Компактні простори

Топологія

Лекція 19

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B}=\{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t\in\mathcal{T}$ існує таке $s(t)\in\mathcal{S}$, що $B_t\subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}'=\{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}'\subseteq\mathcal{S}$ і $A'_s=A_s$ для всіх $s\in\mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Лекція 19: Компактні простори

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Лекція 19: Компактні простори

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$

У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.1

Покриттям множини X називається така сім'я $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ її підмножин, що
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} A_s = X.$$
У випадку, коли X — топологічний простір, то покриття $\{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ називається *відкритим* (*замкненим*) *покриттям* простору X, якщо всі множини A_s відкриті (замкнені) в просторі X.

Означення 3.6.2

Покриття $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ множини X називається *подрібненням* іншого покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ цієї ж множини X, якщо для кожного $t \in \mathcal{T}$ існує таке $s(t) \in \mathcal{S}$, що $B_t \subseteq A_{s(t)}$. У цьому випадку ми також будемо говорити, що покриття $\mathscr{B}$ *вписано* в покриття $\mathscr{A}$. Покриття $\mathscr{A}' = \{A'_s\}_{s\in\mathcal{S}'}$ множини X називається *підпокриттям* покриття $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множини X, якщо $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ і $A'_s = A_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}'$. Зокрема, кожне підпокриття є подрібненням.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Лекція 19: Компактні простори

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що
$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Означення 3.6.3

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто якщо для довільного відкритого покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору X існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

Означення 3.6.4

Сім'я $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ множин називається *центрованою*, якщо $\mathscr{F} \neq \varnothing$ і $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_n} \neq \varnothing$ для довільного скінченного набору індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X\setminus F_s$, $s\in\mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X\setminus F_s) = X\setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X\setminus\varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X\setminus F_{s_i}) = X\setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки
$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$
то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,
$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$
звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

Теорема 3.6.5

Топологічний простір X компактний тоді і лише тоді, коли кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай X — компактний простір і $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'я замкнених у топологічному просторі X множин таких, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$.

Розглянемо відкриті множини $U_s = X \setminus F_s$, $s \in \mathcal{S}$. Оскільки

$$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = X \setminus \varnothing = X,$$

то сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям топологічного простору X. Але простір X є компактним, звідки випливає, що покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ містить скінченне підпокриття $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Отже,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

звідки випливає, що $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{s_i} = \varnothing$. Отож, якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених у топологічному просторі X множин центрована, то $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ∎

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ∎

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X\setminus U_s$, $s\in\mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X\setminus U_{s_i}) = X\setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X\setminus U_s) = X\setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X\setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ∎

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ∎

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ∎

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

Лекція 19: Компактні простори

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X\setminus U_s$, $s\in\mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k}(X\setminus U_{s_i}) = X\setminus\bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}}(X\setminus U_s) = X\setminus\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X\setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X\setminus U_s$, $s\in\mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X\setminus U_{s_i}) = X\setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X\setminus U_s) = X\setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X\setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

Лекція 19: Компактні простори

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X \setminus U_s$, $s \in \mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus U_{s_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X \setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

($\Longleftarrow$) Припустимо кожна центрована сім'я замкнених множин у просторі X має непорожній перетин, але топологічний простір X не є компактним. Тоді існує відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X, яке не містить скінченне підпокриття. Розглянемо замкнені множини $F_s = X\setminus U_s$, $s\in\mathcal{S}$. Спочатку переконаємося, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Справді, для довільної скінченної підсім'ї $\{F_{s_1}, F_{s_2}, \ldots, F_{s_k}\}$ у $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ маємо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \bigcap_{i=1}^{k}(X\setminus U_{s_i}) = X\setminus\bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} \neq \varnothing,$$

оскільки відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ простору X не містить скінченне підпокриття. Звідси випливає, що сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ є центрованою. Тоді, оскільки $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — покриття простору X, то

$$\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s = \bigcap_{s\in\mathcal{S}}(X\setminus U_s) = X\setminus\bigcup_{s\in\mathcal{S}} U_s = X\setminus X = \varnothing,$$

а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що X — компактний топологічний простір. ■

Теорема 3.6.6 є безпосереднім наслідком теореми 3.6.5.

Теорема 3.6.6

Кожен замкнений підпростір компактного топологічного простору є компактним.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in S}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup_{s\in S} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathscr{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathscr{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Лекція 19: Компактні простори

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Лекція 19: Компактні простори

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Лекція 19: Компактні простори

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A\subseteq\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}}U_s$, існує скінченна множина $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F=\bigcup\limits_{i=1}^{k}F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i=1,2,\ldots,n$, компактні.

Далі ми доведемо декілька теорем про компактні підпростори довільних топологічних просторів.

З означення топології підпростору випливає

Теорема 3.6.7

Якщо підпростір A топологічного простору X є компактним, то для довільної сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ відкритих у просторі X множин такої, що $A \subseteq \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} U_s$, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Наслідок 3.6.8

Нехай $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — сім'я замкнених підмножин топологічного простору X. Підпростір $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ простору X є компактним тоді і лише тоді, коли всі простори F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, компактні.

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ■

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ∎

Наслідок 3.6.9

Нехай U — відкрита множина в топологічному просторі X. Якщо сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин топологічного простору X містить хоча б одну компактну множину (зокрема, якщо простір X компактний) і якщо $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \subseteq U$, то існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i} \subseteq U.$$

Доведення. Нехай множина F_{s_0} компактна. Замінимо топологічний простір X його підпростором F_{s_0}, множину U — множиною $U \cap F_{s_0}$ і сім'ю $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — сім'єю $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Цією дією ми звели нашу задачу до випадку компактного простору. Отже, ми можемо припускати, що топологічний простір X компактний. Застосувавши теорему 3.6.7 до множин $A = X \setminus U$ та $U_s = X \setminus F_s$, ми отримуємо скінченну множину $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ з необхідною нам властивістю. ■

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що
$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$
Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що
$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$
Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що
$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$
Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що
$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$
Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що
$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$
Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що
$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$
Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Теорема 3.6.10

Якщо A — компактний підпростір регулярного топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існують відкриті множини U і V в просторі X такі, що

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V \qquad \text{і} \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Якщо, крім того, B є компактним підпростором топологічного простору X, то достатньо припускати, що X — гаусдорфовий простір.

Доведення. Оскільки топологічний простір X є регулярним, то для кожної точки $x \in A$ існують відкриті множини U_x і V_x в просторі X такі, що

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{1}$$

Зрозуміло, що $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, а тому за теоремою 3.6.7 існує скінченна підмножина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Легко перевіряється, що множини

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

шукані.

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Зауважимо, якщо множина B є одноточковою, то в доведенні першої частини теореми використовується лише гаусдорфовість топологічного простору X. Якщо множина B є компактним підпростором топологічного простору X, то для кожної точки $x \in A$ ми отримуємо відкриті множини U_x і V_x у топологічному просторі X, які задовольняють умову (1)

$$x \in U_x, \qquad B \subseteq V_x \qquad \text{і} \qquad U_x \cap V_x = \varnothing, \tag{1}$$

застосувавши попереднє зауваження до компактного підпростору B й одноточкової множини $\{x\}$. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0,\tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ∎

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.11

Якщо A — компактний підпростір тихоновського топологічного простору X, то для кожної замкненої множини $B \subseteq X \setminus A$ існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in A$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in B$.

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ існує неперервна функція $f_x\colon X \to \mathbb{I}$ така, що $f_x(x) = 0$ і $f_x(B) \subseteq \{1\}$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, то за теоремою 3.6.7 існує скінченна множина точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i-1}^{n} f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$. Функція $g\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою:

$$g(x) = \min\left\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right\},$$

є очевидно неперервною та задовольняє такі два включення

$$A \subseteq g^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{і} \qquad g(B) \subseteq \{1\}.$$

Легко бачити, що функція $f\colon X \to \mathbb{I}$, означена за формулою

$$f(x) = 2\max\left\{g(x) - \tfrac{1}{2}, 0\right\},$$

має необхідні властивості. ■

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ∎

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ∎

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ■

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.12

Кожен компактний підпростір гаусдорфового простору X є замкненою в просторі X множиною.

Доведення. Нехай A — компактний підпростір гаусдорфового топологічного простору X. За другою частиною теореми 3.6.10 для кожної точки $x \in X \setminus A$ існує відкрита множина $V \subseteq X$ така, що $x \in V$ й $A \cap V = \varnothing$. Отже, множина $X \setminus A$ відкрита в топологічному просторі X. ∎

З другої частини теореми 3.6.10 і теореми 3.6.6 випливає

Теорема 3.6.13

Кожен компактний гаусдорфовий простір нормальний.

У наступних трьох теоремах розглядаються властивості неперервних відображень компактних топологічних просторів.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y=f(X)&=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1})))=\\
&=U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
&Y = f(X) = \\
&\quad = f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&\quad = f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&\quad = U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y=f(X)&=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1})))=\\
&=U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ∎

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X)=\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ∎

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}Y &= f(X) =\\ &= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) =\\ &= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) =\\ &= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned} Y &= f(X)= \\ &= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))= \\ &= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))= \\ &= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1}, \end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X)=\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1}) \cup f^{-1}(U_{s_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A \subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}) \cup f^{-1}(U_{s_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})) \cup f(f^{-1}(U_{s_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&= U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Лекція 19: Компактні простори

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = \\ &= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\ &= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1})) = \\ &= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1}, \end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ∎

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}Y&=f(X)=\\&=f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\&=f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1})))=\\&=U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y = f(X) &= \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y&=f(X)=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&=f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))=\\
&=U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y = f(X) = &\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) =\\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) =\\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\left\{f^{-1}(U_s)\right\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n})=X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B))=B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X)= \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1}))= \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1})))= \\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Теорема 3.6.14

Якщо компактний топологічний простір X неперервно відображається на топологічний простір Y, то Y — компактний простір.

Доведення. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору Y. Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення, то сім'я $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in\mathcal{S}}$ є відкритим покриттям компактного простору X. Отже, існує скінченна множина $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\subset\mathcal{S}$ така, що

$$f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_n}) = X.$$

Оскільки для довільної множини $A\subseteq Y$ виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$, то з рівностей (i) і (x) прикладу 1.2.33 випливає, що

$$\begin{aligned}
Y &= f(X) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1})\cup f^{-1}(U_{s_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{s_1})) = \\
&= f(f^{-1}(U_{s_1}))\cup f(f^{-1}(U_{s_2}))\cup\cdots\cup f(f^{-1}(U_{s_1}))) = \\
&= U_{s_1}\cup U_{s_2}\cup\cdots\cup U_{s_1},
\end{aligned}$$

а отже Y — компактний простір. ■

Іншими словами, теорема 3.6.14 стверджує, що неперервний образ компактного топологічного простору є компактним простором.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ∎

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ∎

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X\to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A\subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X\to Y$ неперервне, то $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ∎

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Лекція 19: Компактні простори

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Лекція 19: Компактні простори

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ∎

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ∎

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.15

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення компактного топологічного простору в гаусдорфовий простір Y, то $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Доведення. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ неперервне, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за теоремою 3.3.4. Обернене включення $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ випливає з означення замикання множини та теорем 3.6.6, 3.6.12 і 3.6.14. ■

З наслідку 3.6.15 безпосередньо випливає

Теорема 3.6.16

Кожне неперервне відображення компактного топологічного простору в топологічний гаусдорфовий простір є замкненим.

З теорем 3.3.4 і 3.6.16 ми отримуємо таку важливу теорему:

Теорема 3.6.17

Кожне неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору на топологічний гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ■

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Наслідок 3.6.18

Нехай τ_1 і τ_2 — дві топології на множині X, і нехай топологія τ_1 сильніша за топологію τ_2. Тоді, якщо топологічний простір (X, τ_1) компактний, а (X, τ_2) є гаусдорфовим простором, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. Тотожне відображення множини X на себе є взаємно однозначним неперервним відображенням топологічного простору (X, τ_1) на простір (X, τ_2). За теоремою 3.6.17 це відображення є гомеоморфізмом. ∎

Іншими словами, наслідок 3.6.18 стверджує, що *серед усіх гаусдорфових топологій компактні топології є мінімальними.*

Тепер ми дамо цікаву характеристику компактних топологічних просторів у термінах декартових добутків.

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Лекція 19: Компактні простори

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що
$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$
Приймемо
$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$
Тоді
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$
що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W.
Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що
$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$
Приймемо
$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$
Тоді
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$
що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що
$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$
Приймемо
$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$
Тоді
$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$
що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ∎

Лема 3.6.19

Якщо A — компактний підпростір топологічного простору X і y — точка топологічного простору Y, то для кожної відкритої множини $W \subseteq X \times Y$, яка містить добуток $A \times \{y\}$, існують відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ точка (x, y) має відкритий окіл у добутку $X \times Y$ вигляду $U_x \times V_x$, який міститься у відкритій множині W. Очевидно, що

$$A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W.$$

Приймемо

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad \text{і} \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Тоді

$$A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \right) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subseteq W,$$

що і завершує доведення леми. ■

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

Теорема 3.6.20 (теорема Куратовського)

Для довільного топологічного простору X такі умови рівносильні:

(i) простір X є компактним;

(ii) для довільного топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням;

(iii) для довільного нормального топологічного простору Y проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай X — компактний простір і F — замкнена множина в добутку $X \times Y$. Зафіксуємо точку $y \notin p_Y(F)$. Оскільки $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$, то з леми 3.6.19 випливає, що в точки y існує такий відкритий окіл V, що $(X \times V) \cap F = \varnothing$. Тоді маємо $p_Y(F) \cap V = \varnothing$, а отже образ $p_Y(F)$ є замкненою множиною в топологічному просторі Y. Отож, проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ є очевидною.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.
З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливаe, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

Лекція 19: Компактні простори

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливаає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що для топологічного простору X виконується властивість (iii). Припустимо протилежне: топологічний простір X не є компактним. Тоді існує центрована сім'я $\{F_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ замкнених підмножин у просторі X така, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y_0 \notin X$ і на множині $Y = X \cup \{y_0\}$ розглянемо топологію, яка складається з усіх підмножин множини X та всіх множин вигляду

$$\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \cdots \cap F_{s_k}) \cup K,$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ і $K \subseteq X$.

З рівності $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s = \varnothing$ випливає, що Y є T_1-простором. Оскільки кожна підмножина топологічного простору Y, яка не містить точку y_0, є відкритою в просторі Y множиною, то топологічний простір Y є нормальним.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ∎

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Лекція 19: Компактні простори

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ∎

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Лекція 19: Компактні простори

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x, x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x, x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathrm{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ∎

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Лекція 19: Компактні простори

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s\in\mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ∎

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $D(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Позаяк топологічний простір X задовольняє умову (iii), то образ стосовно проекції $p_Y(F)$ множини

$$F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$$

є замкненою в топологічному просторі Y множиною. З включення $X \subseteq p_Y(F)$ випливає, що $y_0 \in p_Y(F)$, оскільки $y_0 \in \overline{X} = Y$. Отож, існує точка $x_0 \in X$, для якої $(x_0, y_0) \in F$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 у просторі X і кожного індекса $s \in \mathcal{S}$ маємо

$$(U \times (\{y_0\} \cup F_s)) \cap \{(x,x) \mid x \in X\} \neq \varnothing,$$

тобто $U \cap F_s \neq \varnothing$. Отже, отримуємо, що $x_0 \in F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$, звідки випливає, що $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} F_s \neq \varnothing$, протиріччя. З отриманого протиріччя впливає наша імплікація. ■

Очевидно, що кожен скінченний топологічний простір є компактним.

Приклад 3.6.21

Дискретний простір $\mathbf{D}(\mathfrak{m})$ є компактним тоді і лише тоді коли кардинал $\mathfrak{m}$ — скінченний.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i,i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.22

Дійсна пряма $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією та стрілка Зорґенфрея $(\mathbb{R}, \tau_{ZL})$ не є компактними просторами. Справді, відкрите покриття $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ кожного з цих просторів не містить скінченного підпокриття.

Приклад 3.6.23

Топологічний простір $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ є компактним для довільного кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — відкрите покриття топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$. Тоді існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що єдина точка накопичення x_0 множини $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ належить U_{s_0}. З означення топології простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$ випливає, що множина $\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0}$ скінченна. Нехай

$$\mathbf{A}(\mathfrak{m}) \setminus U_{s_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тоді існують індекси $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ такі, що

$$x_1 \in U_{s_1}, x_2 \in U_{s_2}, \ldots, x_n \in U_{s_n}.$$

Очевидно, що $\{U_{s_i}\}_{i=0}^{n}$ — скінченне підпокриття покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору $\mathbf{A}(\mathfrak{m})$.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло, що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором.

Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором.
Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J.
Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором.
Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором.

Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло, що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором.
Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$. Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.24

Кожен замкнений інтервал $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ є компактним простором. Розглянемо довільне відкрите покриття $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ топологічного простору J. Нехай A — множина всіх точок $x \in J$ таких, що відрізок $[a, x]$ міститься в об'єднанні скінченної кількості елементів сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Достатньо довести, що множина $J \setminus A$ порожня.

Припустимо, що $J \setminus A \neq \varnothing$, і нехай x_0 — точна нижня грань множини $J \setminus A$. Зрозуміло. що $x_0 \in J \setminus A$. Існує індекс $s_0 \in \mathcal{S}$ такий, що $x_0 \in U_{s_0}$. легко бачити, що $a < x_0$. Тому для деякого $y \in [a, x_0)$ виконується включення $(y, x_0] \subseteq U_{s_0}$. З визначення точки x_0 випливає, що $y \in A$.

Отже, $[a, y] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$ для деяких індексів $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$. Звідси випливає, що

$$[a, x_0] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{s_i},$$

отримали протиріччя. З отриманого протиріччя випливає компактність топологічного простору J.

Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).

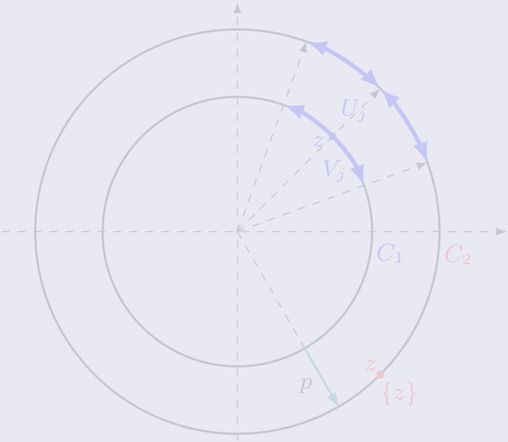
Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).



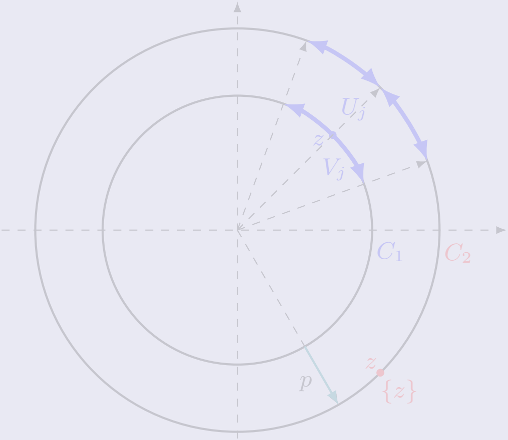
Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).



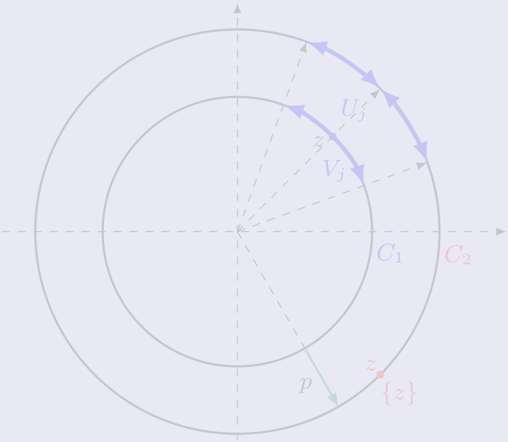
Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).



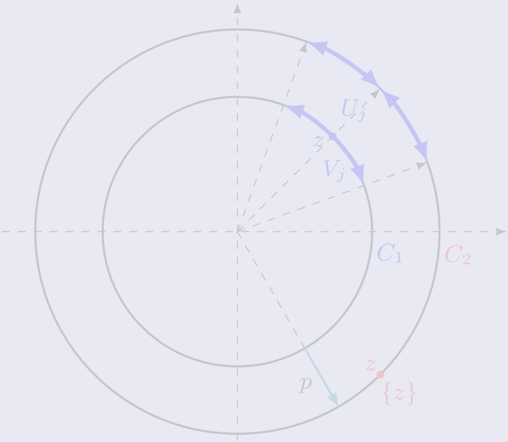
Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).



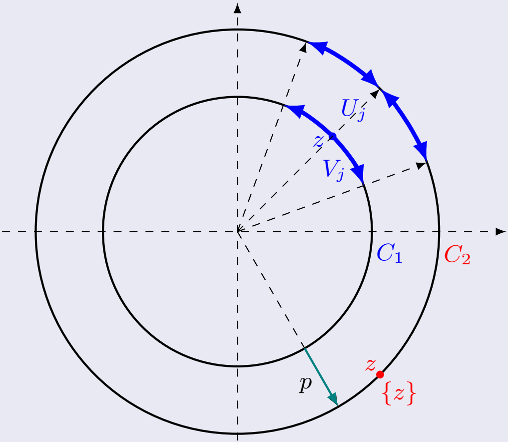
Приклад 3.6.25

Розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ два концентричні кола

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

та їх об'єднання $X = C_1 \cup C_2$ (див. рис.).

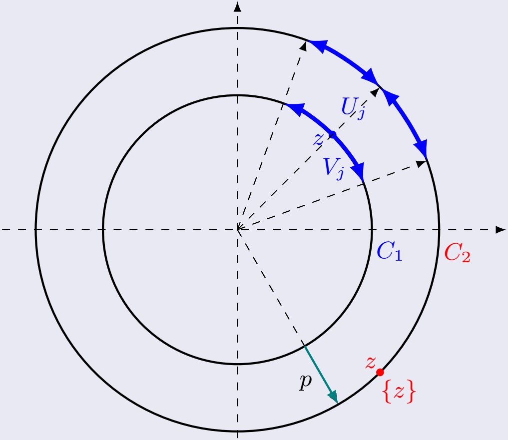


Приклад 3.6.25 (продовження)

Відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо

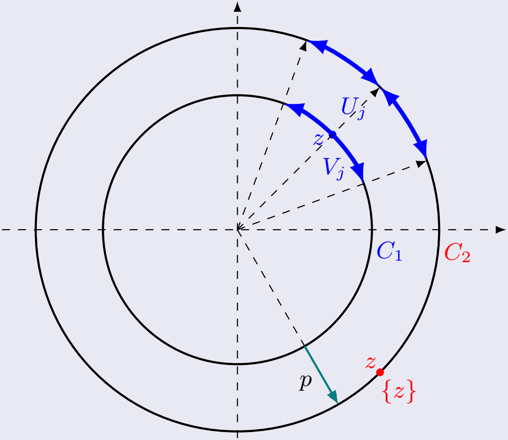
Приклад 3.6.25 (продовження)

Відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо



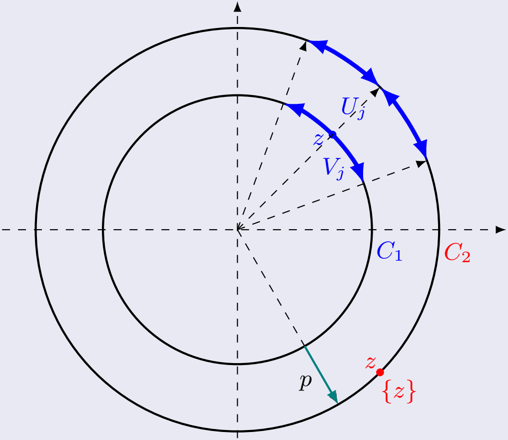
Приклад 3.6.25 (продовження)

Відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо



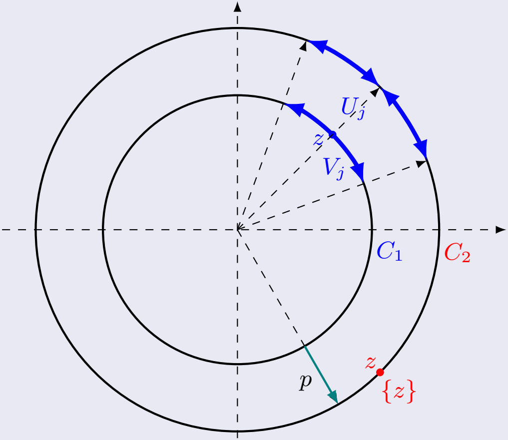
Приклад 3.6.25 (продовження)

Відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо



Приклад 3.6.25 (продовження)

Відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$ будемо позначати через p. На множині X визначимо топологію за допомогою системи околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. А саме приймемо



Приклад 3.6.25 (продовження)

$$\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_1,$$

$$\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_2,$$

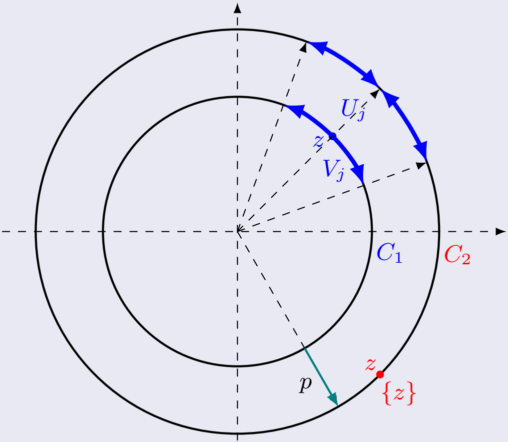
де $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ і V_j — відкрита дуга довжини $1/j$ кола C_1 з серединою в точці z.

Приклад 3.6.25 (продовження)

$$\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_1,$$

$$\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_2,$$

де $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ і V_j — відкрита дуга довжини $1/j$ кола C_1 з серединою в точці z.

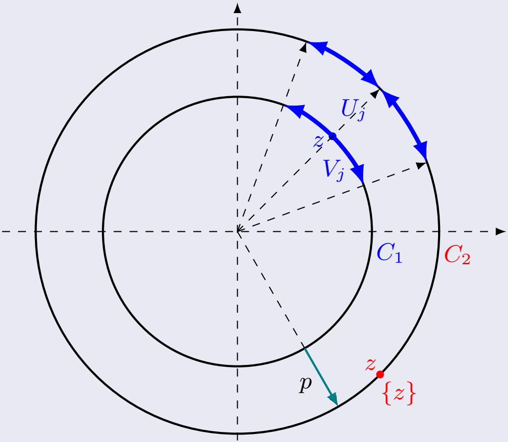


Приклад 3.6.25 (продовження)

$$\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_1,$$

$$\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_2,$$

де $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ і V_j — відкрита дуга довжини $1/j$ кола C_1 з серединою в точці z.

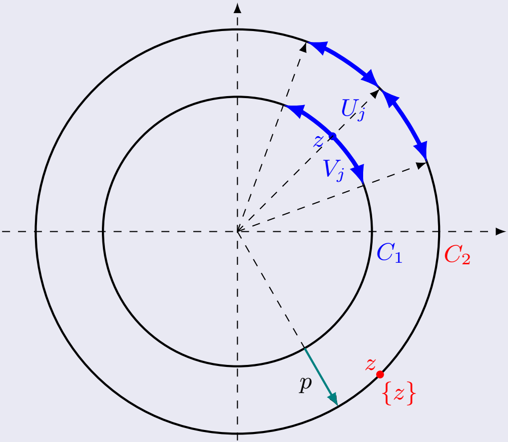


Приклад 3.6.25 (продовження)

$$\mathscr{B}(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_1,$$

$$\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}, \qquad \text{якщо} \quad z \in C_2,$$

де $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$ і V_j — відкрита дуга довжини $1/j$ кола C_1 з серединою в точці z.



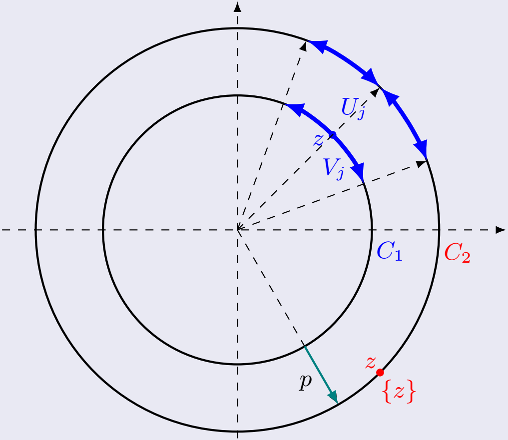
Приклад 3.6.25 (продовження)

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови ($\mathscr{BP}1$), ($\mathscr{BP}2$), ($\mathscr{BP}3$) і ($\mathscr{BP}4$). Отже, за твердженням 3.4.11 множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.

Топологічний простір X має назва *два кола Александрова.*

Приклад 3.6.25 (продовження)

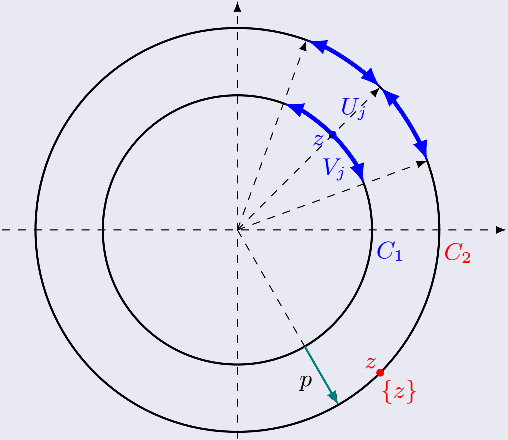
Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$. Отже, за твердженням 3.4.11 множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.



Топологічний простір X має назва *два кола Алєксандрова*.

Приклад 3.6.25 (продовження)

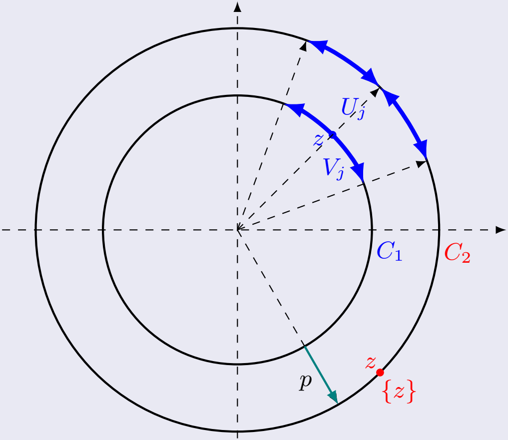
Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$. Отже, за твердженням 3.4.11 множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.



Топологічний простір X має назва *два кола Александрова*.

Приклад 3.6.25 (продовження)

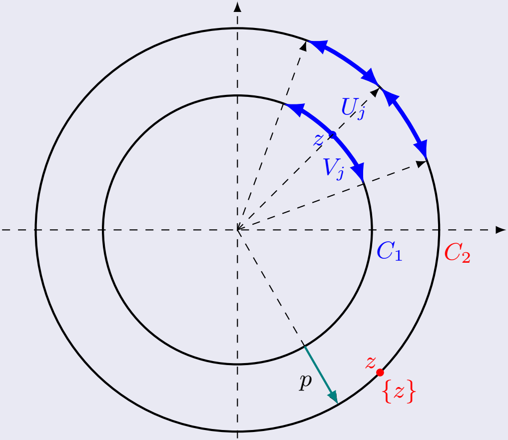
Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$. Отже, за твердженням 3.4.11 множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.



Топологічний простір X має назва *два кола Алєксандрова*.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Легко бачити, що сім'я $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$ задовольняє умови $(\mathscr{BP}1)$, $(\mathscr{BP}2)$, $(\mathscr{BP}3)$ і $(\mathscr{BP}4)$. Отже, за твердженням 3.4.11 множина X з топологією, породженою сім'єю $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$, є гаусдорфовим топологічним простором.



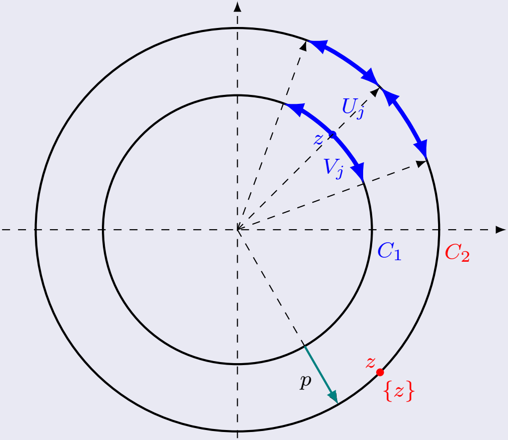
Топологічний простір X має назва *два кола Алєксандрова*.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.

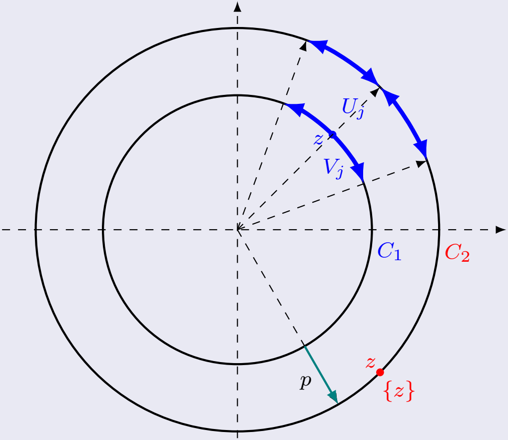
Приклад 3.6.25 (продовження)

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.



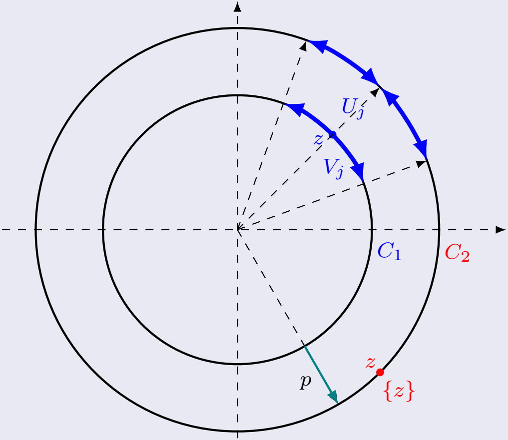
Приклад 3.6.25 (продовження)

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.



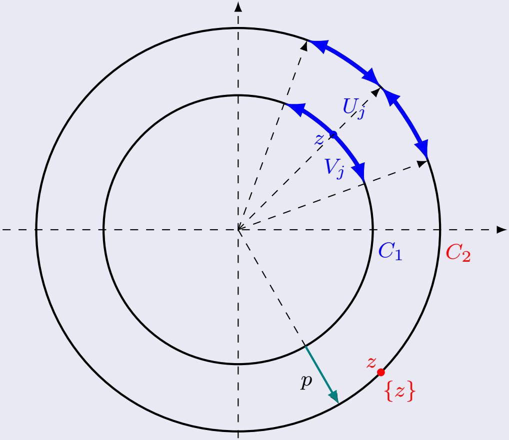
Приклад 3.6.25 (продовження)

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.



Приклад 3.6.25 (продовження)

Підпростір $C_2 \subset X$ є дискретним простором потужності $\mathfrak{c}$, він є відкритим та щільним у топологічному просторі X. Підпростір $C_1 \subset X$ є колом $\mathbb{S}^1$ одиничного радіуса зі звичайною топологією. Простір $\mathbb{S}^1$ є компактним, оскільки є неперервним образом одиничного відрізка $\mathbb{I}$, який є компактним простором.



Приклад 3.6.25 (продовження)

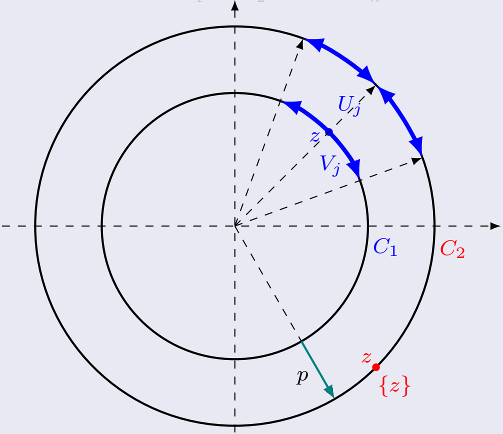
Тепер доведемо, що два кола Александрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$

Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

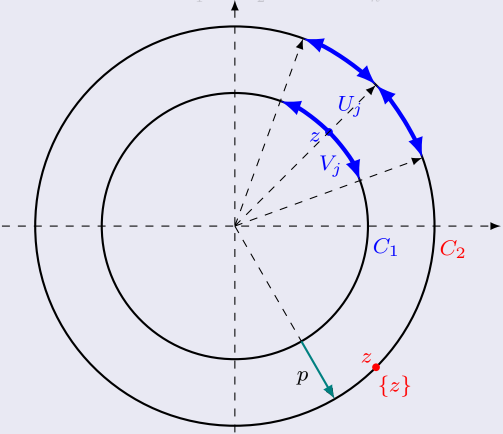
$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Александрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

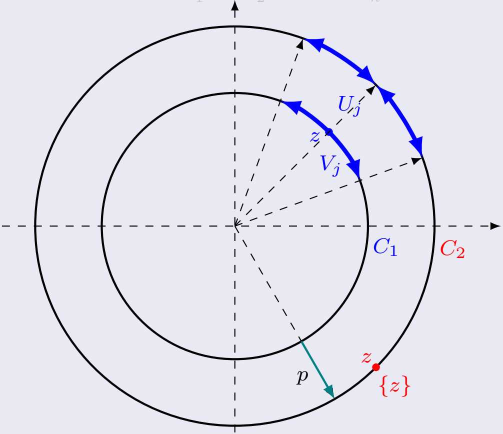
$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \qquad (2)$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

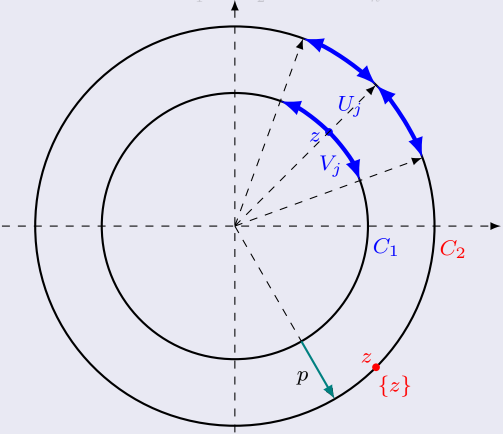
$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

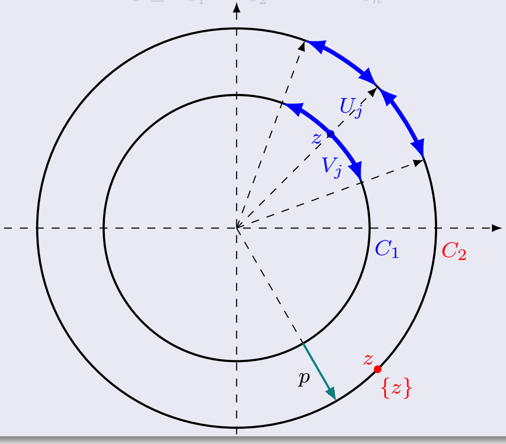
$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

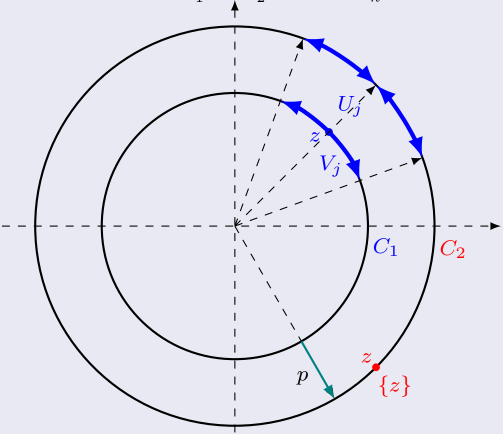
$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Тепер доведемо, що два кола Алєксандрова X є компактним простором. Нехай $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ — довільне відкрите покриття топологічного простору X. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що множини U_s є членами визначеної вище системи відкритих околів $\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in X}$. Оскільки підпростір C_1 є компактним, то існує скінченна множина індексів $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \mathcal{S}$ така, що

$$C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}. \tag{2}$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

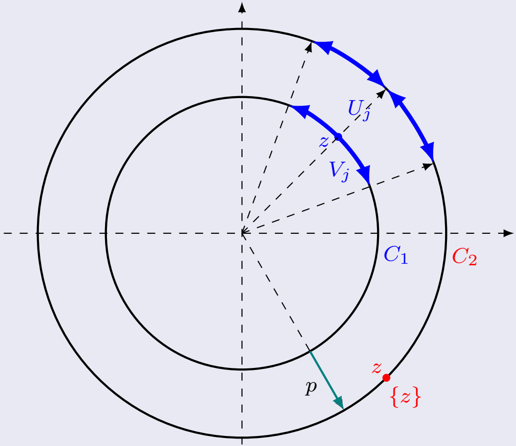
Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Отож, отримуємо

$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \dots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_n}.$$

Приклад 3.6.25 (продовження)

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Отож, отримуємо

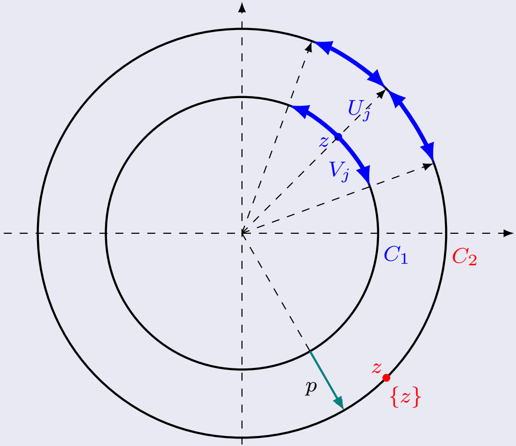
$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \dots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_n}.$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Отож, отримуємо

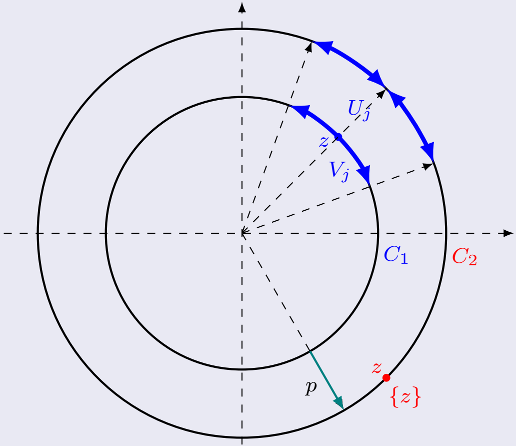
$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Отож, отримуємо

$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

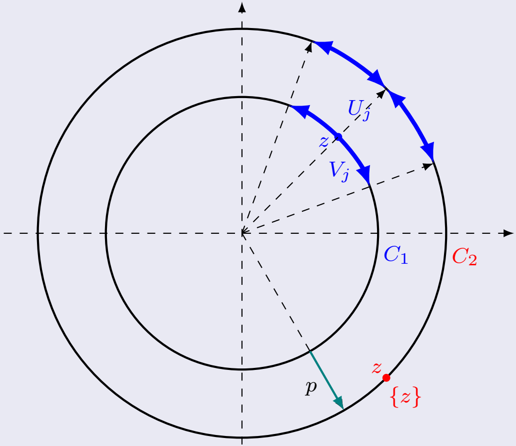


Лекція 19: Компактні простори

Приклад 3.6.25 (продовження)

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Отож, отримуємо

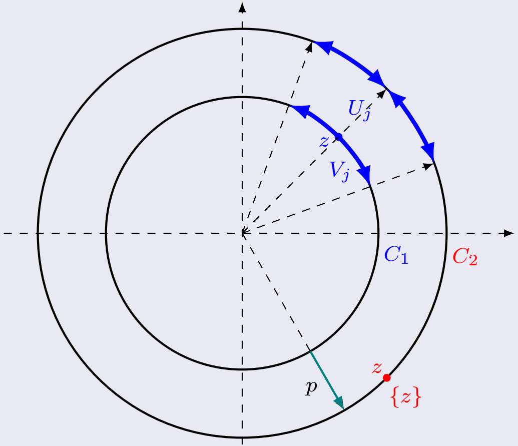
$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Якщо ми відкинемо ті, які стоять праворуч в цьому співвідношенні множини, які є одноточковими, то включення $C_1 \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}$ буде знову виконуватися. Отже, можемо вважати, що $U_{s_i} = U_{j_i}(z_i)$, де $z_i \in C_1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Отож, отримуємо

$$X \setminus \{p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\} \subseteq U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$



Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s_i' \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s_i'}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s_i'}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.

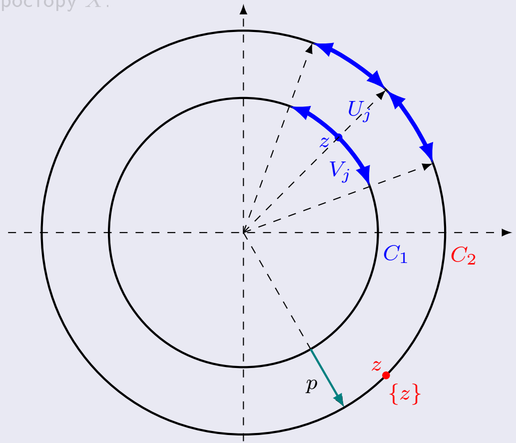
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



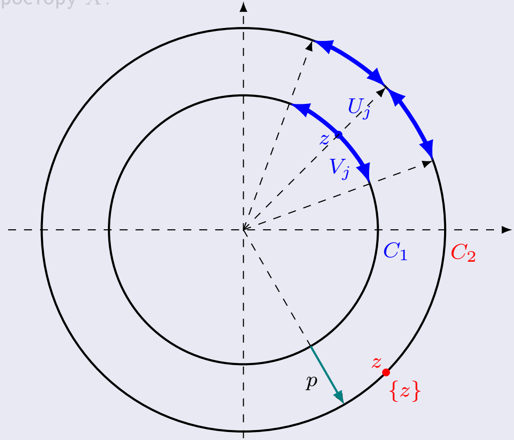
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s_i' \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s_i'}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s_i'}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



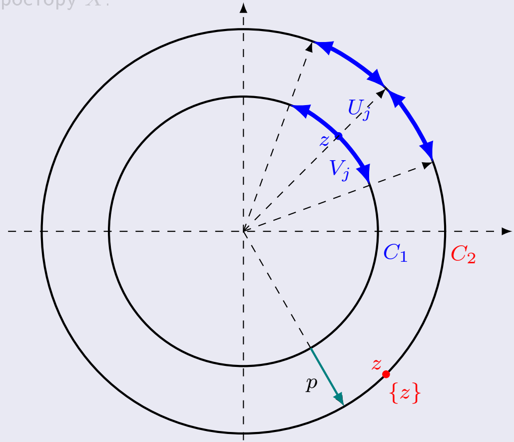
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s_i' \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s_i'}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^n \cup \left\{U_{s_i'}\right\}_{i=1}^n$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



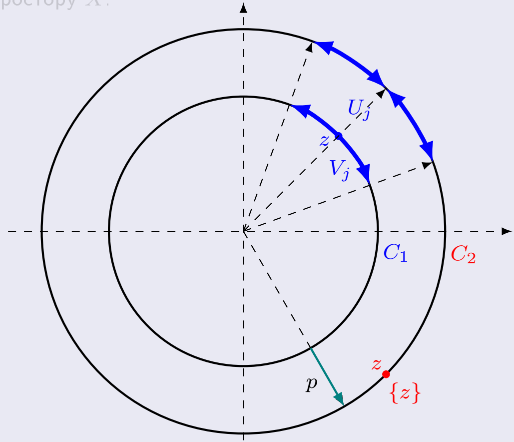
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



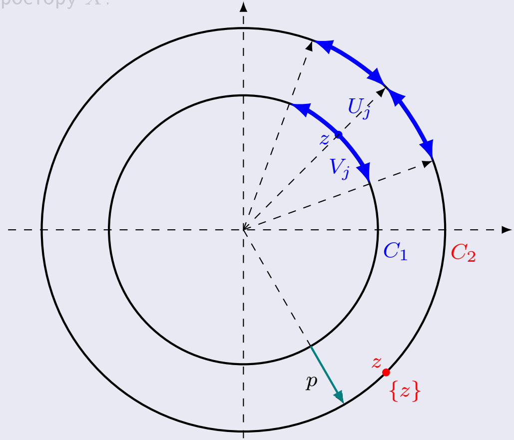
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



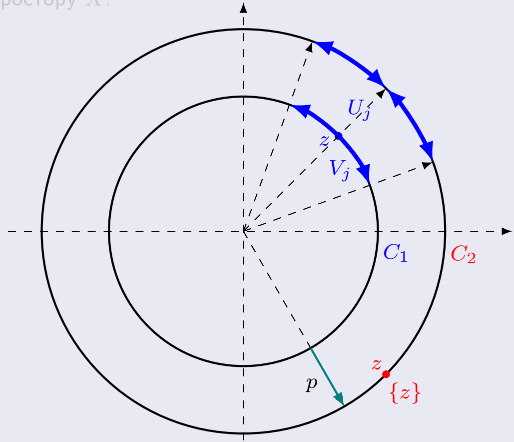
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n} \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^{n}$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



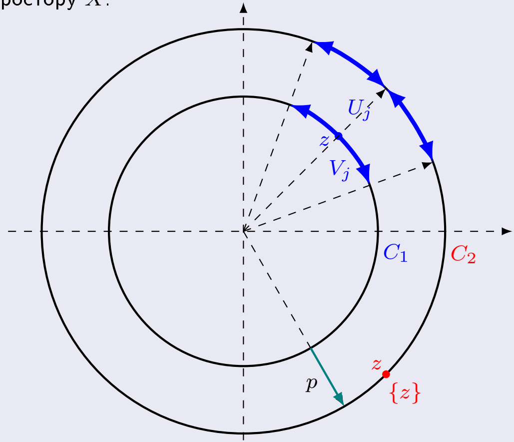
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^n \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^n$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



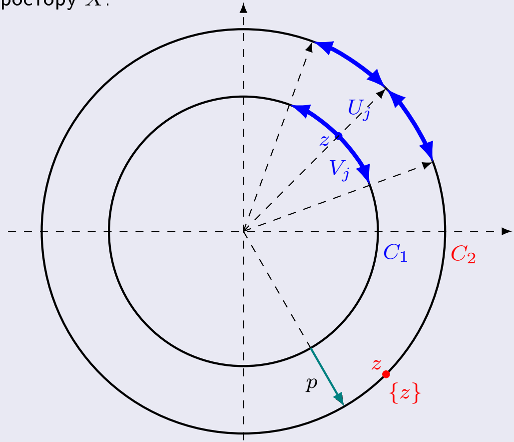
Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Приклад 3.6.25 (продовження)

Для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виберемо індекс $s'_i \in \mathcal{S}$ так, щоб виконувалася умова $p(z_i) \in U_{s'_i}$. Очевидно, що сім'я

$$\{U_{s_i}\}_{i=1}^n \cup \left\{U_{s'_i}\right\}_{i=1}^n$$

є скінченним підпокриттям простору X, вибраним із сім'ї $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, а це доводить компактність простору X.



Надалі *компактами* будемо називати компактні гаусдорфові простори.

Дякую за увагу!!!