Операції на топологічних просторах: Фактор-простори та факторні відображення

Топологія

Лекція 18

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}} : X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}} : X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}} : X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}: X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_\mathcal{E}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_\mathcal{E}$ — природне відображення, де $[x]_\mathcal{E}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_\mathcal{E}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_\mathcal{E}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_\mathcal{E}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_\mathcal{E}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_\mathcal{E}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_\mathcal{E}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_\mathcal{E}^{-1}(F)$. ∎

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E} \setminus F) = X \setminus \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності на множині X. Позначимо через $X/\mathcal{E}$ фактор-множину за відношенням еквівалентності $\mathcal{E}$, а через $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ — природне відображення, де $[x]_{\mathcal{E}}$ — клас еквівалентності за відношенням $\mathcal{E}$, що містить елемент x. Шукаючи "хорошу" топологію на множині $X/\mathcal{E}$ природно було б вимагати, щоб відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ було б неперервним. У класі всіх топологій на фактор-множині $X/\mathcal{E}$, стосовно яких відображення $\pi_{\mathcal{E}}$ є неперервним існує найсильніша топологія. Ця топологія — це сім'я усіх множин $U \subseteq X/\mathcal{E}$ таких, що множина $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X. Така топологія називається *фактор-топологією*, фактор-множина $X/\mathcal{E}$ з визначеною на ній фактор-топологією, називається *фактор-простором*, а відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — *природним факторним відображенням*, або коротко *природним відображенням*.

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Доведення. Твердження випливає з рівності $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(X/\mathcal{E}\setminus F) = X\setminus\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ∎

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}} \colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ∎

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}} : X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}} : X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}} : X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}: X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Твердження 3.5.40

Відображення f фактор-простору $X/\mathcal{E}$ в топологічний простір Y є неперервним тоді і лише тоді, коли неперервна композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$.

Доведення. Очевидно, якщо f — неперервне відображення, то композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням.

Навпаки, припустимо, що композиція $f\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ також є неперервним відображенням. Тоді для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ множина

$$(f\pi_{\mathcal{E}})^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f^{-1}(U))$$

відкрита в топологічному просторі X, а це означає, що $f^{-1}(U)$ — відкрита підмножина фактор-простору $X/\mathcal{E}$, тобто f — неперервне відображення. ■

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X\to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X\to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X\to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y))=y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X=\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y=\mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X\to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X\to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X\to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y))=y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X=\mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y=\mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\left\{f^{-1}(y)\right\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\
& X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Нехай X і Y — топологічні простори та $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення. Розглянемо відношення еквівалентності $\mathcal{E}(f)$ на множині X, яке визначається розкладом $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ простору X на прообрази одноточкових підмножин простору Y при відображенні f. Відображення $f\colon X \to Y$ можна зобразити як композицію $\overline{f}\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}(f)}\colon X \to X/\mathcal{E}(f)$ — природне відображення, а $\overline{f}$ — відображення фактор-простору $X/\mathcal{E}(f)$ на Y, яке визначається за формулою $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$. Відображення $\overline{f}$ неперервне за твердженням 3.5.40. Наступна діаграма наочно ілюструє сказане вище:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{E}(f)}"'] & & Y \\ & X/\mathcal{E}(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Очевидно, що $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, але це відображення, в загальному випадку, не є гомеоморфізмом. Справді, якщо f — взаємно однозначне відображення дискретного простору $X = \mathbf{D}(\mathfrak{c})$ на одиничний інтервал $Y = \mathbb{I}$, то фактор-простір $X/\mathcal{E}(f)$ є також дискретним простором, а тому відображення $\overline{f}$ не є гомеоморфізмом. Тепер ми спробуємо вивчити клас усіх таких відображень f, що відображення $\overline{f}$ є гомеоморфізмом. Виявляється, ці відображення породжують сумісне узагальнення замкнених і відкритих відображень серед сюр'єктивних відображень.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $f\colon X/E(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

- (i) відображення f є факторним;
- (ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;
- (iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;
- (iv) відображення $f\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сюр'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $f\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сюр'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\hat{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $f\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E}\to Y$, що $f=f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}: X\to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X\to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f)\to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i)\Rightarrow(ii)$ Нехай $f\colon X\to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f=f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E}\to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}: X\to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U)=\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E}\to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

- (i) відображення f є факторним;
- (ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;
- (iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;
- (iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

- (i) відображення f є факторним;
- (ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;
- (iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;
- (iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;
(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;
(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;
(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X на простір Y називається *факторним*, або *фактор-відображенням*, якщо f є композицією природного відображення та деякого гомеоморфізму, тобто якщо існує таке відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на множині X і такий гомеоморфізм $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$, що $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення.

Твердження 3.5.41

Для неперервного сур'єктивного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y такі умови еквівалентні:

(i) відображення f є факторним;

(ii) множина $f^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина U відкрита в просторі Y;

(iii) множина $f^{-1}(F)$ замкнена в топологічному просторі X тоді і лише тоді множина F замкнена в просторі Y;

(iv) відображення $\overline{f}\colon X/\mathcal{E}(f) \to Y$ є гомеоморфізмом.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Нехай $f\colon X \to Y$ — фактор-відображення. Тобто $f = f'\pi_{\mathcal{E}}$, де $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, а $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — природне відображення. За означенням фактор-топології множина $f^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(f')^{-1}(U)$ відкрита в топологічному просторі X тоді і лише тоді, коли множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$. Оскільки $f'\colon X/\mathcal{E} \to Y$ — гомеоморфізм, то множина $(f')^{-1}(U)$ відкрита в фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли U — відкрита множина в топологічному просторі Y.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ∎

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ∎

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ∎

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ∎

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi_{\mathcal{E}(f)}^{-1}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності
$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина
$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$
замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ∎

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$
— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. □

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає безпосередньо з рівності

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F).$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Оскільки $\overline{f}$ — взаємно однозначне неперервне відображення топологічного простору $X/\mathcal{E}(f)$ на простір Y, то за твердженням 3.3.30 достатньо довести, що для довільної замкненої множини $F \subseteq X/\mathcal{E}(f)$ множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y. Але множина

$$f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}_{\mathcal{E}(f)}(F)$$

замкнена в топологічному просторі X, а тому множина $\overline{f}(F)$ — замкнена в топологічному просторі Y за умовою (iii).

Імплікація $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. ■

Наслідок 3.5.42

Композиція двох фактор-відображень є фактор-відображенням.

Наслідок 3.5.43

Нехай композиція gf неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням. Тоді $g\colon Y \to Z$ є фактор-відображенням.

Доведення. Очевидно, що $g(Y) = Z$, оскільки $(gf)(X) = Z$. Якщо прообраз $g^{-1}(U)$ множини $U \subseteq Z$ є відкритим в топологічному просторі Y, то

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$$

— відкрита множина в топологічному просторі X, і тоді U — відкрита множина в топологічному просторі Z, оскільки gf — фактор-відображення. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ∎

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. $\square$

Вправа 3.5.16

Наведіть приклад неперервних відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ топологічних просторів таких, що композиція gf є фактор-відображенням, але відображення f, навіть якщо воно є сюр'єктивним, не є факторним.

З наслідку 3.5.43 і рівності $f|A = f\,\mathrm{i}_A$ випливає

Наслідок 3.5.44

Якщо для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y існує такий підпростір $A \subset X$, що $f(A) = Y$ і звуження $f|A\colon A \to Y$ є фактор-відображенням, то f — фактор-відображення.

Наслідок 3.5.45

Кожне взаємно однозначне фактор-відображення є гомеоморфізмом.

Наслідок 3.5.46

Неперервні замкнені та відкриті сюр'єктивні відображення є фактор-відображеннями.

Доведення. Якщо $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення, то $ff^{-1}(B) = B$ для довільної множини $B \subseteq Y$. ■

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відкритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множини $A \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відкритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множини $A \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множини $F \subseteq X$

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множини $U \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ∎

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(*i*) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(*ii*) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$

(*iii*) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відкритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх непертинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ∎

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ∎

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Останній наслідок 3.5.46 породжує таке запитання: *як охарактеризувати ті відношення еквівалентності, для яких природне фактор-відображення є замкненим або відритим?* На це запитання відповідає таке твердження:

Твердження 3.5.47

Для відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X такі умови еквівалентні:

(i) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$ — замкнене (відкрите);

(ii) для довільної замкненої (відкритої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх неперетинних з ним класів еквівалентності, є замкненою (відкритою) підмножиною в просторі X;

(iii) для довільної відкритої (замкненої) множина $A \subseteq X$ об'єднання всіх класів еквівалентності, які містяться в ній, є відкритою (замкненою) підмножиною в просторі X.

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ випливає твердження 3.5.39 та означення фактор-топології.

Еквіваленція $(ii) \Leftrightarrow (ii)$ є безпосереднім наслідком законів де Моргана. ■

Твердження 3.5.39

Множина F у фактор-просторі $X/\mathcal{E}$ замкнена тоді і лише тоді, коли $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(F)$ — замкнена підмножина в топологічному просторі X.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін “ототожнення”: кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін “ототожнення”: кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін “ототожнення”: кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін “ототожнення”: кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін "ототожнення": кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Наслідок 3.5.48

Фактор-відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X і Y замкнене (відкрите) тоді і лише тоді, коли множина $f^{-1}f(A) \subseteq X$ замкнена (відкрита) для довільної замкненої (відкритої) множини $A \subseteq X$.

Відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на топологічному просторі X називається *замкненим* (*відкритим*), якщо замкнене (відкрите) природне відображення $\pi_{\mathcal{E}}\colon X \to X/\mathcal{E}$. Умови (ii) і (iii) твердження 3.5.47 дають внутрішню характеристику замкнених і відкритих відношень еквівалентності. З умови (ii) випливає, що класи еквівалентності замкненого відношення еквівалентності на топологічному T_1-просторі є замкненими множинами.

Добре відомо, що існує взаємна однозначна відповідність між відношеннями еквівалентності на деякій множині та розбиттям цієї множини не неперетинні підмножини. Інколи зручно зразу ж користуватися розбиттями, а не відношеннями еквівалентності. Розбиття, яке відповідає замкненим (відкритим) відношенням еквівалентності, називаються *напівнеперервними зверху* (*знизу*). У цьому контексті також використовують термін “ототожнення”: кажуть, що фактор-простір $X/\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — відношення еквівалентності, яке відповідає розбиттю $\mathscr{E}$, отримується ототожненням кожного елемента розбиття $\mathscr{E}$ з деякою точкою.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.49

Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ за формулою
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$
Очевидно, що для точок $x, y \in \mathbb{R}$ маємо $x\mathcal{E}(f)y$ тоді і лише тоді, коли різниця $x - y$ — ціле число. При відображенні f дійсна пряма $\mathbb{R}$ "намотується" на одиничне коло $\mathbb{S}^1$ таким чином, що кожен інтервал $(x, y]$ довжини 1 обходить все коло рівно один раз, тобто на цьому інтервалі відображення f є взаємно однозначним. Також очевидно, що відображення f переводить відкриті інтервали (x, y), де $y - x < 1$, на відкриті хорди (дуги) одиничного кола $\mathbb{S}^1$, а, отже, f є відкритим і більше того факторним відображенням. Звідси випливає, що фактор-простір $\mathbb{R}/\mathcal{E}(f)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$.

Вправа 3.5.17

Доведіть, що відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, визначене в прикладі 3.5.49, не є замкненим.

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49. Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I}\to\mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0<x<1$, і множини $\{0,1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x,y\in\mathbb{Z}$ або $x=y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z=\pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0,1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_\mathbb{Z} = \Delta_\mathbb{R} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_\mathbb{Z}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_\mathbb{Z}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0,1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ — відображення, означене в прикладі 3.5.49.

Звуження $g = f|\mathbb{I}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ відображення f, і це ми пропонуємо перевірити читачеві самостійно, є замкненим, але не є відкритим відображенням. Зокрема, g — фактор-відображення та фактор-простір $\mathbb{I}/\mathcal{E}(g)$ гомеоморфний одиничному колу $\mathbb{S}^1$. Розбиття замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$, яке відповідає відношенню еквівалентності $\mathcal{E}(g)$, складається з усіх одноточкових множин $\{x\}$, де $0 < x < 1$, і множини $\{0, 1\}$. Таким чином, фактор-простір $\mathbb{S}^1$ отримується ототожненням обох кінців замкненого одиничного відрізка $\mathbb{I}$ в точку.

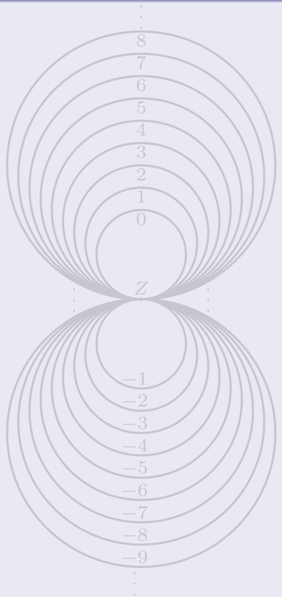
Тепер наведемо приклад топологічного простору, який не має зліченної бази, використавши операцію фактор-простору.

Приклад 3.5.51

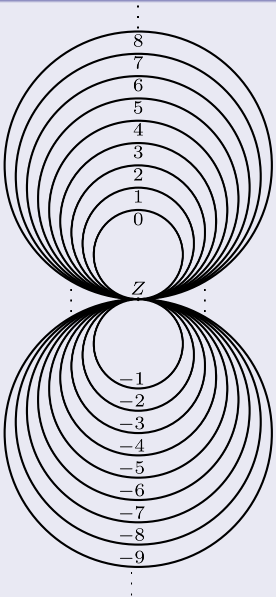
На дійсній прямій $\mathbb{R}$ визначимо відношення $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Очевидно, що $x\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}y$ тоді і лише тоді, коли $x, y \in \mathbb{Z}$ або $x = y$. Очевидно, що $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ — відношення еквівалентності на дійсній прямій $\mathbb{R}$, яке ототожнює цілі точки на $\mathbb{R}$. Схематично фактор-множину $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ можна уявляти як зліченне об'єднання кіл різних радіусів, що мають одну спільну точку $Z = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Z})$ (див. рис.).

Приклад 3.5.50 (продовження)

Приклад 3.5.50 (продовження)



Приклад 3.5.50 (продовження)



Лекція 18: Фактор-простори та факторні відображення

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i,i+1)), \qquad \text{де} \quad i\in\mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}\setminus\{Z\}$ такої, що $M=\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x\in(i,i+1)$, $i\in\mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta,x+\delta)) \mid (x-\delta,x+\delta)\subseteq(i,i+1), \delta\in\mathbb{Q}\right\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z)=\Big\{\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}|<1,\ \delta_{i_j}\in\mathbb{Q}\Big\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j,i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k,\ldots\}$:
$$V\leftrightarrow\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k,\ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z)=\{V_i \mid i\in\mathbb{N}\},$$
де
$$V_i\leftrightarrow\{\delta_{i,1},\delta_{i,2},\ldots,\delta_{i,k},\ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.

Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \left\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \right\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\right\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q}\right\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\right\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.
Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \left\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \right\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$.

Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i - \delta_{i_j}, i + \delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i - \delta_j, i + \delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\right\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q}\right\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом
$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$
Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так
$$\mathscr{B}(M) = \left\{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\right\}.$$
А база топології в точці Z визначається так
$$\mathscr{B}(Z) = \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q}\right\}.$$
Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент
$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$
бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:
$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$
Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто
$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$
де
$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \Big\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i - \delta_{i_j}, i + \delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i - \delta_j, i + \delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$. Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \left\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1,\ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_\mathbb{Z}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_\mathbb{Z}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Занумеруємо ці кола S_i цілими числами за правилом

$$S_i = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}([i, i+1)), \qquad \text{де} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо та опишемо фактор-топологію на фактор-множині $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$.

Очевидно, що для довільної точки $M \in \mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \setminus \{Z\}$ такої, що $M = \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}(x)$, де $x \in (i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, база топології в точці M визначається так

$$\mathscr{B}(M) = \{\pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((x-\delta, x+\delta)) \mid (x-\delta, x+\delta) \subseteq (i, i+1), \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

А база топології в точці Z визначається так

$$\mathscr{B}(Z) = \left\{ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_{i_j}, i+\delta_{i_j})) \mid |\delta_{i_j}| < 1, \ \delta_{i_j} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Оскільки $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, то перенумеруємо кола S_i натуральними числами. Тоді кожен елемент

$$V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}}((i-\delta_j, i+\delta_j))$$

бази $\mathscr{B}(Z)$ ототожнимо з послідовністю $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}$:

$$V \leftrightarrow \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots\}.$$

Припустимо, що існує зліченна база $\mathscr{B}'(Z)$ в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$\mathscr{B}'(Z) = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

де

$$V_i \leftrightarrow \{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,k}, \ldots\}.$$

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$\begin{aligned}
V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathfrak{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathfrak{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathfrak{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$\begin{gathered} V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\}; \\ V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\}; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\}; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{gathered}$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_k', \ldots\right\},$$

де $\delta_k' < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{aligned}
V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \not\subseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots\\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots
\end{gathered}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{aligned}
V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \not\subseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots\\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots
\end{gathered}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\right\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{gathered}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_k', \ldots\right\},$$

де $\delta_k' < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{gathered}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\right\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \not\subseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{aligned}
V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\right\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{gathered}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\right\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$
\begin{aligned}
V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\};\\
V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\};\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}
$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$\begin{gathered}
V_1 \leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\}; \\
V_2 \leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\}; \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
V_n \leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\}; \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{gathered}$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Приклад 3.5.50 (продовження)

Випишемо елементи бази $\mathscr{B}'(Z)$:

$$\begin{aligned} V_1 &\leftrightarrow \{\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \ldots, \delta_{1,k}, \ldots\}; \\ V_2 &\leftrightarrow \{\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{2,k}, \ldots\}; \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ V_n &\leftrightarrow \{\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,k}, \ldots\}; \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{aligned}$$

Тоді множина

$$V_0 \leftrightarrow \left\{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_k, \ldots\right\},$$

де $\delta'_k < \delta_{k,k}$ для довільного натурального числа k, є, очевидно, відкритим околом точки Z у фактор-просторі $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Однак за побудовою маємо, що $V_j \nsubseteq V_0$ для довільного натурального числа j, а отже сім'я $\mathscr{B}'(Z)$ не є базою топології в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. З отриманого протиріччя випливає, що в точці Z фактор-простору $\mathbb{R}/\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ не існує зліченної бази.

Вправа 3.5.18

Побудуйте зліченний простір, який не має зліченної бази.

Дякую за увагу!!!