Операції над компактними просторами

Топологія

Лекція 20

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору.

Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{i} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1) = \overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2) = \overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

Обговоримо спочатку задачі, які пов'язані з переходом до підпростору. Зауважимо спочатку, що компактність в класі гаусдорфових просторів успадковується при переході до замкнених і лише замкнених підпросторів.

Наступна теорема дає критерій того, що неперервне відображення в компакт можна продовжити.

Теорема 3.6.26

Нехай A — щільний підпростір топологічного простору X і f — неперервне відображення простору A в компакт Y. Відображення f можна неперервно продовжити на весь простір X тоді і лише тоді, коли для кожної пари B_1, B_2 диз'юнктних замкнених у компактному просторі Y множин замикання їх прообразів $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ у топологічному просторі X не перетинаються.

Доведення. Нехай $F\colon X \to Y$ — неперервне продовження відображення f. Якщо

$$B_1 = \overline{B_1} \subset Y, \qquad B_2 = \overline{B_2} \subset Y \qquad \text{і} \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то

$$F^{-1}(B_1)=\overline{F^{-1}(B_1)} \subset X,\ F^{-1}(B_2)=\overline{F^{-1}(B_2)} \subset X \text{ і } F^{-1}(B_1)\cap F^{-1}(B_2) = \varnothing,$$

а, отже,

$$\overline{f^{-1}(B_1)} \cap \overline{f^{-1}(B_2)} \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \varnothing.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю
$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$
замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення
$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$
то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що
$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$
а, отже,
$$X = W_1 \cup W_2,$$
де
$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{ \overline{f(A \cap U)} \right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

Лекція 20: Операції над компактними просторами

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

(⇒) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю
$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$
замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що
$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$
а, отже,
$$X = W_1 \cup W_2,$$
де
$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

$(\Rightarrow)$ Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

$(\Rightarrow)$ Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

Лекція 20: Операції над компактними просторами

(⇒) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \dots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

$(\Rightarrow)$ Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \quad \text{і} \quad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

($\Rightarrow$) Для кожної точки $x \in X$ позначимо через $\mathscr{B}(x)$ сім'ю всіх відкритих околів точки x у топологічному просторі X. Розглянемо сім'ю

$$\mathscr{F}(x) = \left\{\overline{f(A \cap U)}\right\}_{U \in \mathscr{B}(x)}$$

замкнених множин у компактному просторі Y.

Оскільки для $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}(x)$ виконується включення

$$\overline{f(A \cap U_1 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)} \subseteq \overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)}, \quad (1)$$

то сім'я $\mathscr{F}(x)$ є центрованою. За теоремою 3.6.5 перетин $F(x) = \bigcap \mathscr{F}(x)$ є непорожнім для довільної точки $x \in X$.

Доведемо, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки. Звідси буде випливати, зокрема, що $F(x) = \{f(x)\}$ для всіх точок $x \in A$. Нехай $y_1, y_2 \in F(x)$ і $y_1 \neq y_2$. Оскільки за теоремою 3.6.13 кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний, то існують відкриті околи V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 у компактному просторі Y, відповідно, такі, що $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. За умовою теореми маємо, що

$$\overline{f^{-1}(V_1)} \cap \overline{f^{-1}(V_2)} = \varnothing,$$

а, отже,

$$X = W_1 \cup W_2,$$

де

$$W_1 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_1)} \qquad \text{і} \qquad W_2 = X \setminus \overline{f^{-1}(V_2)}.$$

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то
$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$
звідки випливає, що
$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$
Аналогічно доводиться, що
$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$
Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Тоді $x \in W_1$ або $x \in W_2$. Оскільки $V_1 \cap f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)}) = \varnothing$ і множина V_1 — відкрита в компакті Y, то

$$V_1 \cap \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \varnothing,$$

звідки випливає, що

$$y_1 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_1)})} = \overline{f(A \cap W_1)} \in \mathscr{F}(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$y_2 \notin \overline{f(A \setminus \overline{f^{-1}(V_2)})} = \overline{f(A \cap W_2)} \in \mathscr{F}(x).$$

Отримали протиріччя, з якого випливає, що множина $F(x)$ складається рівно з однієї точки.

Поставивши у відповідність кожній точці $x \in X$ точку $F(x)$, ми визначимо відображення F топологічного простору X у компакт Y, як продовження відображення f. Залишилось довести, що відображення F — неперервне. Доведемо, що відображення F задовольняє умову (3) теореми 3.3.4:

(3) $f^{-1}(U) \in \tau_X$ для довільного елемента U передбази $\mathscr{P}_Y$ топології τ_Y.

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in S} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq S$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Лекція 20: Операції над компактними просторами

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U\in\mathscr{B}(x)} \overline{f(A\cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A\cap U_1)} \cap \overline{f(A\cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A\cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A\cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s\in S} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq S$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \dots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in S} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq S$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in S}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in S} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq S$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \dots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U\in\mathscr{B}(x)} \overline{f(A\cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A\cap U_1)} \cap \overline{f(A\cap U_2)} \cap \dots \cap \overline{f(A\cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A\cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки

$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$

то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що

$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \cdots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$

Очевидно, що

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$

і з умов (1) і (2) випливає, що

$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$

для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Нехай V — відкритий окіл точки $F(x)$ у компактному просторі Y. Оскільки
$$\{F(x)\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B}(x)} \overline{f(A \cap U)} \subseteq V,$$
то з наслідку 3.6.9 випливає, що існує скінченна сім'я $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathscr{B}(x)$ така, що
$$\overline{f(A \cap U_1)} \cap \overline{f(A \cap U_2)} \cap \dots \cap \overline{f(A \cap U_n)} \subseteq V. \tag{2}$$
Очевидно, що
$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = U \in \mathscr{B}(x),$$
і з умов (1) і (2) випливає, що
$$F(x') \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq V$$
для кожної точки $x' \in U$, тобто $F(U) \subseteq V$. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s \in \mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що
$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ■

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s \in \mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s \in \mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.
Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ■

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^n$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ■

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ■

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ■

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Єдина теорема, яка стосується операції суми компактних просторів, є такою:

Теорема 3.6.27

Сума $\bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ при $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактами (відп., компактними) і множина $\mathcal{S}$ скінченна.

Доведення. Якщо сума $X = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є компактним простором, то всі простори X_s є компактними, як замкнені підпростори топологічного простору X, і множина $\mathcal{S}$ є скінченною, оскільки в протилежному випадку відкрите покриття $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ не містило б скінченне підпокриття.

Навпаки, якщо $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — скінченна сім'я компактів (компактних просторів), то сума

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

є компактом (компактним простором) за вправою 3.5.8 і наслідком 3.6.8. ∎

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathscr{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathscr{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathscr{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s : X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1]Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s : X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s\colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1]Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1] Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s \colon X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1]Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Розглянемо тепер операцію (декартового) добутку топологічних просторів. Наступна теорема є основною в цьому відношенні та вона є однією з головних теорем загальної топології.

Теорема 3.6.28 (теорема Тихонова)

Добуток $\prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, є компактом (компактним простором) тоді і лише тоді, коли компактами (відп., компактними просторами) є всі простори X_s.

Доведення. Нехай добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є непорожнім компактом. Тоді з вправи 3.5.13 випливає, що всі простори X_s є гаусдорфовими, і за теоремою 3.6.14 всі простори X_s є компактними просторами, оскільки проекція $p_s : X \to X_s$ є неперервним відображенням топологічного простору X на простір X_s.

Розглянемо тепер довільну сім'ю $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ компактів. За вправою 3.5.13 (декартовий) добуток $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$ є гаусдорфовим простором. Розглянемо довільну центровану сім'ю $\mathscr{F}_0$ замкнених підмножин топологічного простору X. З леми Цорна[1] випливає, що сім'я $\mathscr{F}_0$ міститься в деякій максимальній центрованій сім'ї $\mathscr{F}$ множин топологічного простору X.

[1]Насправді, цей факт випливає з твердження еквівалентного лемі Цорна, чи аксіоми вибору, а саме з принципу максимальності Гаусдорфа, чи леми Тейхмюллера-Тьюкі.

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова
$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$
З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо
$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$
і
$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$
Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка
$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$
Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто
$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$
З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Лекція 20: Операції над компактними просторами

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ∎

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ∎

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ∎

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ■

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ∎

Для того, щоб довести, що $\bigcap \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, достатньо знайти точку $x \in X$, для якої виконується умова

$$x \in \overline{A} \qquad \text{для всіх} \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{3}$$

З максимальності сім'ї $\mathscr{F}$ отримуємо

$$\text{якщо} \qquad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{F}, \qquad \text{то} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{F}, \tag{4}$$

і

$$\text{якщо } A_0 \subset X \text{ і } A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ для кожного } A \in \mathscr{F}, \text{ то } A_0 \in \mathscr{F}. \tag{5}$$

Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то сім'я $\mathscr{F}_s = \left\{\overline{p_s(A)}\right\}_{A \in \mathscr{F}}$ також є центрованою для всіх індексів $s \in \mathcal{S}$. Отже, для кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ існує точка

$$x_s \in \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s. \tag{6}$$

Нехай W_s — довільний відкритий окіл точки x_s у компактному просторі X_s. З умови (6) випливає, що $W_s \cap p_s(A) \neq \varnothing$ для всіх $A \in \mathscr{F}$, тобто

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{для кожного} \qquad A \in \mathscr{F}.$$

З умови (5) отримуємо, що $p_s^{-1}(W_s) \in \mathscr{F}$, а з умови (4) випливає, що всі члени канонічної бази топологічного простору X, які містять точку $x = \{x_s\}$, належать сім'ї $\mathscr{F}$. Оскільки сім'я $\mathscr{F}$ центрована, то кожен її елемент A перетинає всі елементи канонічної бази простору X, які містять точку x, а з цього випливає умова (3). ∎

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$
\begin{aligned}
&p_1 \colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\
&p_2 \colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&p_n \colon X_n \times Y \to Y.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{aligned} p_1 &: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ p_2 &: X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_n &: X_n \times Y \to Y. \end{aligned}$$

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{aligned} p_1 &\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ p_2 &\colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_n &\colon X_n \times Y \to Y. \end{aligned}$$

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{array}{l} p_1\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ p_2\colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_n\colon X_n \times Y \to Y. \end{array}$$

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{array}{l} p_1 \colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ p_2 \colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_n \colon X_n \times Y \to Y. \end{array}$$

Зауважимо, що компактність скінченного добутку компактів можна довести безпосередньо та простіше. Вона випливає також з теореми Куратовського, оскільки для кожного топологічного простору Y проекція $p\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Y$ є замкненим відображенням як композиція замкнених відображень

$$\begin{aligned}
p_1 &\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y, \\
p_2 &\colon X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_3 \times X_4 \times \cdots \times X_n \times Y, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
p_n &\colon X_n \times Y \to Y.
\end{aligned}$$

Дякую за увагу!!!