tau_{\{f_i\}}$, а це означає, що топологія $\tau_{\{f_i\}}$ слабша за топологію τ. $\square$

Топологія $\tau_{\{f_i\}}$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$.

Твердження 3.3.31. *Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y, топологія якого породжена сім'єю відображень $\{f_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, де f_i — відображення множини Y в топологічний простір Y_i, неперервне тоді і тільки тоді, коли композиція $f_i f$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$.*

Доведення. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ — неперервне, то композиція $f_i f$ неперервна як композиція двох неперервних відображень.

Нехай композиція $f_i f\colon X \to Y_i$ неперервна для кожного $i \in \mathcal{J}$. Позначимо через $\mathscr{P}$ передбазу топологічного простору Y, яка складається з усіх множин вигляду $f_i^{-1}(V_i)$, де V_i — відкрита множина в топологічному просторі Y_i. За теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази елементів передбази $\mathscr{P}$ при відображенні f є відкритими підмножинами в топологічному просторі X. Насправді, це випливає з рівності

$$f^{-1} f_i^{-1}(V_i) = (f_i f)^{-1}(V_i),$$

що і завершує наше доведення. $\square$

Означення 3.3.32. Неперервне бієктивне відображення топологічних просторів називається *ущільненням*.

Очевидно, що кожен гомеоморфізм топологічних просторів є ущільненням. Також, для довільного топологічного простору (X,τ) тотожні відображення

$$\mathrm{id}_X\colon (X,\tau)\to(X,\tau_{\mathrm{ad}}) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{id}_X\colon (X,\tau_{\mathfrak{d}})\to(X,\tau),$$

де τ_{ad} і $\tau_{\mathfrak{d}}$ — антидискретна та дискретна топології на множині X, відповідно, є ущільненнями.

Приклад 3.3.33. Наведіть приклад двох негомеоморфних топологічних просторів X і Y таких, що існують ущільнення $f\colon X\to Y$ і $g\colon Y\to X$.

Розв'язок. Нехай τ_1 і τ_2 — топології на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжені передбазами

$$\mathscr{B}_1=\{\{\{x\}\mid x<0\},\{[0,1]\},\{\{x\}\mid x>1\}\}$$

і

$$\mathscr{B}_2=\{\{\{x\}\mid x<0\},\{[0,1]\},\{\{x\}\mid 1<x<2\},\{[2,3]\},\{\{x\}\mid x>3\}\},$$

відповідно. Очевидно, що сім'ї $\mathscr{B}_1$ і $\mathscr{B}_2$ задовольняють умови ($\mathscr{B}$1) і ($\mathscr{B}$2), а отже є базами топологій на $\mathbb{R}$.

Тотожне відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\tau_1)\to(\mathbb{R},\tau_2)$, $x\mapsto x$, є, очевидно, неперервним, оскільки $\tau_1\subset\tau_2$, а отже воно є ущільненням. Також відображення $g\colon(\mathbb{R},\tau_2)\to(\mathbb{R},\tau_1)$, означене за формулою $g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot x$ є ущільненням. Справді, для довільної точки $x\in(\mathbb{R},\tau_1)$ такої, що $x<0$ або $x>1$ маємо $g^{-1}(\{x\})=\{3x\}\in\tau_2$ і $g^{-1}([0,1])=[0,3]\in\tau_2$, та врахувавши лінійність відображення g, отримуємо, що g є ущільненням.

Ми стверджуємо, що простори $X=(\mathbb{R},\tau_1)$ і $Y=(\mathbb{R},\tau_2)$ не є гомеоморфними. Справді, за теоремою 3.3.21 гомеоморфізм відображає ізольовані точки у ізольовані точки, а неодноточкові відкриті множини у неодноточкові відкриті множини. Однак топологічний простір X містить одну відкриту неодноточкову множину $[0,1]$, яка не містить власних непорожніх відкритих підмножин, а топологічний простір Y містить такі дві диз'юнктні підмножини $[0,1]$ і $[2,3]$.

3.4 Аксіоми відокремлення

Означення топологічного простору є дуже загальним поняттям, тому неможливо довести багато цікавих теорем про всі топологічні простори відразу. Природно вивчати різні класи топологічних просторів: від достатньо загальних до більш спеціальних. Очевидно, що чим вужчий клас просторів, тим більше теорем можна довести про цей клас.

Обмеження, які ми накладаємо на топологічні простори, мають різноманітний характер. Ми вже обговорювали аксіоми зліченності, які обмежують потужності баз. У цьому підрозділі ми вивчимо аксіоми відокремлення, які стосуються відокремлення точок і замкнених множин в топологічних просторах.

Означення 3.4.1. Топологічний простір X називається *T_0-простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1,x_2\in X$ існує відкрита множина в X, яка містить лише одну з цих точок.

Найпростішим прикладом T_0-простору є неодноточковий антидискретний простір. У прикладі 3.4.2 описано неантидискретний простір, яки не є T_0-простором.

Приклад 3.4.2. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau)$ не є T_0-простором, оскільки для довільних двох раціональних (ірраціональних) точок не існує відкритої множини в $(\mathbb{R}, \tau)$, що містить лише одну з цих точок.

Очевидно, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є T_0-просторами. Також кожна нескінченна множина з коскінченною топологією (див. приклад 3.1.12) і кожна незліченна множина з козліченною топологією (див. приклад 3.1.13) є прикладами T_0-просторів.

Наведемо приклад топологічного простору X, топологія якого є нескінченною сім'єю, і X не є T_0-простором.

Приклад 3.4.3. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Z}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$ не є T_0-простором (див. рис. 3.12), оскіль-

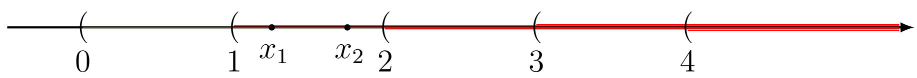


Рис. 3.12: До прикладу 3.4.3

ки для довільного цілого числа z_0 і для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $z_0 \leqslant x_1 < x_2 < z_0 + 1$, не існує відкритої множини в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Z}})$, що містить лише одну з цих точок.

Надалі для довільного кардинала α через $\exp \alpha$ будемо позначати потужність множини $\mathscr{P}(A)$, де $|A| = \alpha$.

Теорема 3.4.4. *Нехай X — T_0-простір. Тоді $|X| \leqslant \exp w(X)$.*

Доведення. Нехай $\mathscr{B}$ — така база топологічного простору X, що $|\mathscr{B}| = w(X)$, і для кожної точки $x \in X$ нехай $\mathscr{B}(x) = \{U \in \mathscr{B} \mid x \in U\}$. З означення T_0-простору випливає, що $\mathscr{B}(x) \neq \mathscr{B}(y)$ для довільних різних точок $x, y \in X$ $x \neq y$. Оскільки потужність усіх різних сімей $\mathscr{B}$ не перевищує кардинала $\exp |\mathscr{B}|$, то $|X| \leqslant \exp w(X)$. □

Вправа 3.4.1. Наведіть приклад скінченного T_0-простору, який не є дискретним.

Означення 3.4.5. Топологічний простір X називається T_1-*простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита множина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.

Зауважимо, що з означення 3.4.5 випливає, що в T_1-просторі існує також відкрита множина V в X така, що $x_2 \in V$ і $x_1 \notin V$: для цього достатньо розглянути пару точок $x_2, x_1 \in X$. У цьому й полягає різниця між T_1-простором і T_0-простором, в останньому для довільної пари різних точок x_1, x_2 може існувати або ж лише така відкрита множина U, що $x_1 \in U$ й $x_2 \notin U$, або ж така відкрита множина V, що $x_2 \in V$ й $x_1 \notin V$.

Очевидно, що кожен топологічний T_1-простір є T_0-простором. Приклад T_0-простору, який не є T_1-простором наведено в прикладі 3.4.6.

Приклад 3.4.6. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ означимо топологію

$$\tau_{l\mathbb{Q}} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{(z, +\infty) \mid z \in \mathbb{Q}\}\}.$$

Очевидно, що топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ є T_0-простором (див. рис. 3.13), оскільки

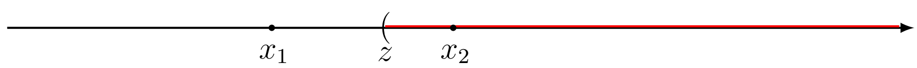


Рис. 3.13: До прикладу 3.4.6

для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, існує раціональне число z таке, що $x_1 \leqslant z < x_2$. Тоді маємо, що $x_2 \in (z, +\infty)$ і $x_1 \notin (z, +\infty)$. Однак для довільних двох різних дійсних точок x_1 і x_2 таких, що $x_1 < x_2$, кожна відкрита множина в топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$, яка містить точку x_1, також містить точку x_2. Отож, топологічний простір $(\mathbb{R}, \tau_{l\mathbb{Q}})$ не є T_1-простором

Наступне твердження дає інші характеристики T_1-простору в термінах відкритих околів точки та замкнених підмножин.

Твердження 3.4.7. *Для топологічного простору X такі умови є еквівалентними:*

(i) *X — T_1-простір;*
(ii) *кожна точка $x \in X$ є перетином усіх своїх відкритих околів в X;*
(iii) *для кожної точки $x \in X$ множина $\{x\}$ замкнена в X.*

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_y(x)$ позначимо довільний відкритий окіл точки x у топологічному просторі X, який не містить точку y. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає рівність

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x).$$

Навпаки, припустимо, що для довільної точки $x \in X$ виконується рівність

$$\{x\} = \bigcap \{U(x) \mid U(x) - \text{відкритий окіл точки } \ x \in X\}.$$

Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі X, що $U(x) \not\ni y$, а отже топологічний простір X є T_1-простором.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Для довільних різних точок $x, y \in X$ через $U_x(y)$ позначимо довільний відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, який не містить точку x. Тоді з того, що X є T_1-простором випливає, що

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_x(y)$$

замкнена підмножина в X, оскільки в топологічному просторі об'єднання відкритих множини є відкритою множиною. Навпаки, для довільних різних точок $x, y \in X$ множини $U(x) = X \setminus \{y\}$ і $U(y) = X \setminus \{x\}$ є відкритими околами точок x і y у топологічному просторі X, відповідно, що задовольняють умови означення 3.4.5, оскільки $\{y\}$ і $\{x\}$ — замкнені підмножини в просторі X. □

Вправа 3.4.2. Доведіть, що кожен скінченний топологічний T_1-простір є дискретним.

Вправа 3.4.3. Доведіть, що сім'ї підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, означені в прикладах 3.4.2, 3.4.3 і 3.4.6 є топологіями на $\mathbb{R}$.

Означення 3.4.8. Топологічний простір X називається T_2-*простором* або *гаусдорфовим простором*, якщо для довільної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті множини U_1 та U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Очевидно, що кожен T_2-простір є T_1-простором, та кожен дискретний простір $(X, \tau_\mathfrak{d})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_\mathrm{u})$ є T_2-просторами.

Наведемо приклад топологічного T_1-простору, яки не є гаусдорфовим.

Приклад 3.4.9. Кожна нескінченна множина з коскінченною топологією (див. приклад 3.1.12) і кожна незліченна множина з козліченною топологією (див. приклад 3.1.13) за твердженням 3.4.7 є T_1-просторами. Однак у нескінченній множині довільні дві коскінченні множини перетинаються, а також у незліченній множині довільні дві козлінченні множини перетинаються, а отже наведені вище два топологічні простори не є гаусдорфовими.

Наступне твердження дає інше описання T_2-простору в термінах відкритих околів точки.

Твердження 3.4.10. *Топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо X — гаусдорфовий топологічний простір, то для довільних різних точок $x, y \in X$ існують їх відкриті околи $U_y(x)$ і $V(y)$ в X такі, що $U_y(x) \cap V(y) = \varnothing$. З наслідку 3.2.16 випливає, що $\overline{U_y(x)} \cap V(y) = \varnothing$, а отже $\overline{U_y(x)} \subseteq X \setminus V(y)$. Тоді

$$\bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus V(y) = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V(y) = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\},$$

і оскільки $x \in \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} U_y(x) \subseteq \bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)}$, то $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y(x)} = \{x\}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що кожна точка $x \in X$ є перетином замикань усіх своїх відкритих околів у топологічному просторі X. Тоді для довільної точки $y \in X \setminus \{x\}$ існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі X, що $\overline{U(x)} \not\ni y$. Очевидно, що $U(y) = X \setminus \overline{U(x)}$ — відкритий окіл точки y в топологічному просторі X, і крім того $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. $\square$

Твердження 3.4.11. *Нехай дано множину X і сукупність сімей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ її підмножин, які задовольняють властивості ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$) і ($\mathscr{BP}3$). Крім того, нехай для $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ виконуються властивість:*

($\mathscr{BP}4$) *для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують відкриті множини $U \in \mathscr{B}(x)$ і $V \in \mathscr{B}(y)$ такі, що $U \cap V = \varnothing$.*

Тоді множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим простором.

Вправа 3.4.4. Доведіть твердження 3.4.11.

Далі ми будемо користуватися такою теоремою.

Теорема 3.4.12. *Нехай $f\colon X \to Y$ і $g\colon X \to Y$ — неперервні відображення з топологічного простору X у гаусдорфовий топологічний простір Y. Тоді множина*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

замкнена в просторі X.

Доведення. Ми стверджуємо, що множина

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

є відкритою в топологічному просторі X. Справді, для довільної точки $x \in A$ маємо, що $f(x) \neq g(x)$, а отже в гаусдорфому просторі Y існують диз'юнктні відкриті околи $U(f(x))$ і $U(g(x))$ точок $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. За теоремою 3.3.4 множина

$$V(x) = f^{-1}(U(f(x))) \cap g^{-1}(U(g(x)))$$

є відкритим околом точки x у топологічному просторі X. $\square$

Означення 3.4.13. Топологічний простір X називається *T_3-простором* або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої множини F у просторі X, яка не містить точки x, існують відкриті множини U_1 і U_2 у просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Зауваження 3.4.14. Необхідно попередити читачів, деякі автори не включають в означення регулярних, цілком регулярних і нормальних топологічних просторів умову, що X є T_1-простором. Ми ж будемо дотримуватися наших означень таких просторів. Ми будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_i-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_i-аксіома відокремлення*, якщо X є T_i-простором де $i = 0, 1, 2$. Також будемо говорити, що топологічний простір X *задовольняє T_3-аксіому відокремлення* або *для простору X виконується T_3-аксіома відокремлення*, якщо для X виконується друга умова означення 3.4.13. Аналогічно ми будемо говорити також і для T_i-аксіом у випадку $i = 3\frac{1}{2}, 4$ (див. означення 3.4.18 і 3.4.21).

Твердження 3.4.15. *Топологічний T_1-простір X є регулярним тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і для довільного її околу $V(x)$ з деякої фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує окіл $U(x)$ точки x такий, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$.*

Доведення. Нехай X — регулярний топологічний простір і $\mathscr{P}$ — передбаза топологічного простору X. Виберемо деяку точку $x \in X$ та її окіл $V(x) \in \mathscr{P}$. За означення регулярного простору існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі X такі, що

$$x \in U_1, \qquad X \setminus V(x) \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Тоді

$$U(x) = U_1 \subseteq X \setminus U_2 \subseteq V(x),$$

звідки випливає, що $\overline{U(x)} \subseteq V(x)$, оскільки множина $X \setminus U_2$ замкнена в топологічному просторі X.

Припустимо, що виконується умова теореми для топологічного простору X. Виберемо довільну точку $x \in X$ і довільну замкнену множину F в просторі X так, щоб $x \notin F$. За означенням передбази існують $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ виберемо окіл $W_i(x)$ точки x у топологічному просторі X так, щоб $\overline{W_i(x)} \subseteq V_i$. Відкриті множини

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i(x) \qquad \text{і} \qquad U_2 = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)}$$

не перетинаються, $x \in U_1$ і

$$F \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{W_i(x)} = U_2.$$

Отже, топологічний простір X є регулярним. □

З твердження 3.4.15 випливає, що кожен дискретний простір $(X, \tau_{\mathfrak{d}})$, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{u}})$ є регулярними просторами. Однак, атидискретний простір задовольняє умови твердження 3.4.15, але не є T_1-простором.

Наведемо тепер приклад нерегулярного гаусдорфового простору.

Приклад 3.4.16. Нехай Z — множина обернених для всіх цілих чисел відмінних від нуля, тобто $Z = \left\{ \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$. Для кожного дійсного числа x приймемо $U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i} \right)$ і

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ \{U_i(x) \setminus Z\}_{i=1}^{\infty}, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ з топологією, породженою системою околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ є гаусдорфовим топологічним простором. Множина Z замкнена в цьому топологічному просторі $\mathbb{R}$ і $0 \notin Z$. Крім того, для довільних відкритих множин U_1 і U_2 таких, що $0 \in U_1$ і $Z \subseteq U_2$ маємо $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Отож, топологічний простір $\mathbb{R}$ не є регулярним.

Вправа 3.4.5. Доведіть, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ з прикладу 3.4.16 задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$.

Вправа 3.4.6. Доведіть, що топологічний простір $\mathbb{R}$, визначений у прикладі 3.4.16 не є регулярним, використавши твердження 3.4.15.

Теорема 3.4.17. *Якщо X — регулярний топологічний простір, то*

$$w(X) \leqslant \exp d(X).$$

Доведення. Нехай $\{U_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ — сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X. Оскільки простір X регулярний, то сім'я $\left\{\operatorname{Int}\overline{U_j}\right\}_{j\in\mathscr{J}}$ є базою в X. Виберемо щільну множину A в просторі X таку, що $|A| = d(X)$, і нехай $V_j = A \cap U_j$ для довільного індекса $j \in \mathscr{J}$. Для доведення теореми достатньо зауважити, що за теоремою 3.2.19 виконується твердження:

з $V_i = V_j$ випливає, що $\overline{V_i} = \overline{V_j}$ для $i, j \in \mathscr{J}$.

бо з цього твердження випливає, що потужність всіх різних множин $\operatorname{Int}\overline{U_j}$ не перевищує кардинала $\exp|A|$. □

Ще більш вузький клас просторів представляють собою тихоновські простори.

Означення 3.4.18. Топологічний простір X називається $T_{3\frac{1}{2}}$*-простором*, або *тихоновським простором*, або *цілком регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і для довільної замкненої множини F, що не містить точки x, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$[12] така, що

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F.$$

Оскільки для відкритих множини $U_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ і $U_2 = f^{-1}((1/2, 1])$ виконуються співвідношення

$$x \in U_1, \qquad F \subseteq U_2 \qquad \text{і} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing,$$

то кожен цілком регулярний простір є регулярним.

В означенні $T_{3\frac{1}{2}}$-простору, крім теоретико-множинних понять і понять, які зводяться до до поняття відкритої множини, використаних для означення T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$, використано поняття неперервної дійснозначної функції. Отже, топологічна інваріантність класу $T_{3\frac{1}{2}}$-просторів потребує доведення, тоді як для T_i-просторів з $i = 0, 1, 2, 3$ ця топологічна інваріантність є безпосереднім наслідком способу їх означення. Однак для доведення достатньо зауважити, що композиція fg гомеоморфізма h і неперервної функції f в одиничний відрізок $\mathbb{I}$ є неперервною функцією.

[12] Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ ми позначаємо замкнений одиничний інтервал $[0, 1]$ дійсних чисел із звичайною топологією $\tau_{\mathfrak{u}}$ (див. приклад 3.2.8).

Твердження 3.4.19. *Топологічний T_1-простір X є тихоновським простором тоді і лише тоді, коли для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу V з фіксованої передбази $\mathscr{P}$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що*

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V.$$

Доведення. Необхідність твердження випливає з того факту, що множина $X \setminus V$ замкнена та не містить точки x.

Для доведення достатності виберемо точку $x \in X$ і замкнену множину $F \not\ni x$. За означенням передбази існують $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{P}$, які задовольняють умову

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus F.$$

Виберемо функції $f_i\colon X \to \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, k$, наступним чином

$$f_i(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f_i(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in X \setminus V_i.$$

Легко бачити, що фукнція $f = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ є неперервною (див. вправу 3.3.9), і для неї виконуються рівності

$$f(x) = 0 \qquad \text{і} \qquad f(y) = 1 \quad \text{для} \quad y \in F,$$

що і завершує доведення твердження. □

Очевидно, що кожен дискретний топологічний простір, пряма з топологією стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$, а також пряма зі звичайною топологією $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{u}})$ є тихоновськими просторами.

Далі ми наведемо приклад регулярного топологічного простору, який не є цілком регулярним.

Приклад 3.4.20. Нехай M_0 — верхня замкнена півплощина дійсної площини $\mathbb{R}^2$, тобто

$$M_0 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\big\}$$

(див. рис. 3.14). Нехай z_0 — точка з координатами $(0, -1)$ в $\mathbb{R}^2$ і $M = M_0 \cup \{z_0\}$. Позначимо через L пряму $y = 0$ і через L_i, $1, 2, 3, \ldots$, відрізок, який складається з усіх точок $(x, 0) \in L$ таких, що $i - 1 \leqslant x \leqslant i$. Для кожної точки $z = (x, 0) \in L$ позначимо через $A_1(z)$ множину всіх точок $(x, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$ і через $A_2(z)$ множину всіх точок $(x + y, y) \in M_0$, де $0 \leqslant y \leqslant 2$. Нехай

$$\mathscr{B}(z) = \{U_B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B \mid z \notin B \subset M,\ |B| < \infty\}.$$

Будемо вважати, що кожна точка $z \in M_0 \setminus L$ є ізольованою, тобто $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$. Нехай $\mathscr{B}(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, де

$$U_i(z_0) = \{(x, y) \in M_0 \mid x \geqslant i\}.$$

Легко перевіряється, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ та $(\mathscr{BP}4)$. Отже множина M з топологією, породженою системою відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in M}$ є гаусдорфовим топологічним простором.

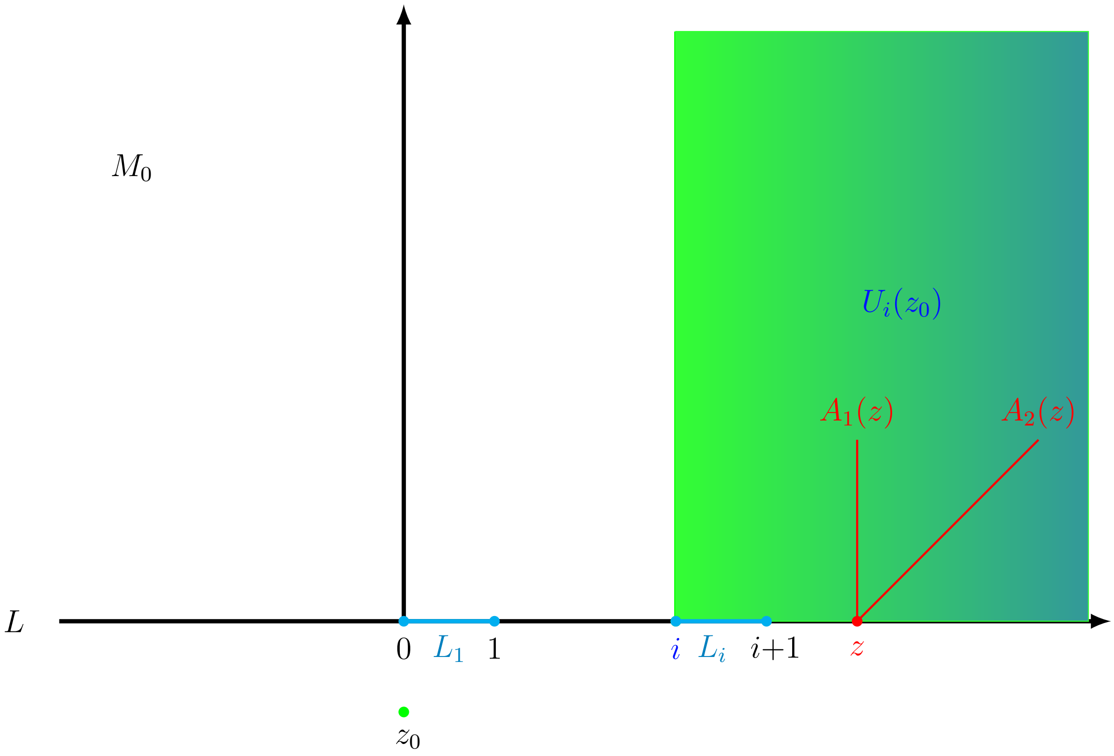


Рис. 3.14: До прикладу 3.4.20. Приклад регулярного нетихоновського простору

Далі доведемо, що простір M регулярний. Спочатку зауважимо, що для кожної точки $z \in M_0$ сім'я $\mathscr{B}(z)$ складається з відкрито-замкнених підмножин простору M. Таким чином, для встановлення регулярності топологічного простору M, достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subset M$ такої, що $z_0 \notin F$ існують відкриті множини U_1 і U_2 в просторі M такі, що $z_0 \notin U_1$, $F \subseteq U_2$ і $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Легко перевіряється, що множини

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0) \qquad \text{і} \qquad U_2 = M \setminus \left(U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}\right),$$

де $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, мають необхідні властивості.

Тепер ми розглянемо неперервну функцію $f\colon M \to \mathbb{I}$ таку, що $f(L_1) = \{0\}$. Для доведення того факту, що топологічний простір M не є цілком регулярним достатньо показати, що $f(z_0) = 0$. Остання рівність випливає безпосередньо з неперервності функції f і з того факту, що множина

$$K_i = \{z \in L_i \mid f(z) = 0\}$$

є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і це ми збираємося довести за індукцією. Очевидно, що множина $K_1 = L_1$ є нескінченною. Припустимо тепер, що $|K_n| \geqslant \aleph_0$ і розглянемо зліченну нескінченну множину $K'_n \subseteq K_n$. Аналогічно, як і в прикладі 3.3.24 покажемо, що для довільної точки $z \in K'_n$ існує нескінченна зліченна множина $A_0(z) \subset A_2(z)$ така, що

$$f\left(A_2(z) \setminus A_0(z)\right) = \{0\}.$$

Множина

$$A_j(z) = X \setminus f^{-1}\left((f(x_0) - 1/j, f(x_0) + 1/j)\right)$$

є замкненою в просторі $A_2(z)$ і не містить точки z, а отже $A_j(z)$ є скінченною множиною. Легко перевіряється, що множина

$$A_0(z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j(z)$$

задовольняє потрібну нам властивість.

Проекція множини

$$A = \bigcup \{A_0(z) \mid z \in K'_n\}$$

на множину L є зліченною множиною. Тепер для довільної точки $t \in L_{n+1} \setminus A$ множина $A_1(t)$ перетинає кожну з множин $A_2(z) \setminus A_0(z)$ із $z \in K'_n$, а отже за неперервністю функції f маємо, що $f(t) = 0$. Звідси впливає, що $L_{n+1} \setminus A \subset K_{n+1}$, а отже $|K_{n+1}| \geqslant \aleph_0$. Таким чином, множина K_i є нескінченною для $i = 1, 2, 3, \ldots$, і доведення завершено.

Означення 3.4.21. Топологічний простір X називається T_4-*простором*, або *нормальним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної пари диз'юнктних замкнених підмножин $A, B \subset X$ існують відкриті множини $U, V \subset X$ такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Зауважимо, що T_1-простір є нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільної замкненої множини $F \subset X$ і довільної відкритої множини $V \subseteq X$, що містить F, існує відкрита множина $U \subseteq X$ така, що

$$F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V.$$

Очевидно, кожен T_4-простір є T_3-простором. Також з леми Урисона (див. теорему 3.4.24) випливає, що кожен T_4-простір є $T_{3\frac{1}{2}}$-простором, але цей факт не є таким вже й очевидним. Усі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ (див. приклад 3.3.27) є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Вправа 3.4.7. Доведіть, що всі дискретні простори $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ та простори $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є нормальними для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

Приклад 3.4.22. Стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ (див. приклад 3.2.5) є нормальним простором.

Розв'язок. Справді, нехай A і B — диз'юнктні замкнені підмножини в просторі $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$. Для кожної точки $a \in A$ виберемо напівінтервал $[a, x(a))$, який не перетинає множину B, і для кожної точки $b \in B$ виберемо напівінтервал $[b, x(b))$, який не перетинає множину A. Прийнявши

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \qquad \text{і} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)),$$

ми означимо відкриті множини такі, що $A \subseteq U$ та $B \subseteq V$. Для довільних точок $a \in A$ та $b \in B$ маємо

$$[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \varnothing,$$

оскільки в протилежному випадку ми б мали або $b \in [a, x(a))$, або $a \in [b, x(b))$ в залежності від того чи $a < b$, чи $b > a$. Отож, отримуємо, що $U \cap V = \varnothing$.

Тепер ми наведемо приклад тихоновського простору, який не є нормальним. Таким топологічним простором є площина Немицького (див. приклад 3.2.28).

Твердження 3.4.23. *Площина Немицького L не є нормальним простором.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що похідна множина підмножини $L_0 \subset L$ є порожньою. За теоремою 3.1.26 випливає, що $A^d = \varnothing$ для довільної підмножини $A \subset L_0$, і що кожна така множина A є замкненою в площині Немицького L. Розглянемо множину C, яка складається з усіх точок множини L_1 обидві координати яких раціональні. Очевидно, що C — щільна підмножина в топологічному просторі L (див. наслідок 3.2.17).

Припустимо, що площина Немицького L є нормальним простором. Тоді для кожної підмножини $A \subset L_0$ існують відкриті множини $U_A, V_A \subset L$ такі, що

$$A \subset U_A, \qquad L_0 \setminus A \subseteq V_A \qquad \text{і} \qquad U_A \cap V_A = \varnothing.$$

Кожній множині $A \subset L_0$ поставимо у відповідність множину $C_A = C \cap U_A$. Ми доведемо, що $C_A \neq C_B$ для $A \neq B$, звідки отримаємо протиріччя, оскільки множина L_0 містить $2^{\mathfrak{c}}$ різних підмножин, а множина C містить лише $\mathfrak{c}$ різних підмножин. Візьмемо тоді підмножини $A, B \subset L_0$ такі, що $A \neq B$. За симетрією припущень ми можемо вважати, що $A \setminus B \neq \varnothing$. Оскільки $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, то маємо, що $U_A \cap V_B \neq \varnothing$. Звідси випливає, що завдяки щільності множини C у просторі L, тобто

$$\varnothing \neq C \cap U_A \cap V_B \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B,$$

а отже $C_A \neq C_B$. □

Висловлене вище зауваження про те, чому в означенні регулярності топологічного простору X вимагається, щоб він був T_1-простором, відноситься і до означення тихоновських і нормальних просторів. Це ілюструє антидискретний простір.

Теорема 3.4.24 є однією з фундаментальних у топології. З історичних причин вона називається *лемою Урисона.*

Теорема 3.4.24 (лема Урисона). *Для кожної пари A, B неперетинних замкнених множин нормального топологічного простору X існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що*

$$f(x) = 0 \quad \textit{для} \quad x \in A \qquad \textit{і} \qquad f(x) = 1 \quad \textit{для} \quad x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа $r \in [0, 1]$ визначимо відкриту множину V_r в топологічному просторі X, яка задовольняє такі умови:

$$\overline{V}_r \subseteq V_{r'}, \qquad \text{якщо} \qquad r < r'; \tag{3.5}$$

$$A \subseteq V_0, \qquad B \subseteq X \setminus V_1. \tag{3.6}$$

Множини V_r визначаються індуктивно. Розташуємо всі раціональні числа інтервала $(0, 1)$ в деяку нескінченну послідовність $r_3, r_4, \ldots$, і нехай $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Покладемо

$$V_0 = U \qquad \text{і} \qquad V_1 = X \setminus B,$$

де множина U разом з відкритою множиною V задовольняють умову (3.5). Очевидно, що

$$A \subseteq V_0 \subseteq X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subseteq V_1,$$

а отже $\overline{V}_0 \subseteq V_1$.

Умова (3.6), аналогічно як і умова

$$\overline{V}_{r_i} \subseteq V_{r_j}, \qquad \text{якщо} \qquad r_i < r_j \qquad \text{і} \qquad i, j \leqslant k, \tag{3.2_k}$$

виконується для $k = 2$.

Припустимо, що множини V_{r_j} вже визначені для $\leqslant n$ ($n \geqslant 2$) і виконується умова (3.2_n). Позначимо через r_l та r_m, відповідне те з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які найближчі до числа r_{n+1} зліва та справа. Оскільки $r_l < r_m$, то з умови (3.2_n) випливає, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq V_{r_m}.$$

З нормальності простору X випливає, що існують відкриті множини U, V в топологічному просторі X такі, що

$$\overline{V}_{r_l} \subseteq U, \qquad X \setminus V_{r_m} \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Звідси отримуємо включення

$$U \subseteq X \setminus V \subseteq V_{r_m},$$

а отже маємо

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_m}.$$

Означивши

$$V_{r_{n+1}} = U,$$

ми отримуємо множини

$$V_{r_1}, V_{r_1}, \ldots, V_{r_{n+1}},$$

які задовольняють умову (3.2_{n+1}). Отримана за допомогою такої конструкції послідовність множин

$$V_{r_1}, V_{r_1}, \ldots, V_{r_{n+1}}, \ldots$$

задовольняє умови (3.5) та (3.6).

Функцію $f\colon X \to \mathbb{I}$ означимо за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\left\{r \mid x \in V_r\right\}, & \text{якщо } x \in V_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

За умовою (3.6), маємо $f(A) \subseteq \{0\}$ і $f(B) \subseteq \{1\}$. Залишилося довести, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ неперервна. Для цього за теоремою 3.3.4 достатньо довести, що прообрази інтервалів $[0, a)$ і $(b, 1]$ стосовно функції f, де $a \leqslant 1$ і $b \geqslant 0$, — відкриті підмножини в топологічному просторі X.

Нерівність $f(x) < a$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r < a$, що $x \in V_r$. Отже, множина

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup \{V_r \mid r < a\}$$

відкрита в топологічному просторі X. Нерівність $f(x) > b$ виконується тоді і лише тільки тоді, коли існує таке раціональне число $r' > b$, що $x \notin V_{r'}$. Але тоді за умовою (3.5) це означає, що існує таке раціональне число $r > b$, що $x \notin \overline{V}_r$. Звідси випливає, що множина

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup \{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap \{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

також відкрита в топологічному просторі X. □

3.5 Операції на топологічних просторах

У цьому підрозділі вивчаються операції на топологічних просторах, тобто методи побудови нових топологічних просторів із заданих.

3.5.1 Підпростори. Індукована топологія

Припустимо, що дано деякий топологічний простір (X, τ_X) і підмножину $M \subset X$. Легко бачити, що сім'я τ_M всіх множин вигляду $M \cap U$, де $U \in \tau_X$ (див. рис. 3.15), задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$. Справді, умова $(\mathscr{O}1)$ виконується, оскільки

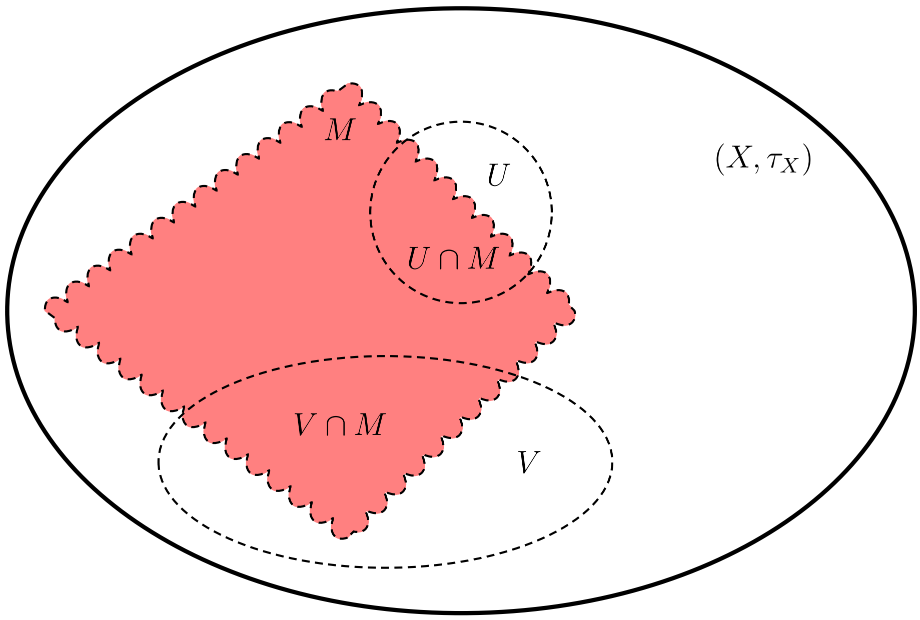


Рис. 3.15: Топологія підпростру

$\varnothing = M \cap \varnothing$ і $M = M \cap X$, а з рівностей

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2),$$
$$\bigcup_{i \in \mathscr{I}} (M \cap U_i) = M \cap \bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i$$

випливає, що також виконуються умови $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Взявши сім'ю

$$\tau_M = \{M \cap U \mid U \in \tau_X\}$$

в якості сім'ї відкритих підмножин у M, ми визначаємо на множині M топологію. Множина M з топологією τ_M називається *підпростором топологічного простору* (X, τ_X), а сама топологія τ_M називається *індукованою топологією* або *топологією підпростору*.

Твердження 3.5.1. *Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір. Множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі (M, τ_M) тоді і лише тоді, коли $A = M \cap F$, де F — замкнена підмножина в просторі (X, τ_X). Замикання $\mathrm{Cl}_M(A)$ множини $A \subseteq M$ в просторі (M, τ_M) і замикання $\mathrm{Cl}_X(A)$ множини $A \subseteq X$ в просторі (X, τ_X) пов'язані рівністю*

$$\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M.$$

Доведення. Якщо $A = M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F) \subseteq X$, то

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus F)$$

і множина A — замкнена в топологічному просторі (M, τ_M) як доповнення до відкритої множини. Навпаки, якщо A — замкнена підмножина в просторі (M, τ_M), то

$$M \setminus A = M \cap U,$$

де U — відкрита підмножина в топологічному просторі (X, τ_X). Отже,

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U)$$

і $A = M \cap F$, де $F = X \setminus U$ — замкнена множина в топологічному просторі (X, τ_X).

За означенням оператора замикання множина $\mathrm{Cl}_M(A)$ дорівнює перетину всіх замкнених підмножин топологічного простору (M, τ_M), які містять множину A, тобто всіх множин вигляду $M \cap F$, де $F = \mathrm{Cl}_X(F)$ і $A \subseteq F$. Звідси отримуємо рівність $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap M$. □

Якщо $L \subseteq M \subseteq X$, то очевидно, що для довільної підмножини $U \subseteq X$ справджується рівність $U \cap L = (U \cap M) \cap L$, а отже виконується таке твердження:

Твердження 3.5.2. *Нехай (X, τ_X) — топологічний простір і (M, τ_M) — його підпростір і $L \subseteq M$. Тоді дві топології, визначені на множині L — топологія підпростору простору (M, τ_M) і топологія підпростору простору (X, τ_X) збігаються.*

Підпростір M топологічного простору X називається його *замкненим підпростором*, якщо множина M замкнена в просторі X. Якщо M — замкнений підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ замкнена в просторі M тоді і тільки тоді, коли вона замкнена а просторі X, а, отже, $\mathrm{Cl}_M(A) = \mathrm{Cl}_X(A)$ для кожної підмножини $A \subseteq M$. Аналогічно вводяться поняття *відкритого* та *щільного підпростору*: підпростір M топологічного простору X називається його *відкритим підпростором*, чи *щільним підпростором*, якщо множина M відкрита, чи щільна, в просторі X, відповідно.

Вправа 3.5.1. Доведіть, якщо M — відкритий (щільний) підпростір топологічного простору X, то множина $A \subseteq M$ відкрита (щільна) в просторі M тоді і лише тоді, коли вона відкрита (щільна) в топологічному просторі X.

Надалі слова "підпростір" і "підмножина" будуть заміняти одне одного. Наприклад, ми будемо вживати "сепарабельна підмножина", "зв'язна підмножина" і т.д., розуміючи під такою підмножиною, на якому визначена топологія підпростору та є з цією топологією сепарабельним, зв'язним і т.д. підпростором.

Означення 3.5.3. Дано множину X та індексовану сім'ю $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ топологічних просторів з відображеннями

$$f_i\colon X \to Y_i.$$

Топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що кожне відображення

$$f_i\colon (X,\tau) \to Y_i$$

є неперервним, будемо називати *топологією, породженою сім'єю відображень* $\{f_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ (див. доведення твердження 3.3.30).

Зрозуміло, що топологія, породжена сім'єю відображень — це сім'я відкритих множин, породжених усіма множинами вигляду $f_i^{-1}(U)$, де U — відкрита множина в топологічному просторі Y_i для деякого індекса $i \in \mathfrak{I}$ при скінченних перетинах і довільних об'єднаннях (див. твердження 3.3.30).

У випадку, коли сім'я $\{Y_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ складається з одного топологічного простору Y з відображенням

$$f\colon X \to Y,$$

то топологію τ на X, яка є найслабшою топологією на X такою, що відображення

$$f\colon (X,\tau) \to Y$$

є неперервним, будемо називати *топологією, породженою відображенням* f.

Для довільного топологічного простору X і кожного його підпростору M формула $i_M(x) = x$ визначає відображення $i_M\colon M \to X$. Оскільки $i_M^{-1}(U) = M \cap U$, то відображення $i_M\colon M \to X$ є неперервним. Відображення $i_M\colon M \to X$ називається *вкладенням підпростору M у простір X*.

Вправа 3.5.2. Доведіть, що топологія підпростору збігається з топологією, породженою відображенням i_M множини M у топологічний простір X.

Вправа 3.5.3. Доведіть, що вкладення $i_M\colon M \to X$ замкненим (відкритим) відображенням тоді і лише тоді, коли X є замкненим (відкритим) підпростором у топологічному просторі X.

Для кожного відображення $f\colon X \to Y$ і кожного підпростору M топологічного простору X композиція $f\, i_M$ є неперервним відображенням простору M у простір Y. Це відображення називається *звуженням відображення f на $M \subset X$* і позначається через $f|M$. Оскільки композиція замкнених (відкритих) відображень топологічних просторів є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження замкненого (відкритого) відображення на замкнену (відкриту) множину $M \subset X$ є замкненим (відкритим) відображенням.

Твердження 3.5.4. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Якщо композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, то звуження $g|f(X)\colon f(X) \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням.*

Доведення. Кожна замкнена (відкрита) підмножина простору $f(X)$ має вигляд $A \cap f(X)$, де A — замкнена (відкрита) підмножина в просторі Y. Оскільки повний прообраз $f^{-1}(A)$ замкнена (відкрита) множина в топологічному просторі X і gf — замкнене (відкрите) відображення, то

$$[g|f(X)](A \cap f(X)) = g(A \cap f(X)) = gf(f^{-1}(A))$$

замкнена (відкрита) підмножина в топологічному просторі Z. □

Вправа 3.5.4. Наведіть приклад такий, що композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є замкненим (відкритим) відображенням, однак жодне з цих відображень не є замкненим (відкритим).

Одним з різновидів звужень відображень є *звуження відображення $f\colon X \to Y$ на $L \subset Y$*, яке визначається як відображення підпростору $f^{-1}(L) \subseteq X$ в простір $L \subset Y$, що ставить точку $f(x) \in L$ точці $x \in f^{-1}(L)$. Таке звуження позначається через f_L. Очевидно, якщо відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то відображення f_L також неперервне та $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$.

Твердження 3.5.5. *Нехай X і Y — топологічні простори. Якщо $f\colon X \to Y$ — замкнене (відкрите) відображення, то для кожного підпростору $L \subset Y$ звуження $f_L\colon f^{-1}(L) \to L$ є замкненим (відкритим) відображенням.*

Доведення. Для $A \subset X$ маємо

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

і наше твердження випливає з означення топології на підпросторах $f^{-1}(L)$ і L. □

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо воно є композицією гомеоморфізму і вкладення, тобто якщо існують підпростір L топологічного простору Y і гомеоморфізм $f'\colon X \to L$ такі, що $f = i_L f'$. Якщо для топологічного простору X існує гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ в топологічний простір Y, то ми будемо говорити, що простір X *вкладуваний* у Y.

З твердження 3.5.2 випливає, що композиція гомеоморфних вкладень і звуження гомеоморфних вкладень є гомеоморфними вкладеннями.

Вправа 3.5.5. Доведіть, що гомеоморфне вкладення $f\colon X \to Y$ є замкненим (відкритим) відображенням тоді і тільки тоді, коли образ $f(X)$ є замкненою (відкритою) множиною в топологічному просторі Y.

Приклад 3.5.6. Інтервал $\mathbb{I}$, зі звичайною (евклідовою) топологією (див. приклад 3.2.8), є замкненим підпростором дійсної прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною (евклідовою) топологією. Звичайна топологія довільного інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$ є індукованою топологією. Надалі під дійсною прямою чи інтервалом ми завжди будемо розуміти ці множини разом зі звичайною (евклідовою) топологією.

Вправа 3.5.6. Доведіть, що довільні два замкнені (відкриті) інтервала дійсної прямої $\mathbb{R}$, що містять більше однієї точки, є гомеоморфними.

Приклад 3.5.7. Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ вкладуваний в площину Немицького L: він гомеоморфний замкненому підпростору L_0 простору L (див. приклад 3.2.28).

Приклад 3.5.8. Дискретний простір $\mathbf{D}(\aleph_0)$ потужності $\aleph_0$ вкладуваний також в якості замкненого підпростору в дійсну пряму $\mathbb{R}$: він гомеоморфний множині N всіх натуральних чисел з індукованою топологією з $\mathbb{R}$. В подальшому ми будемо вважати, що $\mathbf{D}(\aleph_0) = N$.

Приклад 3.5.9. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ вкладувана у відрізок $J = [-1, 1]$: вона гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$, причому гомеоморфне вкладення $i\colon \mathbb{R} \to J$ можна визначити за формулою

$$i(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Означення 3.5.10. Будемо говорити, що топологічна властивість $\mathcal{P}$ є *спадковою* (*спадковою стосовно замкнених підмножин*, *спадковою стосовно відкритих підмножин* і т.д.), якщо кожен підпростір (замкнений підпростір, відкритий підпростір і т.д.) M топологічного простору X з властивістю $\mathcal{P}$, задовольняє властивість $\mathcal{P}$.

Прикладами спадкових властивостей є "вага $\leqslant \mathfrak{m}$" або "характер $\leqslant \mathfrak{m}$" і, зокрема, виконання першої чи другої аксіоми зліченності. Однак сепарабельність не є спадковою властивістю. Це випливає з того факту, що площина Немицького L є сепарабельним простором (див. приклад 3.2.28), оскільки за наслідком 3.2.17 множина $A = \{(x, y) \in L_1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ є щільною в L, однак площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0 який гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ (див. приклад 3.5.7).

Якщо топологічна властивість $\mathcal{P}$ не є спадковою, але кожен підпростір деякого простору X задовольняє властивість $\mathcal{P}$, то ми будемо говорити, що топологічний *простір X має спадкову властивість* $\mathcal{P}$. У цьому змісті будуть використовуватися в подальшому такі терміни, як "спадково сепарабельний простір" і "спадково нормальний простір".

Теорема 3.5.11. *Кожен підпростір топологічного T_i-простору є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Кожен замкнений підпростір нормального простору є нормальним.*

Доведення. Нехай M — підпростір топологічного простору X.

Якщо X — T_0-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існує відкрита множина U в просторі X, яка містить лише одну з них. Тоді множина $U \cap M$ — відкрита в M і містить лише одну з точок $x, y \in M$.

Якщо X — T_1-простір, то за твердженням 3.4.7 кожна точка x топологічного простору X є замкненою підмножиною в X. За твердженням 3.5.1 точка x є замкненою підмножиною в M, а отже за твердженням 3.4.7 топологічний простір M є T_1-простором.

Якщо X — T_2-простір, то для довільних різних точок $x, y \in M$ існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x та y у топологічному просторі X. Тоді

$$M \cap U(x) \ni x, \quad M \cap U(y) \ni y \quad \text{і} \quad (M \cap U(x)) \cap (M \cap U(y)) = M \cap U(x) \cap U(y) = \varnothing,$$

а отже топологічний простір M є гаусдорфовим.

Якщо X — регулярний простір, то за попередньо доведеним M є T_1-простором. Розглянемо довільну точку $x \in M$ та довільну замкнену підмножину A в топологічному просторі M такі, що $a \notin A$. Оскільки $\mathrm{Cl}_M(A) = A$, то за твердженням 3.5.1 маємо, що $\mathrm{Cl}_M(A) = M \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, а отже $a \notin \mathrm{Cl}_X(A)$. Тоді існують відкриті в топологічномк просторі X множини U_1 і U_2 такі, що

$$x \in U_1, \qquad A \subseteq U_2 \qquad \text{i} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Прийнявши

$$V_1 = U_1 \cap M \qquad \text{i} \qquad V_2 = U_2 \cap M,$$

отримуємо відкриті підмножини в топологічному просторі M такі, що

$$x \in V_1, \qquad A \subseteq V_2 \qquad \text{i} \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

а отже простір M є регулярним.

Останнє твердження теореми є очевидним. □

Означення 3.5.12. Нехай для неперервного відображення $f\colon M \to Y$, визначеного на підпросторі M топологічного простору X у топологічний простір Y, існує неперервне відображення $F\colon X \to Y$ таке, що $F|M = f$. Тоді кажуть, що відображення f *неперервно продовжується*, або, коротко, *продовжується* на простір X. Відображення $F\colon X \to Y$ називається *продовженням* відображення f на простір X.

Не кожне неперервне відображення, визначене на деякому підпросторі, має неперервне продовження на весь топологічний простір. Існування неперервного продовження швидше є виключенням, ніж правилом. Теореми, які дають достатні умови продовження неперервних відображень або ж неперервних дійсних функцій, належать до найбільш важливих теорем в топології та зазвичай достатньо складні. Зауважимо, що лему Урисона (див. теорему 3.4.24) можна переформулювати як теорему такого типу. Насправді, лема Урисона стверджує, якщо якийсь підпростір M нормального простору X можна зобразити як об'єднання двох неперетинних замкнених в просторі X підмножин A і B, то функція $f\colon M \to \mathbb{I}$, визначена за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in A; \\ 1, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

неперервно продовжується на весь топологічний простір X.

Виявляється, що справджується загальніше твердження:

Теорема 3.5.13 (теорема Тітце–Урисона). *Кожна неперервна функція, визначена на замкненому підпросторі деякого нормального простору X, зі значеннями в $\mathbb{I}$ або в $\mathbb{R}$, неперервно продовжується на весь простір X.*

Доведення. Спочатку доведемо нашу теорему для функцій з простору X в одиничний відрізок $\mathbb{I}$. Для спрощення позначень розглянемо випадок $f\colon M \to J$, де J — відрізок $[-1, 1]$, який гомеоморфний одиничному відрізку $\mathbb{I}$.

Почнемо із зауваження, що для довільного неперервного відображення $f_0\colon M \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умову

$$|f_0(x)| \leqslant c \qquad \text{для всіх} \quad x \in M,$$

існує таке неперервне відображення $g\colon X \to \mathbb{R}$, що виконуються умови:

$$|g(x)| \leqslant \frac{c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3.7}$$

$$|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2c}{3}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{3.8}$$

Справді, множини

$$A = f_0^{-1}\left(\left[-c, -\tfrac{c}{3}\right]\right) \qquad \text{і} \qquad B = f_0^{-1}\left(\left[\tfrac{c}{3}, c\right]\right)$$

не перетинаються та є замкнені в просторі M, а отже вони замкнені в топологічному просторі X. Тоді за лемою Урисона (див. теорему 3.4.24) існує така неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$, що

$$k(A) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$, означена за формулою

$$g(x) = \frac{2}{3}\, c\left(k(x) - \frac{1}{2}\right),$$

є неперервною та задовольняє умови (3.7) і (3.8).

Визначимо тепер за індукцією послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ неперервних функцій $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, таку, що

$$|g_i(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \text{якщо} \quad x \in X, \tag{3.9}$$

$$\left|f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad \text{якщо} \quad x \in M. \tag{3.10}$$

Для того, шоб отримати функцію $g_1\colon X \to \mathbb{R}$, ми використаємо вище згадане зауваження до функції $f_0 = i_J f$, де $i_J\colon J \to \mathbb{R}$ — вкладення відрізка J в дійсну пряму $\mathbb{R}$. Припустимо, що ми вже побудували функції $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Застосувавши теж саме зауваження до функції

$$f_0 = i_J f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right)\Bigg|M$$

і $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ми отримаємо функцію $g_{i+1}\colon X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (3.9) і (3.10) з $i+1$ замість i.

З умови (3.9) і теореми 3.3.29 випливає, що формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

визначає неперервну функцію $F\colon X \to J$, а з умови (3.10) отримуємо, що

$$F(x) = f(x) \qquad \text{для всіх} \quad x \in M.$$

Отож, функція F є неперервним продовженням функції f на топологічний простір X.

Тепер розглянемо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$. За попередньо доведеною частиною теореми, функція $i\,f$, де $i\colon \mathbb{R} \to J$ — гомеоморфне вкладення дійсної прямої $\mathbb{R}$ у відрізок J, означене за формулою

$$i(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

(див. приклад 3.5.9), продовжується на весь топологічний простір X до неперервної функції $F_1\colon X \to J$. Очевидно, що

$$L = F_1^{-1}(\{-1,1\})$$

є замкненою підмножиною топологічного простору X, яка не перетинається з множиною M. Отже, існує неперервна функція $k\colon X \to \mathbb{I}$ така, що

$$k(L) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad k(M) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $F_2\colon X \to J$, визначена за формулою

$$F_2(x) = F_1(x) \cdot k(x),$$

також є неперервним продовженням відображення $i\,f$ на топологічний простір X і, що

$$F_2(X) \subseteq i(\mathbb{R}).$$

Функція $F\colon X \to \mathbb{R}$, яка визначається співвідношенням

$$F(x) = i^{-1}\,F_2(x),$$

є шуканим неперервним продовженням функції f на топологічний простір X. □

Зауважимо, що властивість продовжуваності, яка було доведена в теоремі Тітце–Урисона, характкризує нормальні простори в класі T_1-просторів. Справді, якщо деякий T_1-простір X не є нормальним, то він мцістить дві неперетинні замкнені підмножини A та B, які не можна відокремити відкритими множинами, а тому функцію $f\colon A \cup B \to \mathbb{I}$, означену за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

не можна неперервно продовжити на весь топологічний простір X.

Доведемо ще одну теорему про продовження відображень.

Теорема 3.5.14. *Якщо неперервне відображення $f\colon A \to Y$ щільної підмножини A деякого топологічного простору X у гасдорфовий топологічний простір Y неперервно продовжується на весь простір X, то продовження однозначно визначається відображенням f.*

Доведення. Нехай $F_1\colon X \to Y$ і $F_2\colon X \to Y$ — різні неперервні продовження відображення $f\colon A \to Y$. За теоремою 3.4.12 множина

$$B = \{x \in X \mid F_1(x) = f_2(x)\}$$

замкнена в топологічному просторі X. Оскільки $A \subseteq B$, то $X = \overline{A} \subseteq B$, а тому $B = X$. □

Приклад 3.5.15. Застосуємо тепер теореми 3.5.13 і 3.5.14 для того, щоб отримати просте доведення того факту, що площина Немицького (див. приклад 3.2.28) не є нормальним простором (порівняйте це доведення з відповідним доведенням цього факту у твердженні 3.4.23). Як нам відомо, площина Немицького L містить замкнений підпростір L_0, гомеоморфний дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$, і зліченну щільну підмножину C. Р теореми 3.5.14 виливає, що кожна неперервна функція з площини Немицького L в дійсну пряму $\mathbb{R}$ визначається своїм звуженням на множину C. Отож, на L існує лише $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ неперервних дійсних функцій. Якщо ж топологічний простір площини Немицького L був би нормальним, то кожну з $2^{\mathfrak{c}}$ неперервних дійсних функцій, визначених на L_1, можна було б продовжити на весь простір L, а це неможливо, оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Отже, простір площини Немицького L не є нормальним.

Зауважимо, з наведеного вище доведення, як і з доведення твердження 3.4.23, випливає, що кожен простір X, який задовольняє умову $d(X) = \aleph_0$ і містить дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ потужності $\mathfrak{c}$ як замкнену підмножину, не є нормальним.

3.5.2 Сума топологічних просторів

Нехай дано сім'ю $\{X_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ попарно неперетинних топологічних просторів, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Розглянемо множину $X = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$ і сім'ю τ всіх множин $U \subseteq X$ таких, що $U \cap X_i$ відкрита підмножина в топологічному просторі X_i для довільного індекса $i \in \mathscr{I}$. Легко бачити, що така сім'я τ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$, а отже визначає деяку топологію на множині X. Множина X з такою топологією називається *сумою топологічних просторів* $\{X_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ і позначається $\bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$ або $X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$, якщо $\mathscr{I} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Вправа 3.5.7. Доведіть, що топологія суми на $X = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$ задовольняє умови $(\mathscr{O}1)$, $(\mathscr{O}2)$ і $(\mathscr{O}3)$.

Твердження 3.5.16. *Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли перетин $A \cap X_i$ — замкнена множина в топологічному просторі X_i для кожного $i \in \mathscr{I}$.*

Доведення. Множина $A \subseteq \bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$ замкнена тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i \setminus A$ — відкрита множина в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$. Отже, наше твердження випливає з рівності

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathscr{I}} X_i \setminus A\right) \cap X_{i_0} = X_{i_0} \setminus (A \cap X_{i_0}),$$

де $i_0 \in \mathscr{I}$. □

Наслідок 3.5.17. *Кожна множини X_i відкрито-замкнена в просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathscr{I}} X_i$.*

Очевидно, що кожен топологічний простір X_i є підпростором суми топологічних просторів $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Надалі вкладення простору X_j, $j\in\mathcal{J}$, в $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ будемо позначати через i_{j}.

Твердження 3.5.18. *Якщо $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j для кожного $j\in\mathcal{J}$, то дві топології, визначені на множині $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} A_j$, а саме топологія суми підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і топологія підпростору суми $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, збігаються.*

Твердження 3.5.19. *Якщо топологічний простір X можна представити як об'єднання сім'ї $\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ попарно неперетинних відкритих множин, то $X=\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$.*

Доведення. Множини X і $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$ збігаються, тому достатньо довести, що збігаються також їх сім'ї відкритих підмножин. Якщо множина U — відкрита в топологічному просторі X, то перетин $U\cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i для кожного $i\in\mathcal{J}$, а отже, множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$. Навпаки, якщо множина U — відкрита в топологічному просторі $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, то для кожного $i\in\mathcal{J}$ перетин $U\cap X_i$ — відкрита множина в топологічному просторі X_i, а тому і в топологічному просторі X. Отже, $U=\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}}(U\cap X_i)$ — відкрита множина в просторі X. □

Наслідок 3.5.20. *Нехай $\{X_j\}_{i\in\mathcal{J}}$ — сім'я попарно неперетинних топологічних просторів. Якщо $S=\bigoplus\limits_{i\in\mathfrak{I}} S_i$, де $S_i\cap S_{i'}=\varnothing$ для $i\neq i'$, то*

$$\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j=\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}}\left(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}_i} X_j\right),$$

тобто сума топологічних просторів є асоціативною операцією.

Вправа 3.5.8. Доведіть, що довільна сума топологічних T_i-просторів є T_i-простором для $i=0,1,2,3,3\frac{1}{2},4$.

Приклад 3.5.21. Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є сумою одноточкових просторів.

Вправа 3.5.9. Доведіть, що для довільної точки x прямої стрілки Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ (див. приклад 3.2.5) та для довільного відкритого околу U точки x, пряму Зорґенфрея $(\mathbb{R},\tau_{ZL})$ можна зобразити як суму $X_1\bigoplus X_2$, де $x\in X_1\subseteq U$.

Вправа 3.5.10. Доведіть, що дійсну пряму $\mathbb{R}$ не можна зобразити як суму $X_1\bigoplus X_2$, непорожніх множин $X_1,X_2\subseteq\mathbb{R}$.

3.5.3 Добуток топологічних просторів

У підрозділі 1.2.6 визначено декартовий добуток двох і довільної скінченної кількості множин.

Декартовий добуток (або просто *добуток*) сім'ї множин $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$, тобто множина всіх відображень f з $\mathcal{J}$ у $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ таких, що $f(i)\in A_i$ для довільного $i\in\mathcal{J}$, позначається

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i$$

або

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

у випадку послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Тобто

$$\prod_{i\in\mathcal{J}} A_i = \Big\{ f\colon \mathcal{J}\to \bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \mid f(i)\in A_i \Big\}.$$

Для $f\in\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ точка $f(i)\in A_i$ називається *i-ою координатою* відображення f. Елемент добутку $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$, кожна i-а координата якого є точка $x_i\in A_i$, надалі буде позначатися символом $\{x_i\}$. Зокрема, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів множини A, яка є елементом $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $A_i = A$ для $i = 1, 2, 3\ldots$, буде часто позначатися також через $\{x_i\}$.

Зауважимо, що добуток $\prod\limits_{i\in\mathcal{J}} X_i$, де $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, не є в точності тією ж множиною, що і декартовий добуток $X_1\times X_2\times\cdots\times X_k$. Однак, між елементами цих двох множин існує очевидна взаємно однозначна відповідність, і ми будемо розглядати ці множини, як одну й ту ж множину, елементи якої позначатимемо через $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

З вище сказаного випливає, що декартовий добуток $X_1\times X_2$ ми можемо розглядати не лише як множину впорядкованих пар

$$X_1\times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\},$$

але і як множину відображень

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = \{f\colon \{1,2\}\to X_1\cup X_2 \mid f(1)\in X_1,\ f(2)\in X_2\}.$$

Означення 3.5.22. Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Розглянемо (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де p_j ставить у відповідність точці $x = \{x_j\}\in\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ її j-ту координату $x_j\in X_j$. Множина

$X = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ з топологією, породженою сім'єю відображень $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, називається (*декартовим*) *добутком просторів* $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а сама топологія називається *тихоновською топологією* на $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$; відображення $p_j\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to X_s$ називаються *проекціями*.

Для довільної сім'ї $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ топологічних просторів символом $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ ми будемо позначати не множину — декартовий добуток множин $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, а топологічний простір з визначеною на ньому тихоновською топологією. Добуток скінченної сім'ї $\{X_j\}_{j=1}^k$ будемо також позначати через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Якщо $X_j = X$ для довільного $j \in \mathcal{J}$, то добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ позначають також через $X^{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$.

Вправа 3.5.11. Доведіть, що добуток $X^{\mathfrak{m}}$ не залежить (з точністю до гомеоморфізму) від множини $\mathcal{J}$, а залежить лише від її потужності $\mathfrak{m}$.

Добуток $X^{\mathfrak{m}}$ називається $\mathfrak{m}$-*им степенем* простору X, а добуток $X\times X$ називають також *квадратом* простору X.

Твердження 3.5.23. *Сім'я всіх множин* $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, *де* W_j *— відкрита підмножина топологічного простору* X_j *і* $W_j \neq X_j$ *лише для скінченної множини* $j \in \mathcal{J}$, *утворюють базу добутку* $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. *Більше того, якщо для кожного* $j \in \mathcal{J}$ *зафіксована деяка база* $\mathscr{B}_j$ *простору* X_j, *то підсім'я, яка складається з тих* $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, *в яких* $W_j \in \mathscr{B}_j$ *при* $W_j \neq X_j$, *також утворює базу.*

Доведення. За твердженням 3.3.30 сім'я всіх множин вигляду

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_{j_i}^{-1}(W_{j_i}),$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і множина W_i відкрита в просторі X_{j_i}, є базою простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$. Звідси випливає, що для доведення першої частини твердження достатньо зауважити, що

$$p_{j_0}^{-1}(W_{j_0}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} W_j, \qquad \text{де} \quad W_j = X_j \text{ при } j \neq j_0,$$

і

$$\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j\Big) \cap \Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j'\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \left(W_j \cap W_j'\right).$$

Друга частина твердження є безпосереднім наслідком першої частини та означення бази. □

База топологічного простору $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, описана в першій частині твердження 3.5.23, називається *канонічною базою добутку*.

Вправа 3.5.12. Доведіть, що сім'я всіх множин $\prod_{j\in\mathcal{J}} W_j$, де W_j — відкрита підмножина топологічного простору X_j і $W_j \neq X_j$ лише для одного $j \in \mathcal{J}$, є передбазою добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Зауважимо, з твердження 3.5.23 випливає, що всеможливі сім'ї підмножин вигляду

$$W_{j_1} \times W_{j_2} \times \cdots \times W_{j_k} \times \prod_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j_i,j_2,\ldots,j_k\}} X_j,$$

де $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ і W_{j_i} — відкрита множина в топологічному просторі (елемент бази топологічного простору) X_{j_i}, утворюють базу добутку $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$.

Приклад 3.5.24. Розглянемо частковий випадок, а саме декартовий добуток $X \times Y$ топологічних просторів X і Y. Базою добутку $X \times Y$ за твердженням 3.5.23 є сім'я

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{B}_X \text{ і } V \in \mathscr{B}_Y\},$$

де $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — бази топологічних просторів X та Y, відповідно (див. рис. 3.16).

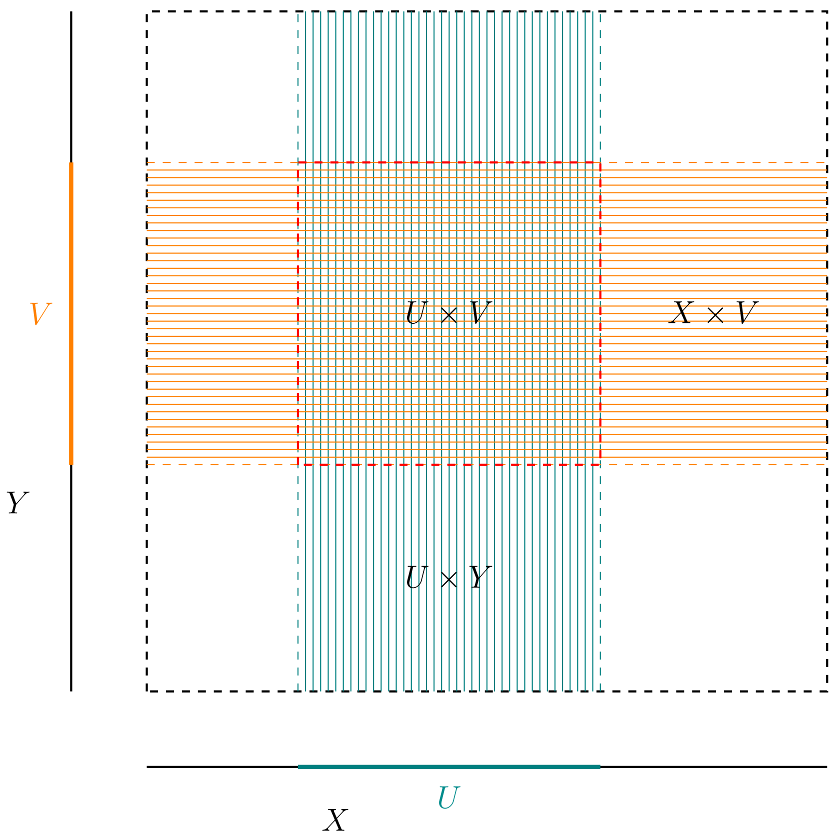


Рис. 3.16: База добутку $X \times Y$

Очевидно, що за передбазу добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y можемо взяти сім'ю, яка складається з всеможливих добутків $X \times V$ і $U \times Y$, де $U \in \mathscr{P}_X$ та $V \in \mathscr{P}_Y$, і $\mathscr{P}_X$ та $\mathscr{P}_Y$ — деякі передбази топологічних просторів X та Y, відповідно.

Зауважимо також, що навіть у випадку, коли $\mathscr{B}_X$ і $\mathscr{B}_Y$ — топології на X та Y, відповідно, то сім'я $\mathscr{B}_{X\times Y}$ не є топологією на $X \times Y$.

Твердження 3.5.25. *Якщо $\{X_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ — сім'я топологічних просторів і A_j — підпростір простору X_j, $j \in \mathscr{J}$, то дві топології, визначені на множині $A = \prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$, а саме топологія добутку підпросторів $\{A_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ і топологія підпростору добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$, збігаються.*

Доведення. Можемо вважати, що $A_j \neq \varnothing$ для кожного $j \in \mathscr{J}$. Оскільки звуження $p_j|A\colon A \to A_j$ проекцій p_j є неперервними відображеннями, то топологія підпростору на A сильніша за топологію добутку, і це випливає з означення топології добутку. Довільна відкрита множина підпростору A є перетином множини A з об'єднанням сім'ї елементів канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$, тобто є об'єднанням перетинів A з елементами цієї сім'ї. Оскільки кожен такий перетин є елементом канонічної бази для топологічного простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$, то топологія добутку на A сильніша за топологію підпростору. □

Твердження 3.5.26. *Для кожної сім'ї $\{A_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, де $A_j \subseteq X_j$ у добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ виконується рівність*

$$\overline{\prod_{j\in\mathscr{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j}. \tag{3.11}$$

Доведення. З твердження 3.2.15 випливає, що $x \in \overline{\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} W_j$ канонічної бази простору $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$, який містить точку x, маємо, що

$$\prod_{j\in\mathscr{J}} W_j \cap \prod_{j\in\mathscr{J}} A_j = \prod_{j\in\mathscr{J}} (W_j \cap A_j) \neq \varnothing,$$

тобто для кожного $j \in \mathscr{J}$ і для довільного відкритого околу W_j j-ої координати точки x ми маємо $W_j \cap A_j \neq \varnothing$. Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли $x \in \prod\limits_{j\in\mathscr{J}} \overline{A_j}$. □

Наслідок 3.5.27. *Множина $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} A_j$, де $\varnothing \neq A_j \subseteq X_j$, замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathscr{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли A_j — замкнена множина топологічного простору X_j для кожного $j \in \mathscr{J}$.*

Доведення. З твердження 3.5.26 випливає, якщо всі A_j замкнені в просторі X_j для кожного $j \in \mathfrak{J}$, то множина $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} A_j$ також замкнена в добутку $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$. Навпаки, якщо $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} A_j$ — замкнена підмножина добутку $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$, то

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j = \overline{\prod_{j\in\mathfrak{J}} A_j} = \prod_{j\in\mathfrak{J}} \overline{A_j},$$

і оскільки множини A_j — непорожні, то $A_j = \overline{A_j}$ для кожного $j \in \mathfrak{J}$. □

Наслідок 3.5.28. *Множина $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} A_j$, де $A_j \subseteq X_j \neq \varnothing$, щільна в добутку $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ тоді і тільки тоді, коли A_j — щільна множина в топологічному просторі X_j для кожного $j \in \mathfrak{J}$.*

Зауваження 3.5.29. Оскільки не кожну підмножину простору $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ можна зобразити у вигляді $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} A_j$, то тихоновська топологія на добутку $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ не може бути визначена оператором замикання, який визначається за формулою (3.11).

З твердження 3.3.31 випливає

Твердження 3.5.30. *Відображення f топологічного простору X у добуток $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} Y_j$ неперервно тоді і лише тоді, коли композиція $p_j f$ неперервна для кожного $j \in \mathfrak{J}$.*

Твердження 3.5.31. *Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ — сім'я топологічних просторів. Якщо $\mathfrak{J} = \bigcup\limits_{l\in\mathfrak{L}} \mathfrak{J}_l$, де $\mathfrak{J}_l \cap \mathfrak{J}_{l'} = \varnothing$ для $l \neq l'$, то простори*

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j \qquad i \qquad \prod_{l\in\mathfrak{L}} \Big(\prod_{j\in\mathfrak{J}_l} X_j\Big)$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є асоціативною операцією.

Доведення. Поставимо у відповідність точці

$$x = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathfrak{J}} X_j$$

точку

$$f(x) = \{x_l\} \in \prod_{l\in\mathfrak{L}} \Big(\prod_{j\in\mathfrak{J}_l} X_j\Big),$$

де

$$x_l = \{x_j\} \in \prod_{j\in\mathfrak{J}_l} X_j.$$

Визначене так відображення f взаємно однозначно відображає топологічний простір $\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ на простір $\prod\limits_{l\in\mathfrak{L}} \Big(\prod\limits_{j\in\mathfrak{J}_l} X_j\Big)$. За твердженням 3.5.30 відображення f і f^{-1} неперервні. □

Зауваження 3.5.32. Зауважимо, що з теорії множин відомо, що для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{m}$ виконується рівність $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Звідси та з твердження 3.5.31 випливає, що топологічні простори $(X^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}$ і $X^{\mathfrak{m}}$ гомеоморфні для довільного топологічного простору X і довільного кардинала $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$.

Твердження 3.5.33. *Нехай $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'я топологічних просторів і $\varphi\colon\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ — бієктивне відображення. Тоді простори*

$$\prod_{j\in\mathcal{J}}X_j \qquad i \qquad \prod_{j\in\mathcal{J}}X_{\varphi(j)}$$

гомеоморфні, тобто декартовий добуток просторів є комутативною операцією.

Приклад 3.5.34. Нехай n — натуральне число.

Простір $\mathbb{R}^n$ — добуток n екземплярів дійсної прямої називається *евклідовим n-вимірним простором*.

Топологічний простір $\mathbb{I}^n$ — добуток n екземплярів замкненого одиничного відрізка називається *одиничним n-вимірним кубом*.

Якщо $m>n$, то підпростір евклідового m-вимірного простору $\mathbb{R}^m$, який складається з усіх точок, у яких останні $m-n$ координат дорівнюють нулю, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^n$, тобто простір $\mathbb{R}^n$ вкладається в топологічний простір $\mathbb{R}^m$ при $m>n$.

Підпростір евклідового $n+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{n+1}$, який складається з усіх точок $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ таких, що

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1,$$

називається *одиничною n-вимірною сферою* і позначається $\mathbb{S}^n$.

Підпростір евклідового n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, який складається з усіх точок $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ таких, що

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2\leqslant 1,$$

називається *одиничною n-вимірною кулею* і позначається $\mathbb{B}^n$.

Одновимірна сфера $\mathbb{S}^1$ — це *коло*, а добуток $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ — це *тор*.

Зауважимо, що для непорожньої множини $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}W_j\subseteq\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j$ маємо

$$p_{j_0}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}}W_j\Big)=W_{j_0}.$$

Звідки випливає, що проекції $p_j\colon\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j\to X_j$ є відкритими відображеннями. З прикладу 3.5.35 випливає, що в загальному випадку проекція $p_j\colon\prod\limits_{j\in\mathcal{J}}X_j\to X_j$ не є замкненим відображенням.

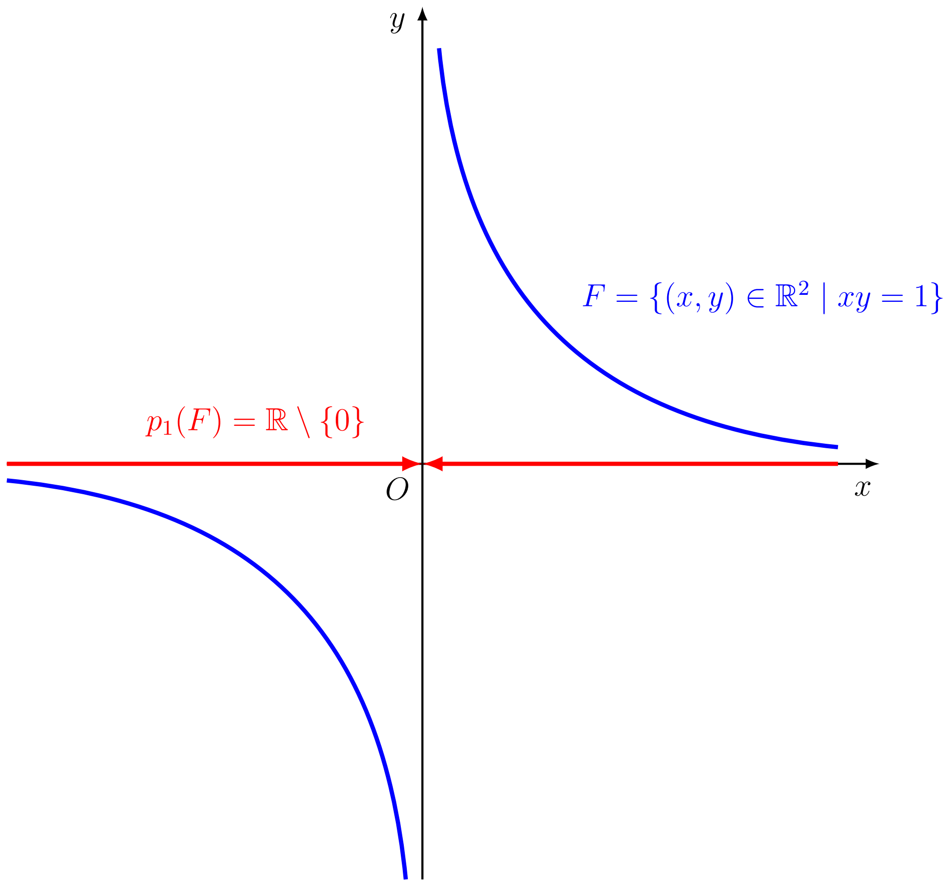


Рис. 3.17: До прикладу 3.5.35

Приклад 3.5.35. Проекція $p_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини $\mathbb{R}^2$ на вісь Ox не є замкненим відображенням. Справді, множина (див. рис. 3.17).

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$$

замкнена в просторі $\mathbb{R}^2$, але її образ $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не замкнений підпростір в одновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}$.

Означення 3.5.36. Нехай дано $\{X_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ — сім'ї топологічних просторів і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j \colon X_j \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x = \{x_j\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} X_j$ в точку $\{f_j(x_j)\} \in \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *декартовим добутком відображень* і позначається $\prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$, або $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для декартового добутку відображень $f = \prod\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j$ виконуються співвідношення

$$f\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f_j\colon X_j \to Y_j$, $A_j \subseteq X_j$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

Означення 3.5.37. Нехай дано топологічний простір X, сім'ю топологічних просторів $\{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ і сім'ю неперервних відображень $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, де $f_j\colon X \to Y_j$. За твердженням 3.5.30 відображення, яке переводить точку $x \in X$ в точку $\{f_j(x)\} \in \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ є неперервним. Таке відображення $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ називається *діагоналлю відображень* і позначається $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$, або $f_1\Delta f_2\Delta\cdots\Delta f_k$, якщо $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Зауважимо, що для діагоналі відображень $f = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ виконуються співвідношення

$$f(A) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f(A_j) \qquad \text{і} \qquad f^{-1}\Big(\prod_{j\in\mathcal{J}} B_j\Big) = \prod_{j\in\mathcal{J}} f_j^{-1}(B_j),$$

де $f\colon X \to Y_j$, $A \subseteq X$ і $B_j \subseteq Y_j$ для всіх $j \in \mathcal{J}$.

Також зауважимо, що діагональ $\underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} f_j$ є композицією діагоналі

$$i = \underset{j\in\mathcal{J}}{\Delta} \mathrm{id}_{X_j}\colon X \to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $X_j = X$ для $j \in \mathcal{J}$, і добутку

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} f_j\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j.$$

Образ

$$\Delta = i(X) \subset X^{\mathfrak{m}} = \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j,$$

де $\mathfrak{m} = |\mathcal{J}|$, називається *діагоналлю добутку* $X^{\mathfrak{m}}$. З теореми 3.4.12 випливає, якщо X — гаусдорфовий простір, то діагональ

$$\Delta = \bigcap_{j',j''\in\mathcal{J}} \Big\{x \in \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \mid p_{j'}(x) = p_{j''}(x)\Big\}$$

замкнена в топологічному просторі $X^{\mathfrak{m}}$.

Вправа 3.5.13. Доведіть, що добуток T_i-просторів є T_i-простором для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

Вправа 3.5.14. Доведіть, якщо добуток $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ є непорожнім T_i-простором, то всі X_j є T_i-просторами для $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

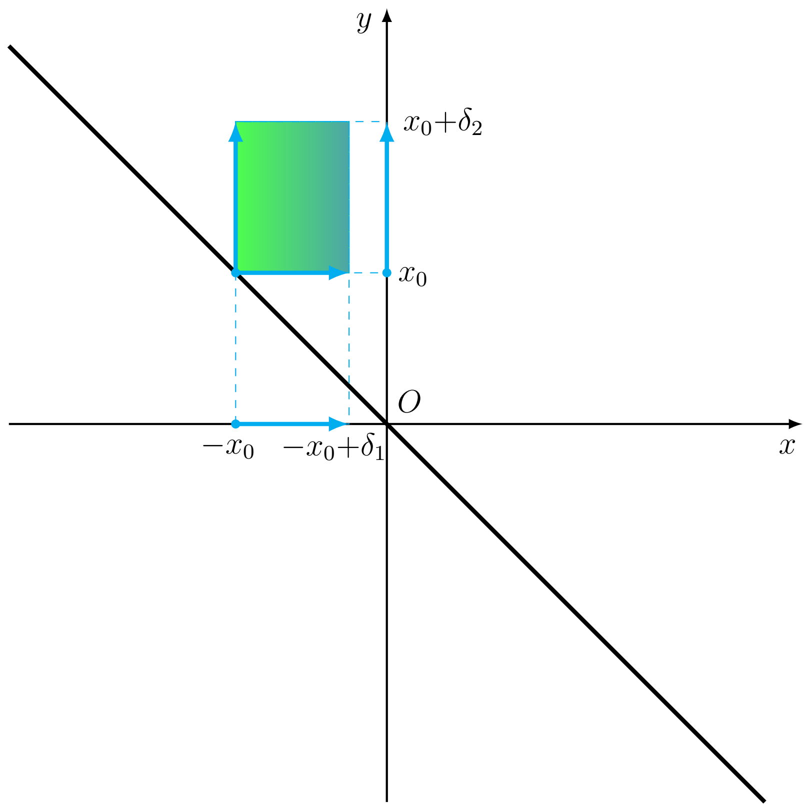


Рис. 3.18: До прикладу 3.5.38

Приклад 3.5.38. У прикладі 3.4.22 ми довели, що стрілка Зорґенфрея $K = (\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ (див. приклад 3.2.5) є нормальним простором. Виявляється квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором. Справді, квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ містить замкнену підмножину, яка гомеоморфна дискретному простору $\mathbf{D}(\mathfrak{c})$. Такою підмножиною є

$$F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset K \times K$$

(див. рис. 3.18). Крім того, топологічний простір $K \times K$ містить зліченну щільну підмножину

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розмірковуючи аналогічно, як і в доведенні твердження 3.4.23, чи в прикладі 3.5.15, ми отримуємо, що квадрат стрілки Зорґенфрея $K \times K$ не є нормальним простором.

Вправа 3.5.15. Доведіть, що топологічний простір X є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли його діагональ

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

є замкненою підмножиною в квадраті $X \times X$.

3.5.4 Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39. *Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.*

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. □

Твердження 3.5.40. *Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.*

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. □

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору

$X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним* або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41. *Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:*

- (i) *відображення f є факторним;*
- (ii) *множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;*
- (iii) *множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;*
- (iv) *відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. □

Наслідок 3.5.42. *Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.*

Наслідок 3.5.43. *Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.*

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. □

Вправа 3.5.16. Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\, i_A$ випливає

Наслідок 3.5.44. *Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.*

Наслідок 3.5.45. *Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.*

Наслідок 3.5.46. *Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.*

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. □

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47. *Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:*

(i) *природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);*

(ii) *для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;*

(iii) *для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.*

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. □

Наслідок 3.5.48. *Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.*

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (*ii*) і (*iii*) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (*ii*) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Приклад 3.5.49. Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x-y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17. Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.50. Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51. На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис. 3.19). Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

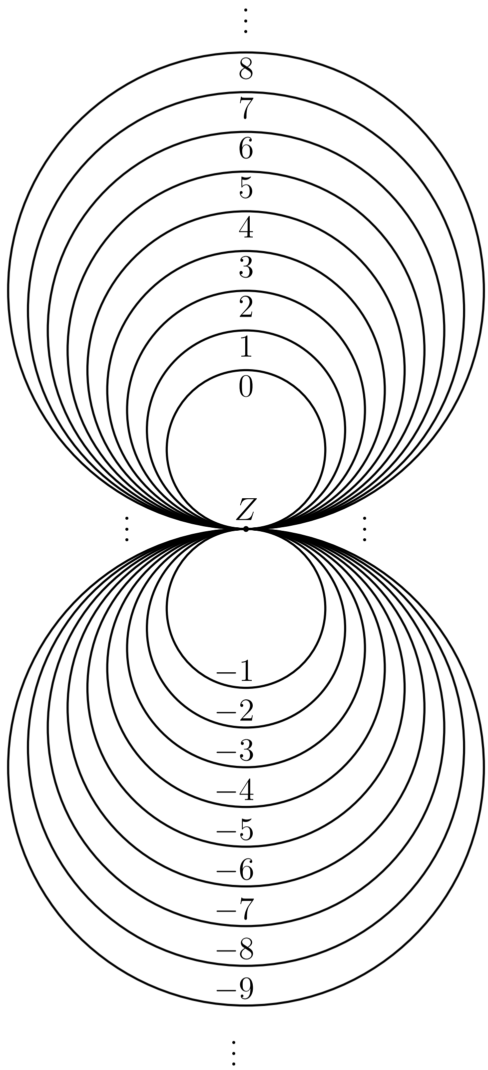


Рис. 3.19: До прикладу 3.5.51

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\right\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \left\{\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$\begin{array}{c}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\}; \\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\}; \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\}; \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{array}$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18. Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

3.6 Компактні простори

Означення 3.6.1. *Покриттям* множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2. Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.3. Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4. Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Теорема 3.6.5. *Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.*

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. $\square$

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6. *Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.*

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7. *Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8. *Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.*

Наслідок 3.6.9. *Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що*

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. □

Теорема 3.6.10. *Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що*

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad i \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{3.12}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (3.12), застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. □

Теорема 3.6.11. *Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.*

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. □

Теорема 3.6.12. *Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.*

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. □

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13. *Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.*

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.14. *Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.*

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\dots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\dots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\dots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\dots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. □

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Наслідок 3.6.15. *Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A\subseteq X$.*

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X\to Y$ неперервне, то $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. □

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16. *Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.*

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17. *Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.*

Наслідок 3.6.18. *Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X,τ_1) компактний, а (X,τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1=\tau_2$.*

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. □

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Лема 3.6.19. *Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що*

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. □

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського). *Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:*

- (i) *простір X є компактним;*
- (ii) *для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y \colon X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;*
- (iii) *для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y \colon X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y \colon X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним.

Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя вплиaває наша імплікація. □

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21. Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ (див. приклад 3.3.27) є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Приклад 3.6.22. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ (див. приклад 3.2.5) не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23. Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ (див. приклади 3.2.30 і 3.3.27) є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \dots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.24. Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.25. Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$
$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис. 3.20). Відображення проектування кола C_1 на

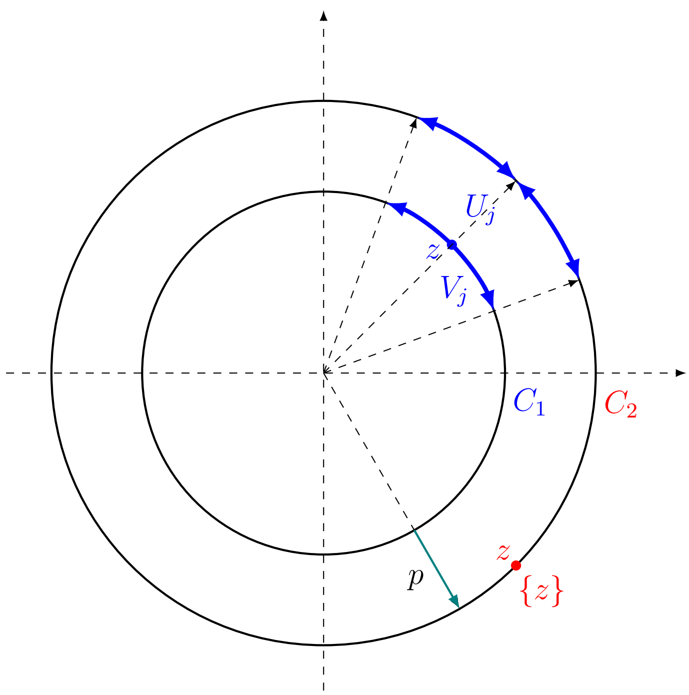


Рис. 3.20: До прикладу 3.6.25: два кола Алєксандрова

коло C_2 з точки $(0, 0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо

$$\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_1,$$
$$\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_2,$$

де $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ і V_j — відкрита дуга довжини $1/j$ кола C_1 з серединою в точці z. Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$. Отже, за твердженням 3.4.11, множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.

Топологічний простір X називається *два кола Александрова*.

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{3.13}$$

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення (3.13) буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Отож, отримуємо

$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \{U_{s'_i}\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.

Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

3.6.1 Операції над компактними просторами

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів (див. теореми 3.6.6 і 3.6.12).

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26. *Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X, \quad F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \quad \text{і} \quad F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а отже

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \tag{3.14}$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми тоді маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а отже

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4.

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{3.15}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (3.14) і (3.15) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. □

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27. *Сума* $\bigoplus_{s \in \mathcal{S}} X_s$, *де* $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in \mathcal{S}$, *є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори* X_s *є компактами (відп., компактними) і множина* $\mathcal{S}$ *скінченна.*

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^n$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. □

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова). *Добуток* $\prod_{s \in \mathcal{S}} X_s$, *де* $X_s \neq \varnothing$ *для всіх* $s \in \mathcal{S}$, *є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори* X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[13] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3.16}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{3.17}$$

і

$$\text{якщо} \quad A_0 \subset X \quad \text{і} \quad A_0 \cap A \neq \varnothing \quad \text{для кожного} \quad A \in \mathscr{F}, \quad \text{то} \quad A_0 \in \mathscr{F}. \tag{3.18}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A\in\mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A\in\mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{3.19}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (3.19) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (3.18) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (3.17) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3.16). □

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{aligned}
&p_1\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y,\\
&p_2\colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y,\\
&\ \ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&p_n\colon X_n \times Y \to Y.
\end{aligned}$$

[13] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

3.7 Зв'язні простори

Спочатку нагадаємо означення відокремлених множин. Дві множини A та B топологічного простору X називаються *відокремленими*, якщо $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. Очевидно, що дві диз'юнктні множини відокремлені в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли жодна з них не містить точок накопичення іншої множини в просторі X. Зокрема, довільні дві диз'юнктні замкнені множини відокремлені. Також, довільні дві диз'юнктні відкриті множини відокремлені. Очевидно, якщо множини A і B топологічного простору X відокремлені та $A_1 \subseteq A$ і $B_1 \subseteq B$, то множини A_1 і B_1 відокремлені в топологічному просторі X.

Означення 3.7.1. Топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо X не можна представити у вигляді $X_1 \bigoplus X_2$, де X_1 і X_2 — непорожні підпростори простору X.

Теорема 3.7.2. *Для довільного топологічного простору X такі умови еквівалентні:*

(i) *простір X зв'язний;*

(ii) *порожня множина та весь простір X — єдині відкрито-замкнені множини в просторі X;*

(iii) *якщо $X = X_1 \cup X_2$ і множини X_1 і X_2 — відокремлені в X, то одна з них порожня;*

(iv) *кожне неперервне відображення $f \colon X \to D$ топологічного простору X у двоточковий дискретний простір $D = \{0, 1\}$ є постійним, тобто або $f(X) \subseteq \{0\}$, або $f(X) \subseteq \{1\}$.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Зауважимо, якщо множина $X_1 \subseteq X$ відкрито-замкнена в топологічному просторі X, $\varnothing \neq X_1 \neq X$ і $X_2 = X \setminus X_1$, то з твердження 3.5.19 випливає, що $X = X_1 \bigoplus X_2$ і $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$, а це суперечить припущенню.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Нехай $X = X_1 \cup X_2$ і $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$. Тоді $\overline{X}_1 \subseteq X \setminus X_2 \subseteq X_1$, а отже $\overline{X}_1 = X_1$. Аналогічно доводиться, що $\overline{X}_2 = X_2$. Оскільки множини X_1 і X_2 замкнені та неперетинаються, то вони відкриті, а тоді за твердженням (ii) одна з них є порожньою.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Достатньо зауважити, якщо $f \colon X \to D$ — неперервне відображення, для якого $X_1 = f^{-1}(0) \neq \varnothing$ і $X_2 = f^{-1}(1) \neq \varnothing$, то з умови $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$ випливає, що для топологічного простору не виконується умова (iii).

$(iv) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що не виконується умова (i), тобто $X = X_1 \bigoplus X_2$, де $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$, то припустивши, що

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in X_1; \\ 1, & \text{якщо } x \in X_2, \end{cases}$$

ми отримуємо неперервне відображення $f \colon X \to D$ таке, що $f(X) = D$. □

Наслідок 3.7.3. *Топологічний простір X є зв'язним тоді і тільки тоді, коли X не можна представити у вигляді об'єднання $X_1 \cup X_2$ двох непорожніх замкнених диз'юнктних множин.*

Наслідок 3.7.4. *Топологічний простір X є зв'язним тоді і тільки тоді, коли X не можна представити у вигляді об'єднання $X_1 \cup X_2$ двох непорожніх відкритих диз'юнктних множин.*

З рівносильності умов (i) і (iv) в теоремі 3.7.2 випливає

Теорема 3.7.5. *Неперервний образ зв'язного топологічного простору є зв'язним.*

Наслідок 3.7.6. *Кожен зв'язний тихоновський простір X, який містить хоча б дві різні точки, має потужність не меншу за $\mathfrak{c}$.*

Доведення. Нехай X — зв'язний тихоновський простір, який містить дві різні точки x_1 і x_2. За означенням тихоновського простору існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x_1) = 0$ і $f(x_2) = 1$. Якщо існує точка $r \in \mathbb{I} \setminus f(X)$, то

$$X = \{x \in X \mid f(x) < r\} \bigoplus \{x \in X \mid f(x) > r\},$$

а це суперечить теоремі 3.7.5. Отже, $f(X) = \mathbb{I}$, а отже $|X| \geqslant \mathfrak{c}$. □

Приклад 3.7.7.
1. З прикладу 3.5.21 випливає, що довільний дискретний простір, який містить не менше двох точок, не є зв'язним.
2. З вправи 3.5.9 випливає, що стрілка Зорґенфрея не є зв'язним простором.
3. З вправи 3.5.10 випливає, що дійсна пряма $\mathbb{R}$ є зв'язним простором. Тому за теоремою 3.7.5 неодноточковими зв'язними підпросторами в топологічному просторі $\mathbb{R}$ є:
$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b] \quad \text{і} \quad [a, b].$$
4. Порожній простір і одноточковий простір, є, очевидно, зв'язними.
5. Легко бачити, що двоточкова множина $X = \{a, b\}$ з топологією $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ є зв'язним топологічним простором. Саме тому цей простір називається *зв'язною двокрапкою*.

Далі ми опишемо зліченний зв'язний гаусдорфовий простір. З наслідку 3.7.6 випливає, що зліченного зв'язного тихоновського простору, який містить більше однієї точки, не існує. Оскільки кожен зліченний регулярний простір є нормальним, то не існує і регулярного простору з вказаними умовами.

Приклад 3.7.8. Позначимо через X множину всіх точок (r_1, r_2) дійсної площини $\mathbb{R}^2$ таких, що $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ і $r_2 \geqslant 0$. Очевидно, що $|X| = \aleph_0$. Для кожної точки $x = (r_1, r_2) \in X$ і натурального числа i приймемо

$$U_i(x) = \{x\} \cup \left\{(r, 0) \mid \left|r - \left(r_1 - \frac{r_1}{\sqrt{3}}\right)\right| < \frac{1}{i}\right\} \cup \left\{(r, 0) \mid \left|r - \left(r_1 + \frac{r_1}{\sqrt{3}}\right)\right| < \frac{1}{i}\right\}.$$

для довільної точки x, яка лежить вище осі абсцис, множина $U_i(x)$ складається з точки x і всіх раціональних точок осі абсцис, які віддалені не менше ніж на $\frac{1}{i}$ від однієї з вершин рівностороннього трикутника з вершиною в точці x, основа якого лежить на осі абсцис (див. рис. 3.21). Якщо ж точка розташована на осі абсцис, то множина $U_i(x)$ складається з усіх раціональних точок осі абсцис, які віддалені не менше ніж на $\frac{1}{i}$ від точки x. Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, де

$$\mathscr{B}(x) = \{U_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

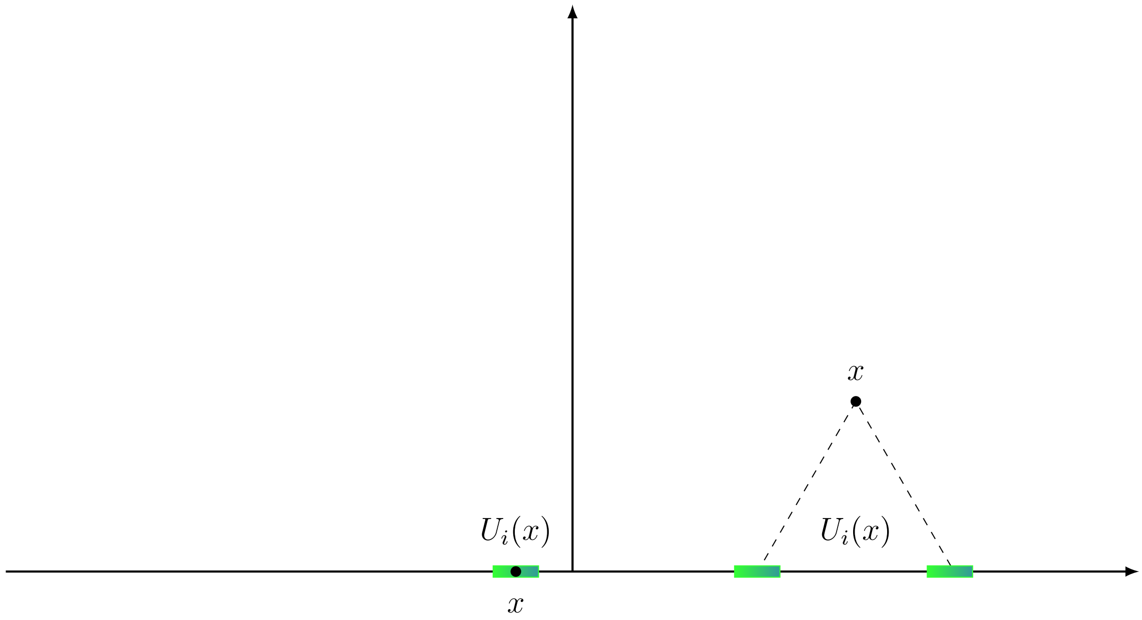


Рис. 3.21: До прикладу 3.7.8: околи $U_i(x)$

задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$), ($\mathscr{BP}3$) і ($\mathscr{BP}4$). Отже, за твердженням 3.4.11, множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.

Замикання множини $U_i(x)$ стосовно цієї топології складається з усіх точок топологічного простору X, відстань від яких до якої-небудь з прямих, що проходять через точку x під кутом $60°$ і $120°$ до осі абсцис, не перевищує $\dfrac{\sqrt{3}}{2i}$ (див. рис. 3.22). Отже, для довільних точок $x_1, x_2 \in X$ і довільних натуральних чисел i_1, i_2 виконується умова

$$\overline{U_{i_1}(x_1)} \cap \overline{U_{i_2}(x_2)} \neq \varnothing,$$

а з цього випливає, що простір X не можна представити у вигляді об'єднання двох непорожніх неперетинних відкрито-замкнених множин. Отож, топологічний простір X є зв'язним.

Розглянемо тепер, як діють операції на зв'язних просторах.

Очевидно, що підпростір зв'язного топологічного простору може і не бути зв'язним.

Теорема 3.7.9. *Підпростір C топологічного простору X зв'язний тоді і тільки тоді, коли якими б не були відокремлені множини X_1 і X_2 простору X такі, що $C = X_1 \cup X_2$, то завжди або $X_1 = \varnothing$, або $X_2 = \varnothing$.*

Доведення. Припустимо, що підпростір C топологічного простору X зв'язний та $C = X_1 \cup X_2$, де $X_1 \cap \overline{X}_2 = \varnothing = \overline{X}_1 \cap X_2$. Зрозуміло, що множини X_1 і X_2 відокремлені в просторі X. Отже, за теоремою 3.7.2 одна з цих множин є порожньою.

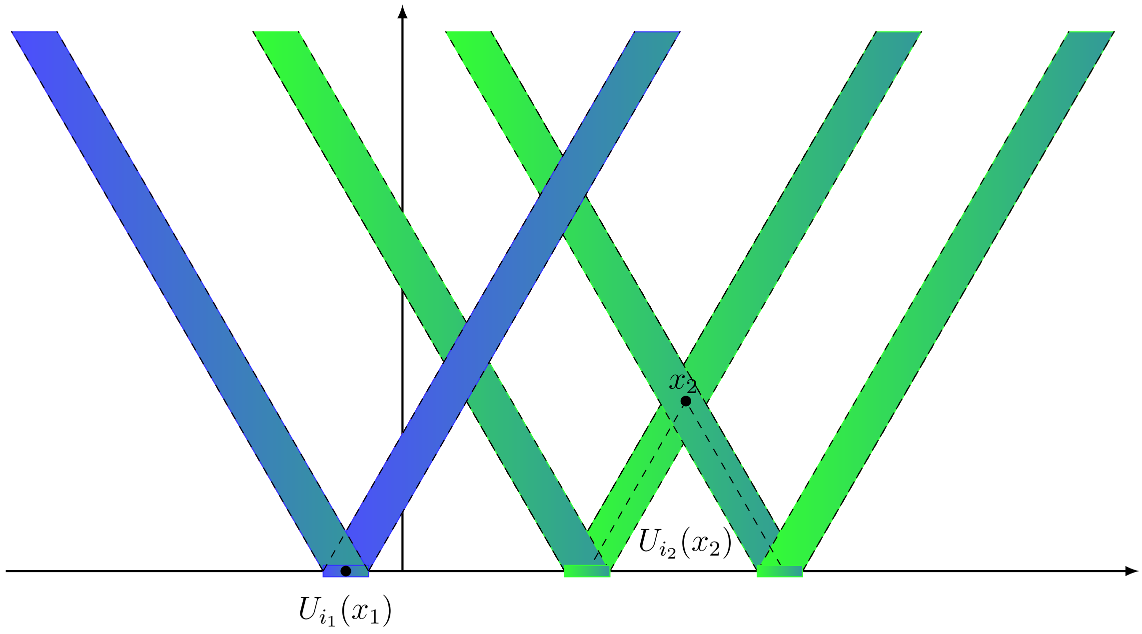


Рис. 3.22: До прикладу 3.7.8: $\overline{U_{i_1}(x_1)} \cap \overline{U_{i_2}(x_2)} \neq \varnothing$

З іншого боку якщо підпростір X не є зв'язним, то існують неперетинні замкнені в просторі C множини X_1 і X_2 для яких $C = X_1 \cup X_2$. Зрозуміло, що множини X_1 і X_2 відокремлені в просторі X, а отже не виконується умова теореми. □

Наслідок 3.7.10. *Якщо підпростір C топологічного простору X зв'язний, то для довільних відокремлених множини X_1 і X_2 простору X таких, що $C = X_1 \cup X_2$, завжди або $C \subseteq X_1$, або $C \subseteq X_2$.*

Доведення. Множини $C \cap X_1$ і $C \cap X_2$ відокремлені в топологічному просторі X, а їх об'єднання дорівнює C. За теоремою 3.7.9 одна з цих множин порожня, а отже множина C міститься в іншій. □

Теорема 3.7.11. *Нехай $\{C_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — деяка сім'я зв'язних підпросторів топологічного простору X. Тоді якщо існує такий індекс $s_0 \in \mathcal{S}$, що множина C_{s_0} не є відокремлена від жодної множини C_s, то об'єднання $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} C_s$ є зв'язним.*

Доведення. Припустимо, що

$$C = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} C_s = X_1 \cup X_2,$$

де X_1 і X_2 — відокремлені підмножини топологічного простору X. За наслідком 3.7.10, або $C_{s_0} \subseteq X_1$, або $C_{s_0} \subseteq X_2$. Припустимо, що $C_{s_0} \subseteq X_1$. Тоді, оскільки кожна з множин C_s міститься або X_1, або в X_2, то жодна з них не відокремлена від множини C_{s_0}, а отже маємо, що $C_s \subseteq X_1$ для всіх $s \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що $C \subseteq X_1$ і $X_2 = \varnothing$. □

Наслідок 3.7.12. *Якщо сім'я $\{C_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ зв'язних підпросторів топологічного простору X має непорожній перетин, то її об'єднання $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} C_s$ є зв'язним.*

Наслідок 3.7.13. *Якщо підпростір C топологічного простору X зв'язний, то кожен підпростір A простору X такий, що $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$, також зв'язний.*

Доведення. Сім'я $\{C\} \cup \{\{x\}\}_{x\in A}$ задовольняє умови теореми 3.7.11, де $C_{s_0} = C$. □

Наслідок 3.7.14. *Якщо топологічний простір X містить щільний зв'язний підпростір, то простір X є зв'язним.*

Наслідок 3.7.15. *Якщо дві точки топологічного простору X можна з'єднати зв'язним підпростором цього простору, то простір X є зв'язним.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку x_0 топологічного простору X і для кожної точки $x \in X$ через C_x позначимо довільний зв'язний підпростір простору X, який з'єднує точки x_0 і x. Сім'я $\{C_x\}_{x\in X}$ задовольняє умови наслідку 3.7.12 і $\bigcup\limits_{x\in X} C_x = X$. □

З означення зв'язності топологічного простору випливає, що жодна нетривіальна сума топологічних просторів не є зв'язним простором.

Теорема 3.7.16. *Добуток топологічних просторів $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є зв'язним простором тоді і тільки тоді, коли всі топологічні простори X_s, $s \in \mathcal{S}$, зв'язні.*

Доведення. Якщо добуток топологічних просторів $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є зв'язним простором, то всі простори X_s, $s \in \mathcal{S}$, зв'язні за теоремою 3.7.5, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s для довільного $s \in \mathcal{S}$.

Доведемо тепер, що добуток зв'язних топологічних просторів є зв'язним простором. Спочатку розглянемо добуток $X \times Y$ двох зв'язних просторів X і Y. Довільні дві точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) топологічного простору $X \times Y$ можна з'єднати множиною $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$. Ця множина зв'язна, як об'єднання двох пзв'язних множин, які перетинаються. Отже, топологічний простір $X \times Y$ зв'язний за наслідком 3.7.15.

Ми пропонуємо довести читачеві прямими міркуваннями за індукцією, що добуток довільної скінченної кількості зв'язних просторів є зв'язним простором.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ непорожніх зв'язних топологічних просторів і зафіксуємо при кожному $s \in \mathcal{S}$ точку $a_s \in X_s$. Позначимо через $\mathscr{T}$ сім'ю всіх скінченних підмножини множини $\mathcal{S}$ і для кожного $T \in \mathscr{T}$ покладемо

$$C_T = \prod_{s\in\mathcal{S}} A_s,$$

де

$$A_s = \begin{cases} \{a_s\}, & \text{якщо } s \notin T; \\ X_s, & \text{якщо } s \in T. \end{cases}$$

Оскільки добуток довільної скінченної кількості зв'язних просторів є зв'язним простором, то $\{C_T\}_{T\in\mathscr{T}}$ — сім'я зв'язних просторів. Позаяк

$$a = \{a_s\} \in \bigcap_{T\in\mathscr{T}} C_T \neq \varnothing,$$

то з наслідку 3.7.12 випливає, що об'єднання $C = \bigcup\limits_{T\in\mathscr{T}} C_T$ є зв'язним простором. Але C — щільний підпростір добутку $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$. Залишається застосувати наслідок 3.7.14. □

Наслідок 3.7.17. *Евклідовий n-простір $\mathbb{R}^n$ і тихоновський куб $\mathbb{I}^{\mathfrak{m}}$ є зв'язними просторами.*

Вправа 3.7.1. Доведіть методом математичної індукції, що скінченний добуток топологічних просторів $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, де $X_i \neq \varnothing$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$, є зв'язним простором тоді і тільки тоді, коли всі топологічні простори X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, зв'язні.

Очевидно, що фактор-простір зв'язного топологічного простору X є завжди зв'язним, оскільки є неперервним відображенням простору X.

Бібліоґрафія

[1] Р. Энгелькинг, Общая топология, Мир, Москва, 1986, 750с.

[2] R. Engelking, General topology, Heldermann, 1989.

[3] *Lipschutz S.* Theory and problems of general topology. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1965. — 238 p.

Предметний покажчик